Analyse I

Série 12

1. Montrer que la fonction

$$y = 356.71\, e^{2x} + 762144.67\, xe^{2x} - 453321.32\, e^{-x}$$

est solution de l'équation

$$y''' - 3y'' + 4y = 0.$$

2. Résoudre les équations différentielles

$$y'' - 2y' + 5y = x, \qquad y''' - 2y'' + 5y' = x.$$

3. Chercher une solution particulière de

$$y'' - 2y' + y = e^x \cos x$$

a) en cherchant y de la forme $y = Ae^x \sin x + Be^x \cos x$;
b) par la méthode de la variation des constantes ;
c) en résolvant $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.

4. Pour l'équation différentielle

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos(\omega t), \qquad m, c, k > 0,$$

chercher une solution particulière de la forme $y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$. Étudier son amplitude A en dépendance de ω. En particulier, calculer la valeur de ω pour laquelle A devient maximale (*fréquence de résonance*).
Résultat. $\omega^2 = \omega_0^2 - 0.5(c/m)^2$ où $\omega_0^2 = k/m$.

5. (Équation différentielle "de Cauchy"). Résoudre les équations

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0,$$
$$x^2y'' - xy' - 3y = x^4,$$
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0.$$

6. En se basant sur le résultat de l'exercice précédent, résoudre

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x$$

par la méthode de la variation des constantes. Y a-t-il une méthode plus simple ?
Indication. Ne pas oublier de diviser par x^2 avant d'appliquer les formules du cours.

7. (Abel 1827). Soit $W(x)$ la matrice Wronskienne

$$W(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}, \qquad \text{avec} \qquad y_i'' + a(x)y_i' + b(x)y_i = 0.$$

   Démontrer que

$$\det\Big(W(x)\Big) = \det\Big(W(x_0)\Big) \cdot \exp\Big(-\int_{x_0}^{x} a(t)\,dt\Big). \tag{1}$$

   Indication. Dériver une équation différentielle pour $z(x) = \det\big(W(x)\big)$.

8. (Réduction de l'ordre). Vérifier que $y(x) = x$ est une solution de l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

   En utilisant l'équation (1) de l'exercice précédent, trouver une 2ème solution ainsi que la solution générale.