Analyse I

Série 13

1. ("Inverse error function"). Définissons une fonction $y(x)$ par la relation

$$x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2}\, dt.$$

En dérivant cette relation, démontrer que $y(x)$ satisfait l'équation différentielle

$$y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{y^2}, \qquad y(0) = 0.$$

Calculer les quatre premiers termes de la série de Taylor pour $y(x)$ (développé autour de $x = 0$).

2. Pour $\varepsilon = 10^{-6}$, trouver un entier N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \left(\frac{2n+3}{n} \right)^2 - 4 \right| < \varepsilon.$$

3. Démontrer que la suite $\{s_n\}$, avec

$$s_n = \frac{6n + 2\sqrt{n}}{2n+5},$$

converge vers $s = 3$. Pour cela, pour un $\varepsilon > 0$ donné, trouver un entier N tel que $|s_n - s| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

4. Déterminer le caractère de convergence de chacune des suites

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n}\ , & \qquad b_n &= (-1)^n \left(1 + \frac{5}{n} \right)\ , \\ c_n &= \frac{1 - (-1)^n}{n^3}\ , & \qquad d_n &= \left(\frac{2n^3}{n^2 - 17} \right) \end{aligned}$$

Indication. Pour des expressions du style $\sqrt{A} - \sqrt{B}$, il pourrait s'avérer utile de les multiplier (et diviser) par $\sqrt{A} + \sqrt{B}$.

5. Calculer, à l'aide d'une décomposition en fractions partielles, la limite de la suite

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\ .$$

6. En utilisant le résultat de l'exercice 9 (série 3), démontrer que

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

est une suite de Cauchy. Pour un $\varepsilon > 0$ (par exemple $\varepsilon = 10^{-5}$) trouver un entier N tel que $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et pour tout $k \geq 1$.

7. Construire des exemples de suites s_n et v_n telles que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$ pour illustrer chacune des possibilités suivantes :
   a) $\lim_{n\to\infty} (s_n \cdot v_n) = \infty$;
   b) $\lim_{n\to\infty} (s_n \cdot v_n) = c$, où c est un réel arbitraire ;
   c) $s_n \cdot v_n$ est une suite bornée mais divergente.

8. On considère les trois suites de terme général

$$s_n = \sqrt{n + \frac{n}{100}} - \sqrt{n}, \qquad v_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad u_n = \sqrt{n + 100} - \sqrt{n}.$$

Démontrer que $s_n < v_n < u_n$ pour $n < 10^4$ et calculer $\lim_{n\to\infty} s_n$, $\lim_{n\to\infty} v_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n$, si elles existent. Classer ces limites par ordre croissant.