Correction de la liste d'exercices n°2

Exercice n°1 :

► On lance succéssivement 4 dès usuels, l'espace des épreuves est donc $\Omega = \{1,...,6\}$ que l'on munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme. Le nombre de tirages possibles est $|\Omega| = 6^4$. Le nombre de carrés est 6 (on a le choix que pour l'une des faces parmi 6 possibles). Pour un brelan, on a 6 choix pour les trois faces identiques, puis 5 choix pour le dernier dés, ensuite, il faut choisir l'ordre des dés, au total on a $6 \times 5 \times C_4^3 = 120$. Pour une double paire, on a 6 choix pour les 2 premières faces identiques, 5 pour les deux autres faces identiques, ensuite il faut choisir l'ordre des dés, on a donc $6 \times 5 \times C_4^2/2 = 90$ choix. Pour une simple paire, on a 6 choix pour les deux faces identiques, 5 choix pour le troisième dés, 4 pour le quatrième, ensuite, il faut tenir compte de l'ordre soit $6 \times 5 \times 4 \times C_4^2 = 720$. Enfin, le nombre de dispositions banales est $6 \times 5 \times 4 \times 3$

Exercice n°2 :

► C'est comme au dessus, on compte le nombre de "carrés" de "full", etc ... Pour avoir la probabilité, il suffit de diviser par le nombre de tirages possibles, ici $|\Omega| = C_{32}^5$.

Exercice n°3 :

► On distingue selon que le nombre s'écrit avec 4 ou 5 chiffres : si le nombre s'écrit avec 4 chiffres, alors pour le premier chiffre, il y a 9 choix, pour le second aussi (10 choix - celui du premier), pour le troisième 8 choix (10-les deux précédents) et le quatrième 7 choix (10-3précédents). Il y a donc $9 \times 9 \times 8 \times 7$ possibilités. Maintenant, si le nombre envisagé s'écrit avec 5 chiffres il y a $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ choix, au total il y a alors $9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 7$ possibilités.

Exercice n°4 :

► On lance n fois deux dés normaux, l'espace des épreuves est donc $\Omega = \{1,...,6\}^n$. On note A l'évènement {on obtient au moins un double six au cours des n tirages}. Son complémentaire s'écrit

$$A^c = \{\text{on obtient aucun double six au cours des } n \text{ tirages }\}$$

Les n tirages sont indépendants donc

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\text{on obtient pas un double six sur un tirage})^n$$

Or la probabilité de ne pas obtenir un double six est 35/36 donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Dés lors,

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \geq \left(\frac{35}{36}\right)^n \Longleftrightarrow n \geq \frac{\log(1/2)}{\log(35/36)} \simeq 24.6$$

► Il faut donc lancer au moins 25 fois pour avoir un chance sur deux d'obtenir un 421.

Exercice n°5 :

► On lance n fois trois dés, l'ensemble des tirages est $\Omega = \overbrace{\{1,...,6\}^3 \times ... \times \{1,...,6\}^3}^{n \text{ fois}}$ que l'on munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme. On considère l'évènement

$$A = \{\text{on obtient au moins un 421 au cours des } n \text{ tirages}\}$$

$$A^c = \{\text{on n'obtient aucun 421 au cours des } n \text{ tirages}\}$$

Comme les n lancés sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\text{on n'obtient pas de 421 pour 1 tirage})^n := \mathbb{P}(B)^n$$

L'évènement B^c "on obtient un 421" s'écrit $\{1,2,4\} \cup \{1,4,2\} \cup \{2,1,4\} \cup \{2,4,1\} \cup \{4,1,2\} \cup \{4,2,1\}$.

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{|\{1,2,4\} \cup \{1,4,2\} \cup \{2,1,4\} \cup \{2,4,1\} \cup \{4,1,2\} \cup \{4,2,1\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^3|} = 1 - \frac{6}{6^3} = \frac{35}{36}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\text{on obtient au moins un 421 au cours des } n \text{ tirages}) = P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} \geq \left(\frac{35}{36}\right)^n \Longleftrightarrow n \geq \frac{\log(1/2)}{\log(35/36)} \simeq 24.6$$

► Il faut donc lancer au moins 25 fois pour avoir un chance sur deux d'obtenir un 421.

Exercice n°6 :

► On lance 3 fois une pièce de monnaie, si on désigne "pile" par 0 et "face" par 1, l'espace des épreuves est $\Omega = \{0,1\}^3$. Soient les évenements

A={la première pièce donne face}
B={face sort deux fois exactement}
C= {face sort au plus deux fois}

Ces évènements s'écrivent

A= $\{1\} \times \{0,1\}^2$
B= $\{1,1,0\} \cup \{1,0,1\} \cup \{0,1,1\}$
C= {face ne sort pas, sort 1 fois exactement, 2 fois exactement}

Alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|\{1\} \times \{0,1\}^4|}{|\Omega|} = \frac{2^2}{2^3} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_3^2}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1 + C_3^1 + C_3^2}{8} = \frac{7}{8}$$

Exercice n°7 :

► On lance 10 dés, $i.e\ \Omega = \{1,...,6\}^{10}$, que l'on munit de la tribu des parties. Soient les évenements

A={6 ne sort pas}
B={6 sort une fois exactement}
C= {6 sort trois fois exactement}
D= {6 sort deux fois au moins}
E= {6 sort trois fois au moins}

Ces évènements s'écrivent

A= $\{1,2,3,4,5\}^{10}$
B= $\{6\} \times \{1,2,3,4,5\}^9$ à l'ordre près
C= $\{6\}^3 \times \{1,2,3,4,5\}^7$ à l'ordre près
D= {6 sort deux fois exactement, 3 fois exactement, ..., 10 fois exactement}
E= {6 sort trois fois exactement, 4 fois exactement, ..., 10 fois exactement}

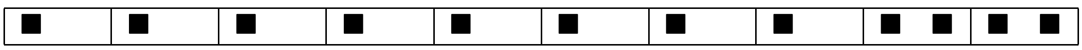
Alors

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq 0.1615, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{C_{10}^1\ 5^9}{6^{10}} = 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq 0.3230, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{C_{10}^3\ 5^7}{6^{10}} \simeq 0.1550$$

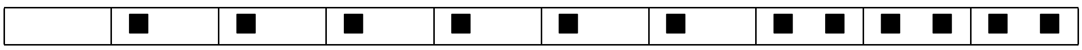
$$\mathbb{P}(D) = \frac{C_{10}^2\ 5^8\ + C_{10}^3\ 5^7\ + ... + C_{10}^9\ 5\ + 1}{6^{10}} \simeq 0.5155, \quad \mathbb{P}(E) = \frac{C_{10}^3\ 5^7\ + ... + C_{10}^9\ 5\ + 1}{6^{10}} \simeq 0.2248$$

Exercice n°8 :

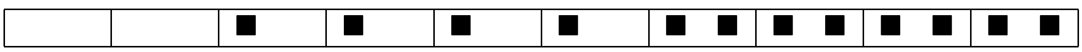
► On prélève au hasard 8 chaussures parmi 10 paires, on note Ω l'ensemble des tirages possibles. Naturellement, on a $Card(\Omega) = C_{20}^8$. Après avoir prélevé les huit chaussures, il reste au moins 2 paires et au plus 6 paires, il nous suffit donc de calculer $\mathbb{P}$(il y a k paires de chaussures) pour $k = 2,3,4,5,6$



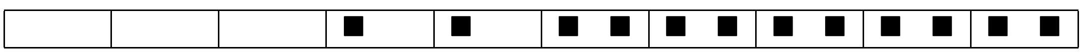
$$\mathbb{P}(2\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{on choisit les chaussures dans 8 tiroirs différents}) = \frac{2^8\ C_{10}^2}{|\Omega|}$$



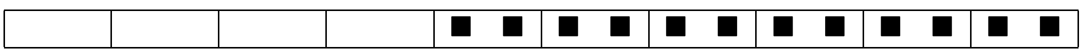
$$\mathbb{P}(3\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{3 boites intactes, 2 chaussures dans un des 7 autres boites}) = \frac{2^6\ C_{10}^3 C_7^1}{|\Omega|}$$



$$\mathbb{P}(4\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{4 boites intactes, 2 chaussures dans deux des 6 autres boites}) = \frac{2^4\ C_{10}^4 C_6^2}{|\Omega|}$$



$$\mathbb{P}(5\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{5 boites intactes, 2 chaussures dans trois des 5 autres boites}) = \frac{2^2\ C_{10}^5 C_5^3}{|\Omega|}$$



$$\mathbb{P}(6\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{6 boites intactes, 2 chaussures dans quatre des 4 autres boites}) = \frac{C_{10}^6}{|\Omega|}$$

Exercice n°9 :

► On note 1 pour noir, 0 pour blanc, et $(X_k,Y_k) \in \{0,1\}^2$ le résultat du $k^{ième}$ tirage. Soit $A = \{X$ est le premier à tirer à tirer une boule noire$\}$. On peut écrire A comme

$$A = \cup_{k\geq 1}\{X \text{ est le premier à tirer à tirer une boule noire au } k^{ième} \text{ tirage}\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \text{ est le premier à tirer à tirer une boule noire au } k^{ième} \text{ tirage})$$

$$i.e \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X_1 = 1) + \sum_{k\geq 2} \mathbb{P}\left(X_k = 1 \text{ et } (X_j,Y_j) = (0,0),\, j \in [|1,k-1|]\right)$$

$$\text{Or} \qquad \mathbb{P}\left(X_k = 1 \text{ et } (X_j,Y_j) = (0,0),\, j \in [|1,k-1|]\right) =$$

$$\mathbb{P}\left(X_k = 1 \mid (X_j,Y_j) = (0,0),\, j \in [|1,k-1|]\right) \times \mathbb{P}\left((X_j,Y_j) = (0,0),\, j \in [|1,k-1|]\right)$$

► Dans le cas où il y a remise, les variables X_i,Y_j sont indépendantes donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+b} + \sum_{k\geq 2} \mathbb{P}[X_k = 1] \times \mathbb{P}[(X_1,Y_1) = ... = (X_{k-1},Y_{k-1}) = (0,0)]$$

$$= \frac{n}{n+b}\left(1 + \sum_{k\geq 2}\left(\frac{b}{n+b}\right)^{2(k-1)}\right) = \frac{n}{n+b}\left(\sum_{k\geq 0}\left(\frac{b}{n+b}\right)^{2k}\right) = \frac{n+b}{n+2b}$$

► Dans le cas où il n'y a plus de remise, les tirages ne sont bien sûr plus indépendants, et si l'on ne tire que des boules blanches, il arrive un moment où il n'y en a plus[1] !!!
On a en fait

$$\mathbb{P}\left(X_k = 1 \mid (X_j,Y_j) = (0,0),\, j \in [|1,k-1|]\right) = \frac{n}{n+b-2(k-1)}$$

et si on pose

$$a_p = \mathbb{P}\left((X_j,Y_j) = (0,0),\, j \in [|1,p|]\right)$$

alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n}{n+b} + \sum_{k\geq 2} \frac{n}{n+b-2(k-1)} a_{k-1}$$

On peut calculer a_p par récurrence :

$$a_p = \frac{b-2p+1}{n+b-2p+1} \times \frac{b-2p+2}{n+b-2p+2}\, a_{p-1}$$

Comme

$$a_1 = \frac{b-1}{n+b-1} \times \frac{b}{n+b}$$

On déduit

$$a_p = \prod_{l=1}^{p} \frac{b-2l+1}{n+b-2l+1} \times \frac{b-2l+2}{n+b-2l+2}$$

1. En fait on doit avoir $b - 2(k-1) \geq 0$ $i.e$ $2k \leq b+2$...

Exercice n°10 : On donne ici deux solutions

► On choisit pour Ω l'ensemble des tirages de trois billets parmi 100, alors $|\Omega| = C_{100}^3$. On considère l'évènement $A = \{\text{on gagne au moins 30 euros}\}$, alors

$A^c = \{\text{on gagne 0 euros exactement}\} \cup \{\text{on gagne 10 euros exactement}\} \cup \{\text{on gagne 20 euros exactement}\}$

Si l'on gagne 0 euros, c'est que l'on a choisi 3 billets parmi les 84 perdants, si l'on gagne 10 euros c'est que l'on a choisi un billet parmi les 10 qui valent 10 euros et deux parmi les 84 billets perdants, enfin si l'on gagne 20 euros, c'est que l'on a choisi deux billets parmi ceux qui valent 10 et 1 parmi les perdants. On a alors

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{C_{84}^3 + C_{10}^1 C_{84}^2 + C_{10}^2 C_{84}^1}{C_{100}^3} \simeq 0.1718$$

On pose $B = \{\text{on gagne 30 euros exactement}\}$. Il y a deux possibilités pour gagner 30 euros, soit on choisit trois billets parmi les 10 valant 10 euros, soit on choisit un billet valant 30 parmi les 5 et deux billets perdant parmi les 84.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_{10}^3 + C_5^1 C_{84}^2}{C_{100}^3} \simeq 0.1085$$

► On peut aussi voir les choses de manière un peu plus pedestre et dénombrer toutes les possibilités pour la somme des gains. Les valeurs possibles pour la somme des gains sont

$$\{0,10,20,30,40,50,60,70,80,90,110\}$$

les moyens d'y arriver sont

valeurs possibles	moyens	tirages favorables	total tirages favorables
0	0+0+0	$84 \times 83 \times 82 = 571704$	571704
10	10+0+0	$84 \times 83 \times 10 \times 3 = 209160$	209160
20	10+10+0	$84 \times 10 \times 9 \times 3 = 22680$	22680
30	30+0+0	$84 \times 83 \times 5 \times 3 = 104580$	
"	10+10+10	$10 \times 9 \times 8 = 720$	105300
40	30+10+0	$84 \times 10 \times 5 \times 6 = 25200$	25200
50	50+0+0	$84 \times 83 \times 1 \times 3 = 20916$	
"	30+10+10	$10 \times 9 \times 5 \times 3 = 1350$	22266
60	50+10+0	$1 \times 10 \times 84 \times 6 = 5040$	
"	30+30+0	$5 \times 4 \times 84 \times 3 = 5040$	10080
70	50+10+10	$10 \times 9 \times 1 \times 3 = 270$	
"	30+30+10	$5 \times 4 \times 10 \times 3 = 600$	870
80	50+30+0	$84 \times 5 \times 1 \times 6 = 2520$	2520
90	50+30+10	$1 \times 5 \times 10 \times 6 = 300$	
"	30+30+30	$5 \times 4 \times 3 = 60$	360
110	50+30+30	$1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$	60
			total=970200=$100 \times 99 \times 98$

► La probabilité qu'un acheteur de 3 billets gagne au moins 30 euros est

$$\mathbb{P} = \frac{105300 + 25200 + 22266 + 10080 + 870 + 2520 + 360 + 60}{100 \times 99 \times 98} \simeq 0.1718$$

► La probabilité qu'il gagne exactement 30 euros est

$$\mathbb{P} = \frac{105300}{100 \times 99 \times 98} \simeq 0.1085$$

Exercice n°11 :

► On jette deux dés et on note S leur somme, S est donc une variable aléatoire à valeurs dans {2,3,...,12} et

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$(S=k)	0	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$\mathbb{P}(S > k)$	1	35/36	33/36	30/36	26/36	21/36	15/36	10/36	6/36	3/36	1/36	0

► On jette à nouveau les deux dés, on note la somme T. Les deux lancers sont identiques et indépendants donc

$$\mathbb{P}(S = T) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = T = k) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = k)\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = k)^2 \simeq 0.1127$$

$$\mathbb{P}(S \neq T) = \mathbb{P}(S > T) + \mathbb{P}(S < T) = 2\mathbb{P}(S > T) = 1 - \mathbb{P}(S = T) \simeq 0.8873$$

$$\text{d'où} \quad \mathbb{P}(S > T) \simeq 0.4436$$

$$\mathbb{P}(S \leq T) = \mathbb{P}(S = T) + \mathbb{P}(S < T) \simeq 0.5563$$

Exercice n°12 :

► On jette 4 dés, l'ensemble des tirages est donc $\Omega = \{1,...,6\}^4$ qui est un ensemble fini, on choisit naturellement comme tribu la tribu des parties $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Les dés étant normaux, on munit cet espace de la probabilité uniforme. On considère l'évènement $A = \{\text{on tire au moins un six}\}$. On a $A^c = \{\text{on ne tire aucun six}\} = \{1,2,3,4,5\}^4$ alors

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^4}{6^4} \simeq 0.5171$$

► Maintenant, si on jette 2 dés 24 fois, l'ensemble des tirages est $\Omega = \overbrace{\{1,...,6\}^2 \times ... \times \{1,...,6\}^2}^{24 \text{ fois}}$. Là encore on choisit la tribu des parties. Soit $B = \{\text{on tire au moins un double six}\}$ alors

$$B^c = \{\text{on ne tire aucun double six}\} = \overbrace{\{1,2,3,4,5,6\}^2 - \{6,6\} \times ... \times \{1,2,3,4,5,6\}^2 - \{6,6\}}^{24 \text{ fois}}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{|B^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(36-1)^{24}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$$

► On conclut que tirer au moins un six en jettant quatre dés est plus probable que d'obtenir un double six en jettant 24 fois deux dés.