

LISTE D'EXERCICES 3

Exercice 1 :

Un urne contient des jetons numérotés, rouges ou noirs. Lors du tirage d'un jeton la probabilité d'en tirer un rouge est $3/5$; d'en tirer un de numéro impair est $2/3$; d'en tirer un rouge et pair est p . Que vaut la probabilité d'en tirer un noir impair? Pour quelles valeurs de p les événements "noir" et "impair" sont-ils indépendants?

Exercice 2 :

Montrer que 2 événements A et B sont indépendants si et seulement si A et B^c le sont, et si et seulement si A^c et B^c le sont.

Exercice 3 :

Un joueur X défie un joueur Y de prédire le résultat de 11 lancers successifs d'une pièce de monnaie usuelle. Quelle est la probabilité (en fonction de $n \in \{0, 1, \dots, 5\}$) que Y se trompe au plus n fois?

Exercice 4 :

Trois condamnés X, Y, Z sont informés que l'un d'eux, choisi au hasard, va être exécuté, et que les 2 autres vont être libérés. X demande au geolier de lui nommer l'un de ses 2 codétenus devant être libéré, arguant que cette information serait innocente, puisqu'il sait que l'un des 2 au moins doit l'être. Le geolier refuse, arguant que cette information modifierait réellement l'estimation que X peut faire de ses chances. Qui a raison?

Exercice 5 :

Soient X et Y deux individus dont les durées de vie sont indépendantes et sont telles que

$$\mathbb{P}(X \text{ vive encore 9 ans}) = 2/5, \quad \mathbb{P}(Y \text{ vive encore 9 ans}) = 3/5.$$

Calculer les probabilités que : a) X et Y vivent encore 9 ans; b) l'un des 2 au moins vive encore 9 ans; c) X seulement vive encore 9 ans; d) Y seulement vive encore 9 ans; e) X vive encore 9 ans sachant que l'un des 2 au moins vivra encore 9 ans.

Exercice 6 :

Vous allez chez des gens dont vous savez qu'ils ont 2 enfants, dont au moins une fille. a) Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille? b) En l'absence de l'information qu'ils ont au moins une fille (pour cette question seulement), mais en voyant une fille ouvrir la porte, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille? c) Une fille vous ouvre la porte; quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille? d) La fille qui vous a ouvert vous dit qu'elle est l'aînée des 2 enfants; quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille?

Exercice 7 :

On jette un dé normal $n \geq 3$ fois de suite. Montrer que les événements “les lancers j et k donnent le même résultat” sont deux à deux indépendants, mais non indépendants.

Exercice 8 :

Soit l'ensemble $\Omega := \{a, b, c, d\}$ et la tribu $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. On définit une probabilité \mathbb{P} sur \mathcal{F} par : $\mathbb{P}(\{a\}) = \alpha$, $\mathbb{P}(\{b\}) = \beta$, $\mathbb{P}(\{c\}) = \gamma$, $\mathbb{P}(\{d\}) = \delta \neq 0$. Trouver les valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ telles que les événements $A := \{b, c\}$, $B := \{c, a\}$, $C := \{a, b\}$ soient 2 à 2 indépendants mais non indépendants.

Exercice 9 :

Deux routes relient les villes A et B , et trois routes relient les villes B et C . Chacune de ces 5 routes est bloquée avec probabilité p , indépendamment des autres. a) Quelle est la probabilité qu'on puisse aller de A à B , sachant qu'on ne peut pas aller de A à C ? b) Même question lorsqu'existe de plus une 6-ème route, directe de A à C (toujours blocable indépendamment avec proba p).

Exercice 10 :

Une urne contient b boules blanches et n boules noires. Quand une boule est tirée, on le remet dans l'urne, avec ℓ boules de la même couleur. On effectue ainsi 3 tirages au hasard. a) Quelle est la probabilité que la 1ère boule tirée soit noire sachant que la seconde est blanche? b) Quelle est la probabilité que la 3ème boule soit noire?

Exercice 11 :

Vous attendez un ami de Vancouver, qui voyage jusqu'à Strasbourg avec changement d'avion à New York, Londres et Francfort. La probabilité d'attentat est estimée à p pour chacun des 4 vols, avec indépendance entre les 4 vols. Votre ami n'arrivant pas, quelle est la probabilité que l'attentat ait eu lieu : a) dans le 1er avion? b) dans le 2ème avion? c) dans le 3ème avion? c) dans le 4ème avion?

Exercice 12 :

Au cours d'un jeu illimité de pile ou face avec $\mathbb{P}(\text{pile}) = p$, on note X_k le rang de la k ème apparition de “pile”. Calculer la loi de X_k , son espérance et sa variance. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N}^*, X_k = n)$.

Exercice 13 :

Quelle est la valeur la plus probable pour une variable aléatoire poissonnienne de paramètre λ ?

Exercice 14 :

On effectue n tirages indépendants avec remise dans une urne contenant une proportion p_j de boules marquées j , pour $1 \leq j \leq r$, $r > 1$ étant fixé. On note N_j le nombre de boules marquées j qu'on tire ainsi. Préciser la loi du vecteur $N := (N_1, \dots, N_r)$, et calculer l'espérance et la variance de N_j , la covariance de N_j et N_k , et le nombre moyen de j tels que $N_j = 0$.