Correction de la liste d'exercices n°1

Exercice n°1 :

► Si on autorise les répétitions, on a 26×26 choix pour les lettres, et $\underbrace{10 \times 10 \times ... \times 10}_{5 \text{ fois}} = 10^5$ pour les chiffres, soit au total :

$$N = 26^2 \times 10^5 = 67600000 \quad \text{possibiltés}$$

► Si les répétitions sont proscrites, alors on a 26×25 choix pour les lettres et $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ choix pour les chiffres, soit au total :

$$N = 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 19656000 \quad \text{possibilités}$$

Exercice n°2 :

► Les personnes de même nationalité doivent rester groupées, on peut tout d'abord choisir l'ordre des 3 natioanlités sur le rang : pour cela on $N = 3! = 6$ configurations possibles

D	F	GB
D	GB	F
F	D	GB
F	GB	D
GB	D	F
GB	F	D

Ensuite, on peut permuter les personnes au sein d'une même nationalité, au total il y a donc $N = 6 \times 4! \times 3! \times 3!$

Exercice n°3 :

► Dans le mot "pinte" chaque lettre apparait une seule fois, le nombre d'arrangements de lettres distincts que l'on peut former est donc $5! = 120$

► Dans le mot "proposition", il y a 11 lettres dont 2 "p", 3 "o", 2 "i". Pour ne pas compter plusieurs fois le même arrangement (par exemple, si on ne regarde que les "p", "pproosition" apparait deux fois, si on ne regarde que les "o", "oooprpsitin" apparait $3! = 6$ fois...) on est amené à diviser le nombre des permutations possibles des lettres par $2! \times 3! \times 2! = 24$. Le nombre d'arrangements distincts est donc

$$N = \frac{11!}{2! \times 3! \times 2!} = 1663200$$

De même pour "Mississipi", il y a 10 lettres dont 3 "i" et 4 "s", le nombre de possibilités est alors

$$N = \frac{10!}{3! \times 4!} = 25200$$

Pour "arrangement", on trouve

$$N = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2! \times 2!} = 2494800$$

Exercice n°4 :

► On détermine le nombre de possibilités dans chacune des 3 obédiences, le nombre total de choix possibles est alors le produit de ces trois nombres. Pour les démocrates, on a C_6^2 choix, pour les républicains C_5^2, et pour les indépendants C_4^3. Le nombre comités distincts que l'ont peut ainsi former est

$$N = C_6^2 \times C_5^2 \times C_4^3 = 600$$

Exercice n°5 :

► On désigne l'ainé par a, le benjamin par b et le cadet par c. Sur les sept cadeaux, on note l'initialiale de celui à qui il est destiné. On doit donc avoir $3a$, $2b$, et $2c$. Le problème revient alors à compter le nombre de mots distincts que l'on peut former avec les lettres $\{a,a,a,b,b,c,c\}$. Pour cela, on fait comme dans l'exercice 3, on trouve

$$N = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

Exercice n°6 :

► On désigne par P l'ensemble des professeurs et E l'ensemble des écoles. Le nombre de choix possibles pour l'affectation des professeurs est le nombres d'applications de E dans F, ce nombre est $N = |F|^{|E|} = 4^8 = 65536$.

► Maintenant, on impose que chaque école reçoit deux professeurs. Pour la première école, on a C_8^2 choix, pour la seconde C_6^2, la troisieme C_4^2 et la quatrième $C_2^2 = 1$ choix. Le nombre d'affectations possibles est donc

$$N = C_8^2 \times C_6^2 \times C_4^2 = 2520$$

► Nous dénombrons à présent le nombre d'applications surjectives de E dans F.

Notation On note S_n^p le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments vers un ensemble à p éléments.
On remarque que les application surjectives de E dans F sont les application de E dans F auquelles on soustrait les application de E dans F non surjectives, c'est à dire celles qui atteignent 3, 2 ou un élément de F. Or, pour $k = 1,2,3$, il y a $C_4^k \times S_8^k$ applications de E dans F qui atteignent k éléments. En effet, il faut choisir les k éléments atteints parmi 4 et considérer toutes les applications surjectives vers ces k éléments. Ainsi

$$S_8^4 = 4^8 - C_4^3 \times S_8^3 - C_4^2 \times S_8^2 - C_4^1 \times S_8^1$$

On calcule alors S_8^k pour $k = 1,2,3$. Pour $k = 1$, on a naturellement $S_8^1 = 1$, puis

$$S_8^2 = 254$$

En effet les applications de E dans un ensemble à 2 éléments surjectives sont les application de E dans un ensemble à 2 éléments (il y en a $2^8 = 256$) auquelles on soustrait les deux applications non surjectives (celles qui envoient tous les éléments de E sur le même éléments de l'ensemble d'arrivée). Enfin, par un raisonnement identique aux précédents

$$S_8^3 = 3^8 - C_3^2 \times S_8^2 - C_3^1 \times S_8^1 = 6561 - 3 \times 254 - 3 \times 1 = 5796$$

Finalement

$$S_8^4 = 4^8 - C_4^3 \times S_8^3 - C_4^2 \times S_8^2 - C_4^1 \times S_8^1 = 65536 - 4 \times 5796 - 6 \times 254 - 4 \times 1 = 40824$$

Exercice n°7 :

► Dans chaque urne j, on met au moins m_j boules, mettons que l'on mette $m_j + k_j$ boules où $k_j \geq 0$ de telle sorte que $m = \sum_{j=1}^{r}(m_j + k_j)$. On peut raisonner comme si on remplissait les urnes au fur et à mesure. Dans la première urne, on place m_1+k_1 boules, on a donc $C_m^{m_1+k_1}$ choix, dans la deuxième on place $m_2 + k_2$ boules que l'on choisit parmi les $m - (m_1 + k_1)$ restantes, on a donc $C_{m-(m_1+k_1)}^{m_2+k_2}$ choix, etc... , pour l'urne j, le nombre de possibilités est $C_{m-\sum_{i=1}^{j-1}(m_i+k_i)}^{m_j+k_j}$. Au total, si $K = \{(k_1,...,k_r),k_j \geq 0,m = \sum_{j=1}^{r}(m_j + k_j)\}$, le nombre de possibilités est

$$N = \sum_{(k_1,...,k_r)\in K} C_m^{m_1+k1} \times ... \times C_{m-\sum_{i=1}^{j-1}(m_i+k_i)}^{m_j+k_j} \times ... \times C_{m-\sum_{i=1}^{r-1}(m_i+k_i)}^{m_r+k_r}$$

Exercice n°8 :

► On dispose de 2×100 députés, si l'on veut former une commission composée de p députés, on a C_{200}^{p} choix possibles. Pour un nombre arbitraire (≥ 1) on a alors $\sum_{p=1}^{200} C_{200}^{p} = \sum_{p=0}^{200} C_{200}^{p} - 1 = 2^{200} - 1$.

► Si on forme une commission de 100 députés et que l'on impose que les 100 départements doivent être représentés, le seul choix possible est celui du candidat (parmi les deux) pour chaque département, on a donc un nombre de possibilités

$$N = 2^{100}$$

Exercice n°9 :

► Si toute les personnes ont le permis, on peut les répartir arbitrairement. On remplit alors la première voiture avec 6 personnes, on a C_{12}^{6} choix, dans la seconde on met 4 personnes, on a C_6^4 choix, les deux dernières personnes vont dans la troisième voiture. Il y a

$$N = C_{12}^{6} \times C_6^4 = 13860 \quad \text{possibilités}$$

► Si seulement 4 personnes ont le permis, plusieurs réponses sont possibles selon que l'on considère que les places sont numérotées ou non. Nous considérons ici le cas où les places ne sont pas numérotées, *i.e* seule la place du conducteur a un caractère privilégié. Dans, ce cas, il faut d'abord répartir les conducteurs, on en choisit 3 parmi les 4, soit $C_4^3 = 4$ possibilités et on les place dans les voitures (6 possibilités). Il reste un conducteur à placer : si on le met dans la voiture à six place, il reste alors 8 personnes à placer avec 4 places dans la voiture à 6 places, 3 dans la voiture à 4 places, 1 dans la voiture 2 places, on a donc $C_8^4 \times C_4^3$ choix. Si le dernier conducteur est dans la voiture à 4 places, on à 8 personnes à placer avec 5 places dans la voiture à 6 places, 2 dans la voiture à 4 places, 1 dans la voiture 2 places, soit $C_8^5 \times C_3^2$ choix. Enfin, si on place le dernier conducteur dans la voiture à deux places, il reste 8 personnes à placer avec 5 places dans la voitures à six places et 3 dans la voiture à deux places soit $C_8^5 \times C_3^3$ choix. Au total, on obtient

$$N = C_4^3 \times 6 \times (C_8^4 \times C_4^3 + C_8^5 \times C_3^2 + C_8^5 \times C_3^3) \quad \text{configurations}$$