Analyse I

Série 9

1. Soit
$$x(t) = \int_0^t \cos\bigl(s^2\bigr)\,ds, \qquad y(t) = \int_0^t \sin\bigl(s^2\bigr)\,ds$$
une courbe définie par les *intégrales de Fresnel*. Calculer
a) sa courbure ;
b) la longueur d'arc de cette courbe entre $(0,0)$ et $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ en fonction de t.
On obtient une relation intéressante entre ces deux grandeurs.

2. Calculer les intégrales
$$\int x(1-x)\,dx, \qquad \int x^2\cos x\,dx, \qquad \int x^5 e^{-x^2}\,dx.$$

3. Calculer
$$\int e^{ax}\sin\bigl(bx\bigr)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int e^{ax}\cos\bigl(bx\bigr)\,dx.$$
Indication. Il y a deux possibilités :
a) faire deux intégrations par parties et simplifier ;
b) utiliser
$$\int e^{ax}\sin\bigl(bx\bigr)\,dx + \mathrm{i}\int e^{ax}\cos\bigl(bx\bigr)\,dx = \int e^{ax}e^{\mathrm{i}bx}\,dx = \int e^{(a+\mathrm{i}b)x}\,dx$$

4. Calculer
$$\int \frac{x^3-3x-51}{x^2+4x+13}\,dx.$$

5. Démontrer que
$$F(x) = \arctan\Bigl(\frac{x}{1-x^2}\Bigr)$$
est une primitive de
$$f(x) = \frac{(1+x^2)^2}{1+x^6}.$$
Si l'on calcule
$$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0)$$
on obtient une valeur négative. Pourquoi ?
Quelle est la valeur correcte de cette intégrale ?

6. En utilisant la formule de récurrence

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{1}{m}\,\cos x\,\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx$$

(voir le cours) démontrer que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\ .$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\ .$$

Puisque $0 < \sin x < 1$ pour $0 < x < \pi/2$ il paraît clair que

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx > \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx > \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2} x\,dx\ .$$

En utilisant cette inégalité et les résultats précédents, trouver une nouvelle démonstration pour le produit de Wallis (§ I.5).

7. Démontrer (intégration par parties) que pour des entiers non-négatifs m et n on a

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!}\frac{(x-a)^n}{n!}\,dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!},$$

en particulier

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$