Correction de la liste d'exercices n°4

Exercice n°1 :

► On considère le tableau suivant. Dans les cases $i = 1,2,...,k$, on donne la probabilité que le livre se trouve dans le $i^{ème}$ tiroir, dans la case 0, la probabilité que le livre ne se trouve pas dans la commode.

hors de la commode	premier tiroir	second tiroir	...	$k^{ième}$ tiroir
$1-p$	p/k	p/k	...	p/k

Soit X la variable aléatoire qui vaut 0 si le livre n'est pas dans la commode et k si le livre est dans le $k^{ième}$ tiroir.

► On ouvre les $(k-1)$ premiers tiroirs sans trouver le livre donc $X \neq 1,...,X \neq k-1$ alors

$$\mathbb{P}(X = k \mid X \neq 1,...,X \neq k-1) = \frac{\mathbb{P}(X = k \cap X \neq 1,...,X \neq k-1)}{\mathbb{P}(X \neq 1,...,X \neq k-1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0 \cup X = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = k)} = \frac{p/k}{(1-p) + p/k} = \frac{p}{k(1-p) + p}$$

► On ouvre les $(k-j)$ premiers tiroirs sans trouver le livre donc $X \neq 1,...,X \neq k-j$

$$\mathbb{P}(X = k \mid X \neq 1,...,X \neq k-j) = \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X \neq 1,...,X \neq k-j)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k-j+1}^{k} \mathbb{P}(X = k-j+1)} = \frac{p}{k(1-p) + j\,p}$$

Exercice n°2 :

► On note V pour vacciné, NV pour non vacciné, M pour malade, S pour sain. D'après les hypothèses,

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(V \mid M) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(NV \mid M) = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(M \mid V) = \frac{1}{12}$$

On a

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{\mathbb{P}(NV \cap M)}{\mathbb{P}(NV)} = \frac{\mathbb{P}(NV \mid M)\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{16}{15}\mathbb{P}(M)$$

Or

$$\mathbb{P}(M \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{1/4} = \frac{1}{12} \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(V \cap M) = 1/48$$

$$\mathbb{P}(V \mid M) = \frac{\mathbb{P}(V \cap M)}{\mathbb{P}(M)} = 1/5 \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(M) = \frac{5}{48}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{16}{15}\frac{5}{48} = \frac{1}{9}$$

► On peut estimer l'efficacité du vaccin en regardant

$$|\mathbb{P}(M \mid V) - \mathbb{P}(M \mid NV)| = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$$

C'est pas top...

Exercice n°3 :

► Il existe une bijection entre les tirages de n boules sans remise et les permutations de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$. Ces permutations forment un groupe, que l'on note $\mathfrak{S}_n$. Cette bijection s'exprime :

un tirage de n boules $\Leftrightarrow$ la suite des numéros dans l'ordre d'apparition

On considère l'évènement

$$A = \{\text{au moins jeton sort au rang indiqué par son numéro}\}$$

Son complémentaire est

$$A^c = \{\text{aucun jeton ne sort au rang indiqué par son numéro}\}$$

L'évènement correspondant à A^c via la bijection est $\{$on tire un élément de $\mathfrak{S}_n$ qui n'a pas de point fixe$\}$. Les éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui n'ont pas de points fixes sont appelés des dérangements. Notons D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Alors on a :

$$p_n = \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{D_n}{Card(\mathfrak{S}_n)} = 1 - \frac{D_n}{n!}$$

► Il nous faut maintenant calculer D_n. On utilise la formule du crible. Si U_i désigne l'ensemble des permutations de $\mathfrak{n}$ qui fixe l'élément i alors on a

$$D_n = n! - Card(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = n! - \sum_{\Omega \neq I \subset [|1,n|]} (-1)^{1+Card(I)}\, Card\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right)$$

Si $Card(I) = p$ alors $Card\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = (n-p)!$ et il y a C_n^p sous parties à p éléments dans $[|1,n|]$ donc

$$\sum_{\Omega \neq I \subset [|1,n|]} (-1)^{1+Card(I)}\, Card\left(\bigcap_{i \in I} U_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} C_n^p (n-p)! = n! \times \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p!}$$

Donc

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}$$

► Voici une autre méthode pour calculer D_n. Pour $n \geq 1$, on note P_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui possèdent k points fixes exactement. Il est clair que $\{P_0,...,P_n\}$ forme une partition de $\mathfrak{S}_n$ en particulier

$$n! = Card(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} Card(P_k)$$

On va voir que $Card(P_k) = C_n^k D_{n-k}$. En effet, $Card(P_0) = D_n$ et $Card(P_n) = 1 = C_n^n D_0$ car seule l'identité possède n points fixes. Pour $k \geq 1$, un élément de P_k est parfaitement déterminé par par le choix de ses points fixes (C_n^k possibilités) et par le choix de la permutation induite sur les $(n-k)$ éléments restants (D_{n-k} possibilités puisque cette permutation est un dérangement d'un ensemble à $(n-k)$ éléments). On a donc

$$n! = Card(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$$

ou encore

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{D_k}{k!}$$

Dans le membre de droite, on reconnait alors le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des deux séries $D(z) = \sum \frac{D_k}{k!} z^k$ et $e^z = \sum \frac{1}{k!} z^k$ Ces deux séries ont un rayon de convergence ≥ 1 donc pour $|z| < 1$

$$D(z)\, e^z = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad i.e \qquad D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

En développant en série, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{D_k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

► On a donc

$$p_n = 1 - \frac{D_n}{n!} = 1 - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} p_n = 1 - \frac{1}{e} := p_\infty$$

D'après le critère sur les séries alternées,

$$|p_n - p_\infty| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

► La probabilité $p_n(k)$ s'écrit exactement :

$$p_n(k) = \frac{Card(P_k)}{\mathfrak{S}_n} = \frac{C_n^k D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{k!}$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} p_n(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

► Une interprétation du modèle ci-dessus est la suivante : on organise une soirée où chacun invité apporte un cadeau puis au milieu de la soirée on redistribue les cadeaux au hasard, la situation idéale étant qu'aucun invité ne reçoive son propre cadeau. La réponse à la première question nous assure que , pour n assez grand, la situation idéale se réalise avec une probabilité $\simeq e^{-1} \simeq 0.3679$

Exercice n°4 :

► On note $p = \frac{n+1}{2n}$ et $q = 1 - p = \frac{n-1}{2n}$. Le gain après k tirages peut alors être condidéré comme une marche aléatoire $S_0 = 0 \qquad S_k = \sum_{m=1}^{k} X_m$ pour $k \geq 1$, où les X_m sont des variables indépendantes de loi

$$\mathbb{P}(X_m = 2) = p, \qquad \mathbb{P}(X_m = -3) = 1 - p$$

Soit $l \in \mathbb{Z}$, on considère l'événement $\{S_k = l\}$. On note a le nombre de montées et b le nombre de descentes de la marche sur l'événement $\{S_k = l\}$. Alors $a+b = k$ et $2a-3b = l$ donc $a = (3k+l)/5$. Le nombre de chemins de longueur k qui mènent à l est donc

$$C_k^{(3k+l)/5}$$

On conclut que

$$\mathbb{P}(S_k = l) = p^{(3k+l)/5}(1-p)^{(2k-l)/5}C_k^{(3k+l)/5}$$

► Bien entendu

$$\mathbb{E}(S_k) = k \times \mathbb{E}(X_1) = k \times (2p - 3q), \qquad var(S_k) = k \times var(X_1) = k \times (25pq)$$

Le jeu est équitable si $\mathbb{E}(S_k) = 0$ donc si $2p = 3q$, *i.e* $n = 5$.

Exercice n°5 :

► Les valeurs possibles pour S sont $\{0, 1+b, a-1, a+b\}$. La manière de tirer les boules n'étant pas précisée, on suppose que l'on procède selon la loi uniforme, dès lors

$$\mathbb{P}(S = 0) = \mathbb{P}(S = a-1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S = 1+b) = \mathbb{P}(S = a+b) = \frac{1}{6}$$

Alors

$$\mathbb{E}(S) = 0 \times 1/3 + (a-1) \times 1/3 + (1+b) \times 1/6 + (a+b) \times 1/6 = \frac{3a+2b-1}{6}$$

$$\mathbb{E}(S^2) = (a-1)^2 \times 1/3 + (1+b)^2 \times 1/6 + (a+b)^2 \times 1/6 = 18a^2 + 12b^2 - 24a + 12b + 12ab + 18$$

Donc

$$var(S) = \frac{9a^2 + 8b^2 - 18a + 16b + 17}{36} = \frac{9(a-1)^2 + 8(b+1)^2}{36}$$

D'où

$$\mathbb{E}(S) = 0 \Longleftrightarrow a = \frac{1-2b}{3}$$

et

$$\mathbb{E}(S) = 0 \quad \text{et} \quad var(S) \leq 4 \Longleftrightarrow a = \frac{1-2b}{3} \quad \text{et} \quad \frac{12(b+1)^2}{36} \leq 4$$

Finalement

$$\mathbb{E}(S) = 0 \quad \text{et} \quad var(S) \leq 4 \Longleftrightarrow a = \frac{1-2b}{3} \quad \text{et} \quad b \in \{0,1,2\}$$

Exercice n°6 :

Le dés reste un dés, les 6 faces sont équiprobables donc

$$\mathbb{P}(X_j = -2) = \frac{2}{6} \quad \mathbb{P}(X_j = -2) = \frac{3}{6} \quad \mathbb{P}(X_j = a) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X_j) = (-2) \times \frac{2}{6} + (1) \times \frac{3}{6} + (a) \times \frac{1}{6} = \frac{a-1}{6}$$

$$\mathbb{E}(X_j^2) = (-2)^2 \times \frac{2}{6} + (1)^2 \times \frac{3}{6} + (a)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{a^2+11}{6}$$

$$var(X_j) = \frac{5a^2+2a+65}{36}$$

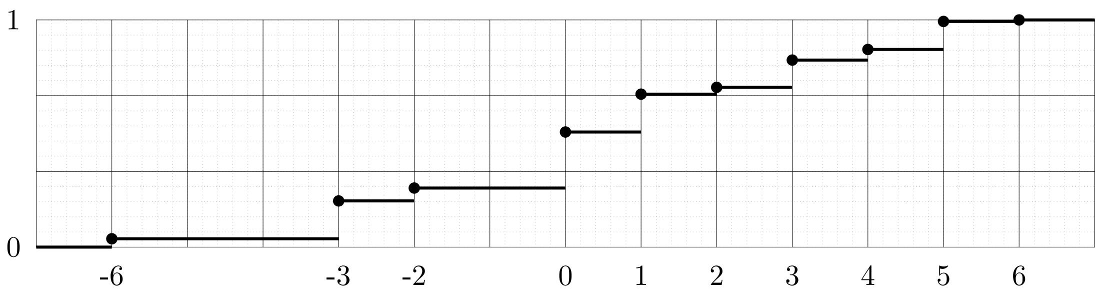
Les valeurs possibles pour la somme $X_1 + X_2 + X_3$ sont

$$\{-6, -3, -4+a, 0, 3, a-1, 2a-2, a+2, 2a+1, 3a\}$$

et les probabilités associées sont

k	-6	-3	$-4+a$	0	3	$a-1$	$2a-2$	$a+2$	$2a+1$	$3a$
$\mathbb{P}(X_1+X_2+X_3=k)$	1/27	1/6	1/18	1/4	1/8	1/6	1/36	1/8	1/24	1/216

Les moyennes et variances de la somme s'obtiennent comme somme des moyennes et variances en utilisant l'indépendance... La fonction de répartition de $X_1 + X_2 + X_3$ dans le cas où $a = 2$ est représentée ci dessous :



Exercice n°7 :

On note G le gain, les valeurs possibles pour G sont {1,2,3,4,5}. et les probabilités associées sont

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(G=k)$	1/120	15/120	36/120	40/120	23/120	5/120

En effet, le nombre de choix possibles pour le tirage des trois boules est $C_{10}^3 = 120$. Gagner 0 revient à tirer (3 rouges), pour cela, il n'y a qu'une seule possibilité. Gagner 1 revient à tirer (1 boule jaune et 2 boules rouges), pour cela, il y a $C_5^1 C_3^2 = 15$ possibilités. Gagner 2 revient à tirer (2 jaunes et 1 rouge) ou (1 verte et 2 rouges), il y a $C_5^2 C_3^1 + C_2^1 C_3^2 = 36$ possibilités. Gagner 3 revient à tirer (3 jaunes) ou (1 verte 1 rouge 1 jaune), soit $C_5^3 + C_2^1 C_3^1 C_5^1 = 40$ possibilités. Gagner 4 revient à tirer (2 vertes et 1 rouge) ou (1 verte et 2 jaunes), soit $C_2^2 C_3^1 + C_2^1 C_5^2 = 23$ possibilités. Enfin, gagner 5 revient à tirer (2 vertes et 1 jaune), soit $C_5^1 = 5$ possibilités.

On a

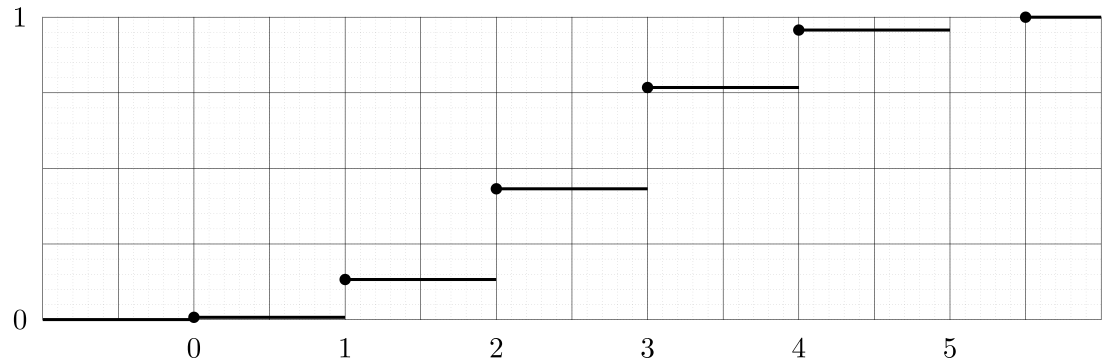
$$\mathbb{E}(G) = (0) \times \frac{1}{120} + (1) \times \frac{15}{120} + (2) \times \frac{36}{120} + (3) \times \frac{40}{120} + (4) \times \frac{23}{120} + (5) \times \frac{5}{120} = \frac{324}{120} = 2.7$$

$$\mathbb{E}(G^2) = (0)^2 \times \frac{1}{120} + (1)^2 \times \frac{15}{120} + (2)^2 \times \frac{36}{120} + (3)^2 \times \frac{40}{120} + (4)^2 \times \frac{23}{120} + (5)^2 \times \frac{5}{120} = \frac{1012}{120}$$

Donc

$$var(G) = \mathbb{E}(G^2) - \mathbb{E}(G)^2 = \frac{1012 \times 120 - 324^2}{120^2} = \frac{16464}{120^2} \sim 1.143$$

La fonction de répartition associée à G est



Exercice n°8 :

Soit X_i le résultat du $i^{ème}$ tirage. On note $X_i = 1$ si la boule est blanche, $X_i = 0$ si la boule est noire de sorte que N, le nombre de boules blanches tirées lors des trois tirages, est donné par $N = \sum_{i=1}^{3} X_i$. Les valeurs possibles pour N sont $\{0,1,2,3\}$. Pour $k = 0,1,2,3$ on a

$$\mathbb{P}(N = k) = \sum_{m,n=0}^{1} \mathbb{P}(N = k \mid X_1 = m, X_2 = n)\mathbb{P}(X_1 = m, X_2 = n)$$

Or, en regardant cas par cas, on trouve

$$\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{3}{5} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$$

ainsi que

$$\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{2}{5} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X_3 = 0 \mid X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\mathbb{P}(N = 1 \mid X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{3}{5} \qquad \mathbb{P}(N = 3 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(N = 2 \mid X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(N = 2 \mid X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(N = 0 \mid X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{2}{5} \qquad \mathbb{P}(N = 2 \mid X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(N=1 \mid X_1=0,X_2=1)=\frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(N=1 \mid X_1=1,X_2=0)=\frac{1}{2}$$

D'autre part, il est clair que

$$\mathbb{P}(N=k \mid X_1=m,X_2=n)=0 \qquad \text{si} \quad k<m+n \quad \text{où} \quad k-m+n>1$$

Il nous reste à déterminer $\mathbb{P}(X_1=m,X_2=n)$, pour cela on écrit

$$\mathbb{P}(X_1=m,X_2=n)=\mathbb{P}(X_2=n \mid X_1=m)\mathbb{P}(X_1=m)$$

On trouve ainsi que

$$\mathbb{P}(X_1=0,X_2=0)=\frac{4}{25} \qquad \mathbb{P}(X_1=0,X_2=1)=\frac{6}{25}$$

$$\mathbb{P}(X_1=1,X_2=0)=\frac{3}{10} \qquad \mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\frac{3}{10}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(N=0)=\mathbb{P}(N=0 \mid X_1=0,X_2=0)\mathbb{P}(X_1=0,X_2=0)=\frac{2}{5}\times\frac{4}{25}=\frac{8}{125}$$

$$\mathbb{P}(N=1)=\begin{cases} \mathbb{P}(N=1 \mid X_1=0,X_2=0)\mathbb{P}(X_1=0,X_2=0) \\ +\mathbb{P}(N=1 \ \mid X_1=0,X_2=1)\mathbb{P}(X_1=0,X_2=1) \\ +\mathbb{P}(N=1 \ \mid X_1=1,X_2=0)\mathbb{P}(X_1=1,X_2=0) \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{P}(N=1)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{25}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{25}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{183}{500}$$

$$\mathbb{P}(N=2)=\begin{cases} \mathbb{P}(N=2 \mid X_1=1,X_2=1)\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1) \\ +\mathbb{P}(N=2 \ \mid X_1=0,X_2=1)\mathbb{P}(X_1=0,X_2=1) \\ +\mathbb{P}(N=2 \ \mid X_1=1,X_2=0)\mathbb{P}(X_1=1,X_2=0) \end{cases}$$

donc

$$\mathbb{P}(N=2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{25}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{47}{100}$$

Enfin

$$\mathbb{P}(N=3)=\mathbb{P}(N=3 \mid X_1=1,X_2=1)\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)$$

$$\mathbb{P}(N=3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$$

On est content de vérifier que $\frac{8}{125}+\frac{183}{500}+\frac{47}{100}+\frac{1}{10}=1$!!!

On a donc

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(N=k)$	$8/125$	$183/500$	$47/100$	$1/10$

On déduit

$$\mathbb{E}(N)=\frac{803}{500}\sim 1.61, \qquad var(N)=\frac{141691}{500^2}\sim 0.57$$

Exercice n°9 :

▶ L'espace des épreuves est $\Omega = \{(i,j), i \neq j, i = 1...12, j = 1...12\}$, alors $|\Omega| = 12 \times 11 = 132$. Pour la suite, on pose $p = 2/132 = 1/66$. Les valeurs pour la somme S et la différence D sont respectivement $\{3,4,...,23\}$ et $\{1,2,...,11\}$. En examinant chaque cas, on peut déterminer, la loi de (S,D). On donne ici la loi sous forme de tableau où la valeur de la $k^{ième}$ ligne $l^{ième}$ colonne correspond à la probabilité $P(S = l, D = k)$

	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p
2	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0
3	0	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	0
4	0	0	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	0	0
5	0	0	0	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	p	0	p	0	p	0	p	0	p	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	p	0	p	0	p	0	p	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	p	0	p	0	p	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p	0	p	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	p	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pour vérification, la somme des éléments du tableau fait $66 \times p = 1$, c'est rassurant...

▶ On déduit à présent les lois de S et D :

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\mathbb{P}(S = k)$	p	p	$2p$	$2p$	$3p$	$3p$	$4p$	$4p$	$5p$	$5p$	$6p$	$5p$	$5p$	$4p$	$4p$	$3p$	$3p$	$2p$	$2p$	p	p

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbb{P}(D = k)$	$11p$	$10p$	$9p$	$8p$	$7p$	$6p$	$5p$	$4p$	$3p$	$2p$	p

▶ On déduit les moyennes et les variances :

$$\mathbb{E}(S) = 13, \qquad var(S) = \frac{65}{3}$$

$$\mathbb{E}(D) = \frac{13}{3}, \qquad var(D) = \frac{65}{9}$$

Enfin, en regardant sur le tableau (en rouge), on voit que

$$\mathbb{P}(S \times D = 48) = 2p = \frac{1}{33}$$

Le version avec remise de l'exo est laissée au lecteur...

Exercice n°11 :

▶ On note 1 pour rouge et 0 pour noir. On désigne par $Y_k \in \{0,1\}$ le résultat du $k^{ième}$ tirage. On veut montrer que $\mathbb{P}(Y_k = 1)$ ne dépend pas de k.

▶ Une première solution (naturelle) est de raisonner par récurence, il suffit alors de faire le calcul.

▶ Une deuxième solution plus efficace est la suivante :

On écrit

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \sum \mathbb{P}(Y_1 = u_1, Y_2 = u_2, ... ,Y_k = 1, ... ,Y_{n+r} = u_{n+r})$$

où la somme est faite sur les u_i valant 0 ou 1, n u_i valant 0, $r-1$ u_i valant 1. Or on remarque que chaque terme de la somme ci dessus ne dépend pas de k (on peut permuter les tous les 1 entre eux par exemple), il en découle que la somme elle même ne dépend pas de k donc $\forall k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{r}{n+r}$$

Exercice n°12 :

► Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{P}(X = k) = \alpha \times k$ pour $k = 1{,}2{,}3{,}6$. Alors

$$1 = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 6) = \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 6\alpha = 12\alpha$$

On a donc $\alpha = \frac{1}{12}$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{50}{12} \sim 4.17, \qquad E(X^2) = 21, \qquad var(X) = \frac{131}{36} \sim 3.64$$

$$\mathbb{E}(X^3) = \frac{697}{6} \sim 116.17$$

Par définition, le coefficient de corrélation est donnée par

$$\rho(X,(X-3)^2) = \frac{cov(X,(X-3)^2)}{\sqrt{var(X) \times var(X-3)^2}}$$

Or

$$\mathbb{E}[(X-3)^2] = 5, \qquad \mathbb{E}(X-3)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2, \qquad var(X-3)^2 \sim 3.64$$

$$\mathbb{E}(X(X-3)^2) \sim 116.17 - 6 * 21 + 9 * 50/12 \sim 27.67, \qquad \mathbb{E}(X)\mathbb{E}[(X-3)^2] = \frac{250}{12} \sim 20.83$$

$$cov(X,(X-3)^2) \sim 27.67 - 20.83 \sim 6.83$$

d'où

$$\rho \sim \frac{6.83}{\sqrt{3.64 \times 3.64}} \sim 0.52$$

Exercice n°14 :

On définit les variables X_i qui valent 1 si on écrit le jour i et 0 si l'on écrit pas. D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0) = 1$$

Le nombre de jour où l'on a écrit dans l'année est $S = \sum_{i=1}^{365} X_i$. Par linéarité

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(X_i)$$

Or ici

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1)\mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0)\mathbb{P}(X_{i-1} = 0)$$

$$i.e \qquad \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{i-1} = 0) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + 1 - \mathbb{P}(X_{i-1} = 1)$$

ou encore

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1)$$

Alors

$$E(S) = \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(X_i) = 365 - \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{365} \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) = 365 - \frac{1}{2}\mathbb{E}(S)$$

D'où

$$\mathbb{E}(S) = \frac{2}{3} \times 365 \sim 243$$

Exercice n°15 :

Soit $l \in \{1,...,k\}$, alors par indépendance

$$\mathbb{P}(Y \leq l) = \mathbb{P}(\max_{i=1...n} X_i \leq l) = \mathbb{P}(X_i \leq l, i = 1...n) = \left(\frac{l}{k}\right)^n$$

Alors

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{l \geq 0} \mathbb{P}(Y > l) = \sum_{l=0}^{k} \left(1 - \left(\frac{l}{k}\right)^n\right) = k + 1 - \frac{1 + 2^n + ... + k^n}{k^n}$$

En utilisant la symétrie, on a

$$\mathbb{P}(Y = X_j) = \frac{1}{n}$$

Enfin, on écrit

$$\mathbb{P}(Y = X_j = r) = \mathbb{P}(Y = r \mid X_j = r)\mathbb{P}(X_j = r) = \mathbb{P}(X_1 \leq r, ... , X_n \leq r \mid X_j = r)\mathbb{P}(X_j = r)$$

Par indépendance des X_i

$$\mathbb{P}(Y = X_j = r) = \left(\frac{r}{k}\right)^{n-1} \mathbb{P}(X_j = r) = \left(\frac{r}{k}\right)^{n-1} \frac{1}{k}$$

Exercice n°16 :

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,q)$ sont indépendantes alors la variable $Z = X + Y$ est binomiale si et seulement si $p = q$, dans ce cas $Z \sim \mathcal{B}(m + n,p)$