Correction de la liste d'exercices n°3

Exercice n°1 :

► On désigne rouge par R, noir par N, pair par P et impair par I. Par hypothèse

$$\mathbb{P}(R) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(I) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(R \cap P) = p$$

Alors

$$1 - p = \mathbb{P}(N \cup I) = \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(I) - \mathbb{P}(N \cap I) \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(N \cap I) = p + \frac{1}{15}$$

N et I sont indépendants ssi $\mathbb{P}(N \cap I) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(I) = \frac{2}{5}\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ $i.e$ pour $p = \frac{3}{15}$.

Exercice n°2 :

► On ne prouve ici qu'une implication, la réciproque pouvant être obtenue par symétrie Si A et B sont indépendants, $i.e$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, alors

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A \cap B) - 1] = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 1]$$

$$= 1 - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 1] = \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) - 1] + \mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(B^c)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Donc, A^c et B^c sont indépendants. De même, on a

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

alors

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

Exercice n°3 :

► On désigne pile par 0 et face par 1, on appelle $(P_1,P_2,...,P_{11}) \in \{0,1\}^{11}$ les prédictions du voyant. Ce sont des nombres déterministes, fixés avant les tirages des pièces. Ensuite, on considère l'espace des épeuves $\Omega = \{0,1\}^{11}$, muni de la tribu des parties et de la mesure uniforme, on désigne par $(X_1,X_2,...X_{11})$ les valeurs (pile, face)prises par les pièces. On construit alors les variables $Y_i = |X_i - P_i|$. Lorsque Y_i vaut 0 cela veut dire que la prédiction est bonne, lorsque $Y_i = 0$ le voyant s'est trompé... On voit facilement que

$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$$

Maintenant on peut déterminé la probabilté que le voyant fasse exactement p erreurs :

$$\mathbb{P}(p \text{ erreurs exactement}) = \frac{C_{11}^p}{2^{11}}$$

La probabilité pour le voyant se trompe au plus n fois

$$\mathbb{P}(\text{au plus } n \text{ erreurs }) = \frac{\sum_{p=0}^{n} C_{11}^p}{2^{11}}$$

Exercice n°4 :

Le problème ici est de bien interpréter l'énoncé. On donne deux corrections, dans la première (la meilleure), on colle vraiment au texte, dans la seconde, on fait l'hypothèse qu'au départ les prisonniers sont libérés/éxécutés avec probabilité 1/2, puis qu'on les informe de la situation.
► Dans les deux cas, on désigne "condamné" par 1 et "libéré" par 0 et note (X,Y,Z) l'état des prisonniers.

Si on colle au texte

Si l'on colle au texte, l'espace des épreuves se résume à $\Omega = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ et naturellement

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Z = 1) = 1/3$$

Si le goelier ne dis rien on a donc $\mathbb{P}(X = 1) = 1/3$. Maintenant, si le geolier désigne un prisonnier à libérer, par exemple $(Y = 0)$ alors par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1)}{\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) + \mathbb{P}(Y = 0 \mid Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 0 \mid Z = 1)}$$

On note $p = \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1)$, comme $\mathbb{P}(Y = 0 \mid Y = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0 \mid Z = 1) = 1$

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{p}{1 + p}$$

Si le geolier est impartial, *i.e* $p = 1/2$, on trouve la même proba que plus haut.

Si on interprete le texte

► On peut interpréter le texte comme suit : au départ les prisonniers sont libérés/éxécutés avec probabilité 1/2, et ensuite on vient les voir en leur disant que deux d'entre eux vont être libérés et un exécuté. Alors l'espace des épreuves est $\Omega = \{0,1\}^3$ que l'on munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme. Si l'on note $S = X + Y + Z$, l'hypothèse que 2 prisonniers seront libérés et 1 exécuté s'écrit $S = 1$.

► L'événement "le geolier parle à X" s'écrit $\{Y = 0 \cup Z = 0\}$, alors

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid S = 1 \cap (Y = 0 \cup Z = 0)) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0 \cap Z = 0)}{\mathbb{P}(S = 1 \cap (Y = 0 \cup Z = 0))} = \frac{1}{2}$$

► Si le geolier ne dis rien

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid S = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0 \cap Z = 0)}{\mathbb{P}(S = 1)} = \frac{1}{3}$$

► Avec cette interprétation, on trouve que le geolier a bien raison.

Le modèle ci-dessus est aussi celui d'un fameux jeu TV nord américain. A la fin du jeu, le candidat se trouve face à trois portes, derrière lesquelles se trouvent une voiture et deux chèvres. Le présentateur demande au candidat de choisir une porte, (on ne l'ouvre pas), puis il propose au candidat de lui indiquer une porte derrière laquelle il sait que se trouve une chèvre...

Exercice n°5 :

► On considère les événements

$$A = \{X \text{ vit encore neuf ans }\} \quad \text{et} \quad B = \{Y \text{ vit encore neuf ans }\}$$

Par hypothèse, A et B sont indépendants. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

$$\mathbb{P}(A|A \cup B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{10}{19}$$

Exercice n°6 :

► On associe les nombres 1 à "fille" et 0 à "garçon". Comme on sait que le couple a deux enfants, l'espace des épreuves est $\Omega = \{0{,}1\}^2$. On le munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme (on suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille qu'un garçon et que le genre des frères et soeurs n'est pas lié). On note $(X_1{,}X_2)$ le genre des deux enfants, X_1 étant l'ainée, et S la variable $S = X_1 + X_2$, on fait l'hypothèse (sauf dans la question 2) que le couple a au moins une fille, $i.e \quad S \geq 1$

► La probabilité que l'autre enfant soit une fille est

$$\mathbb{P}(S = 2 \mid S \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)}{\mathbb{P}(S \geq 1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

► Si une fille ouvre la porte, mettons $X_j = 1$ alors,

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_j = 1) = 1/2 \qquad \text{par indépendance}$$

► Une fille ouvre la porte, cette info s'écrit $X_1 = 1 \cup X_2 = 1$, et est équivalente à $S \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(S = 2 \mid S \geq 1) = 1/3 \qquad \text{par indépendance}$$

► Si l'ainée (une fille) ouvre la porte, on a donc $X_1 = 1$, cette dernière info contenant $S \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = 1/2 \qquad \text{par indépendance}$$

Exercice n°7 :

► On note X_k le résultat du $k^{ième}$ tirage, naturellement les X_i sont des variables indépendantes. Pour $i \neq j$, on pose $A_{ij} = \{X_i = X_j\}$, on vérifie facilement que les A_{ij} sont deux à deux indépendants, par exemple, si $i \neq j \in [|1,n|]$ et $k \neq l \in [|1,n|] - \{i,j\}$ alors

$$\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{kl}) = \sum_{m,n=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = X_j = m \cap X_k = X_l = n)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = m)\mathbb{P}(X_j = m)\mathbb{P}(X_k = n)\mathbb{P}(X_l = n) = \sum_{m,n=1}^{6} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{36}$$

$$\text{Or} \quad \mathbb{P}(X_i = X_j)\mathbb{P}(X_k = X_l) = \left(\sum_{m=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = m)^2\right)\left(\sum_{n=1}^{6} \mathbb{P}(X_k = n)^2\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Donc A_{ij} et A_{kl} sont indépendants.
Cependant, les événements A_{ij} ne sont pas indépendants comme le montre le calcul ci dessous :

$$\mathbb{P}(A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X_1 = k)^3 = \frac{1}{36}$$

$$\neq \mathbb{P}(A_{12})\mathbb{P}(A_{23})\mathbb{P}(A_{13}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Exercice n°8 :

► Si A,B,C sont deux à deux indépendants, comme $\alpha + \beta + \gamma = 1 - \delta$, si $\pi := \alpha\beta\gamma$ on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \end{array}\right. \quad i.e \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma = (b + \gamma)(\gamma + \alpha) \\ \beta = (\beta + \gamma)(\alpha + \beta) \\ \alpha = (\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma^2\delta = \pi \\ \beta^2\delta = \pi \\ \alpha^2\delta = \pi \end{array}\right.$$

On a donc nécessairement $\alpha = \beta = \gamma$. Si $\alpha = 0$ alors $\delta = 1$, sinon $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/4$

► Pour que A,B,C ne soient pas indépendants, il faut et il suffit qu'une condition du type suivant soit violée

$$\mathbb{P}(A^{e_A} \cap B^{e_B} \cap C^{e_C}) = \mathbb{P}(A^{e_A})\mathbb{P}(B^{e_B})\mathbb{P}(C^{e_C}) \quad \text{où} \quad M^{e_M} = M \text{ ou } M^c$$

Dans le cas $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/4$ on a

$$P(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq P(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

On conclut que si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/4$ alors A,B,C sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants. En revanche, on vérifie facilement que lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\delta = 1$, les événements A,B,C sont deux à deux indépendants et sont aussi indépendants dans leur ensemble.

Exercice n°9 :

On note $A \to B$ si on peut aller de A à B et $(A \to B)^c$ si on ne le peut pas. Pour les six routes (2 premières de A à B, 3 suivantes de B à C et dernière de A à C), on note R_i si la route est ouverte, R_i^c si elle est fermée, alors :

$$P((A \to B)|(A \to C)^c) = \frac{\mathbb{P}((A \to B) \cap (A \to C)^c)}{\mathbb{P}((A \to C)^c)} = \frac{\mathbb{P}((R_1 \cup R_2) \cap (R_3^c \cap R_4^c \cap R_5^c))}{\mathbb{P}(R_3^c \cap R_4^c \cap R_5^c)}$$

$$= \mathbb{P}(R_1 \cup \mathbb{R}_2) = 2p - p^2$$

Dans le cas où on a une sixième route de A à C :

$$P((A \to B)|(A \to C)^c) = \frac{\mathbb{P}((R_1 \cup R_2) \cap (R_3^c \cap R_4^c \cap R_5^c \cap R_6^c))}{\mathbb{P}(R_3^c \cap R_4^c \cap R_5^c \cap R_6^c)} = 2p - p^2$$

Exercice n°10 :

► On note (X_1,X_2,X_3) les résultats des trois tirages, n pour "noire" et b pour "blanche".

$$\mathbb{P}(X_1 = n \mid X_2 = b) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = n \cap X_2 = b)}{\mathbb{P}(X_2 = b)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = b \mid X_1 = n)\mathbb{P}(X_1 = n)}{\mathbb{P}(X_2 = b \mid X_1 = b)\mathbb{P}(X_1 = b) + \mathbb{P}(X_2 = b \mid X_1 = n)\mathbb{P}(X_1 = n)}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = n \mid X_2 = b) = \frac{\frac{b}{n+b+l}\frac{n}{n+b}}{\frac{b+l}{n+b+l}\frac{b}{n+b} + \frac{b}{n+b+l}\frac{n}{n+b}} = \frac{nb}{b(b+l)+nb}$$

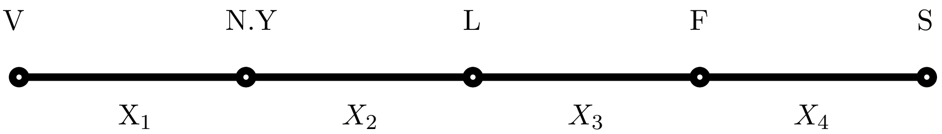
► On écrit $X_3 = n$ comme réunion d'évènements disjoints

$$\{X_3 = n\} = \{X_3 = n \cap X_2 = n \cap X_1 = n\} \sqcup \{X_3 = n \cap X_2 = n \cap X_1 = b\}$$

$$\sqcup \{X_3 = n \cap X_2 = b \cap X_1 = b\} \sqcup \{X_3 = n \cap X_2 = b \cap X_1 = b\}$$

et on utilise la formule $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C)\mathbb{P}(C)$ etc,etc...

Exercice n°11 :



► Les variables aléatoires X_i valent respectivement 0 s'il n'y a pas eu d'attentat sur le $i^{ème}$ vol et 1 sinon. On fait l'hypothèse qu'il y a eu un attentat *i.e* $S := X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 1$, et que les avions ne décollent plus après un attentat.

Alors pour $i = 1,2,3,4$

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid S \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X_i = 1 \cap S \geq 1)}{\mathbb{P}(S \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_j = 0 \text{ pour } j < i, \text{et } X_i = 1)}{\mathbb{P}(S \geq 1)} = \frac{p(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)^4}$$

Exercice n°12 :

► Si 1 désigne pile et 0 désigne face l'espace des épreuves est $\Omega = \{0{,}1\} \times \{0{,}1\} \times \{0{,}0\} \times \{0{,}0\} \times \{1{,}1\}$ qu'on muni de la tribu des parties et de la mesure uniforme.
► On note X le résultat du lancer de la pièce tirée au hasard. On notera $X \in P_i$ si la pièce tirée est la $i^{ème}$. Alors

$$\mathbb{P}(X=0) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X=0 \cap X \in P_i) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X=0|X \in P_i)\mathbb{P}(X \in P_i)$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(X \in P_1) \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X=0|X \in P_i) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1+1+0\right) = \frac{3}{5}$$

► On désigne par Y la valeur de l'autre coté de la pièce.

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0) = \frac{\mathbb{P}(Y=0 \ \cap \ X=0)}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{\sum_{i=0}^{5} \mathbb{P}(Y=0 \cap X=0 \cap X \in P_i)}{\mathbb{P}(X=0)}$$

$$\mathbb{P}(Y=0 \mid X=0) = \frac{\mathbb{P}(X \in P_3) + \mathbb{P}(X \in P_3)}{\mathbb{P}(X=0)} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}$$

► On traite la fin de l'exo de manière linéaire en se servant des résultats déjà obtenus. Pour vérification, les réponses aux questions c), d), e) sont respectivement 5/6, 4/5, 9/10.

Exercice n°13 :

►La loi de X_k est donnée par

$$\mathbb{P}(X_k = n) = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^n}$$

En effet, si $X_k = n$ on a juste à choisir la place des $k-1$ premiers piles parmi les $n-1$ premiers lancers.

► On remarque que comme les lancers sont tous identiques et indépendants, la loi de $X_k - X_{k-1}$ sachant X_{k-1} n'est autre que la loi de X_1, donc

$$\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid X_{k-1}) = \mathbb{E}(X_1)$$

d'où pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(X_k) = k \times \mathbb{E}(X_1) = k \times \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2k$$

De même, on trouve que

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(X_{k-1}^2) + 8k - 2 \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{E}(X_k^2) = 4k^2 + 2k$$

La variance est donc donnée par

$$\mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = 2k$$

► On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, comme pour $k \leq l$ on a $\{X_k = n\} \cap \{X_l = n\} = \emptyset$, l'union $\cup_{k>0}\{X_k = n\}$ est une union disjointe et

$$\mathbb{P}(\cup_{k>0} X_k = n) = \sum_{k>0} \mathbb{P}(X_k = n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(X_k = n) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{C_{n-1}^{k}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Exercice n°14 :

► Soit X une variable aléatoire dont la loi est une loi de Poisson de paramètre λ, on écrira $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, cela signifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Alors, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k+1)} = \frac{k+1}{\lambda}$$

La suite $x_k = \mathbb{P}(X = k)$, est donc croissante pour $k \leq \lambda - 1$ et décroissante pour $k \geq \lambda - 1$. On en déduit que la valeur la plus probable est $k = \lfloor \lambda \rfloor$

Exercice n°15 :

► Comme les tirages se font avec remise, on peut les supposer indépendants.
Alors pour $(k_1,...,k_r) \in \mathbb{N}^r$

$$\mathbb{P}(N_1 = k_1, N_2 = k_2, ..., N_r = k_r) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad \sum_{j=1}^r k_j \neq n \\ \frac{n!}{\prod_{j=1}^r k_j!} \prod_{j=1}^r p_j^{k_j} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Le vecteur N suit une loi multinomiale de paramètre $(n,p_1,...,p_r)$. Pour bien comprendre ce qu'est la vecteur N, une interprétation est la suivante. On note A_j l'ensemble des boules dont le numéro est j et on considère la variable X

$$X = (1_{A_1},...,1_{A_r})$$

Soit maintenant un n échantillon $(X^1,...,X^n)$ de loi celle de X, alors la variable

$$Y = \sum_{i=1}^n X^i$$

suit une loi multinomiale de paramétre $(n,p_1,...,p_r)$, on a donc $Y \sim N$. On peut à présent calculer facilement la moyenne et la variance de N :

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(Y) = n\mathbb{E}(X) = n(p_1,...,p_r)$$

La matrice de covariance des vecteurs X^i,X^j est

$$cov(X)_{ij} := cov(X^i,X^j) = \mathbb{E}(1_{A_i}1_{A_j}) - \mathbb{E}(1_{A_i})\mathbb{E}(1_{A_j}) = \begin{cases} p_i(1-p_i) \quad \text{si} \quad i = j \\ -p_ip_j \quad \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

Comme les vecteurs X^i sont indépendants, la matrice de covariance de Y donc de N s'écrit simplement

$$cov(N)_{ij} = n \times cov(X)_{ij}$$