Université de Genève — Section de Mathématiques
Faculté des Sciences — à préparer pour vendredi 6 Novembre 2009

Analyse I

Série 8

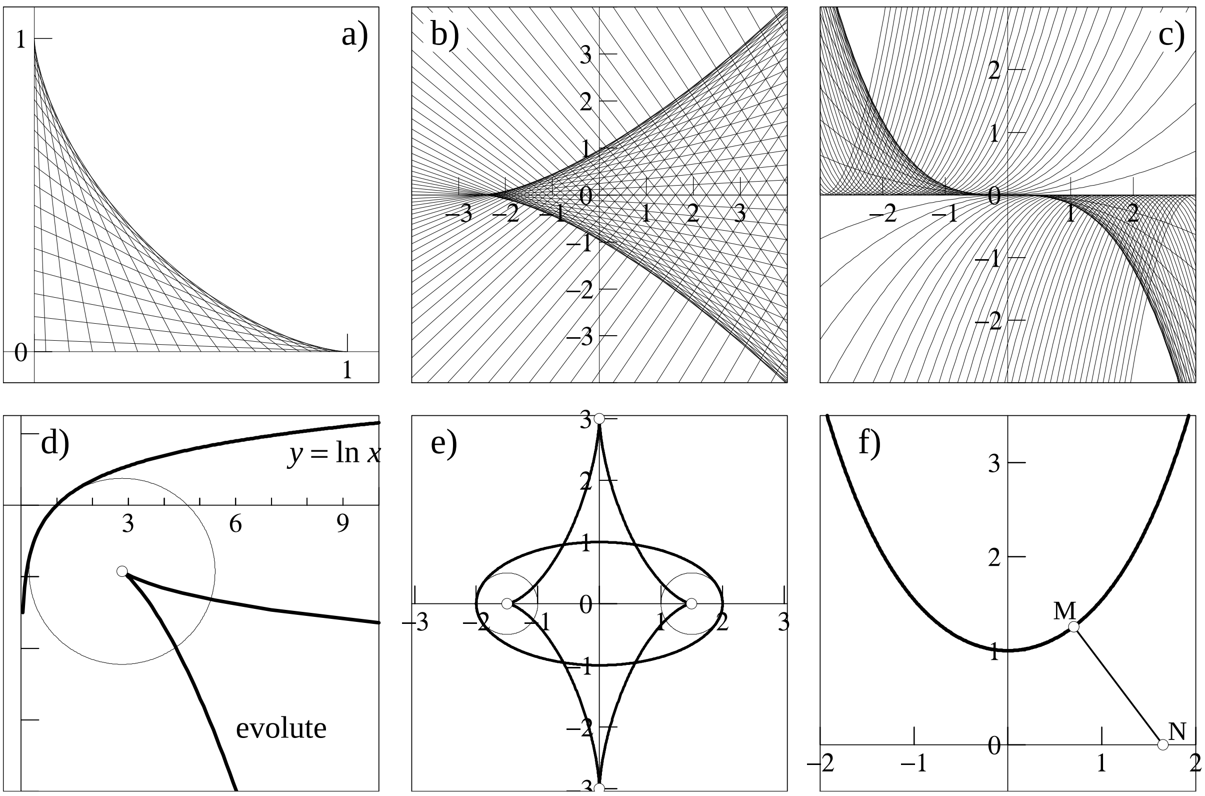
1. Trouver l'enveloppe créée par une échelle de longueur 1 glissant contre un mur (voir figure a).
2. Calculer pour la courbe $y = \ln x$ le point pour lequel la courbure est maximale, c.-à-d. que le rayon du cercle osculateur est le plus petit possible (voir figure d).
3. Calculer une représentation paramétrique pour la développée (lieu géométrique des centres des cercles osculateurs) de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{ou en repr. paramétrique} \qquad \begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned} \qquad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

   Quelles sont les rayons de courbure de cette ellipse aux axes principaux ?

   Réponse (voir figure e) :

$$x = \Big(a - \frac{b^2}{a}\Big)\cos^3 t \ , \qquad y = \Big(b - \frac{a^2}{b}\Big)\sin^3 t \ .$$



4. Soit
$$f(x) = \exp(x^2).$$
Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$, $\ldots$, puis rassembler la série de Taylor
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f''''(0)\frac{x^4}{4!} + \ldots\ .$$
Existe-t-il une méthode beaucoup plus facile pour trouver cette série ?
5. Etudier la fonction
$$y = e^{-x/2} \cdot \cos x.$$
Maxima, minima, convexe, concave, points d'inflexion ?
6. Calculer le rayon de courbure pour “la chaînette”
$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Montrer que ce rayon au point M est égal à la distance MN où MN est la normale à la courbe et N est sur l'axe x (voir figure f). Trouver une représentation paramétrique pour le lieu géométrique des centres des cercles osculateurs (“la développée”).