Liste d'exercices 4

Exercice 1 :

Un livre a une probabilité $p > 0$ de se trouver dans une commode comportant k tiroirs, et des chances égales de se trouver dans chacun des tiroirs. *i*) On ouvre les $(k-1)$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? *ii*) Soit $j \in \{2, \ldots, k-1\}$. On ouvre les $(k-j)$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des j derniers tiroirs ?

Exercice 2 :

Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 3 :

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n, qu'on tire tous 1 à 1, sans remise. Calculer $p_n := \mathbb{P}(\text{au moins un jeton sorte au rang indiqué par son numéro})$, sa limite p_∞, et majorer $|p_n - p_\infty|$.

Exercice 4 :

Une urne contient $(n+1)$ boules vertes et $(n-1)$ boules rouges. On tire une boule, et on gagne 2 euros si elle est verte, on en perd 3 sinon. *i*) Préciser la loi de ce gain (à valeurs dans $\mathbb{Z}$), son espérance et sa variance. Pour quels n le jeu est-il équitable ? *ii*) On rajoute 2 boules jaunes dans l'urne, et on recommence le tirage, sans remise, jusqu'à l'obtention de la première boule non jaune. Mêmes questions que ci-dessus.

Exercice 5 :

Une urne contient une boule marquée 1 et une marquée a, et une autre urne contient deux boules marquées -1 et une marquée b. On tire une boule dans chaque urne, et on note S la somme des deux nombres ainsi obtenus. Donner sa loi et sa variance, et préciser quels sont les couples d'entiers relatifs (a, b) tels que $\mathbb{E}[S] = 0$, puis tels que $\mathbb{E}[S] = 0$ et $var(S) \leq 2$.

Exercice 6 :

Un dé a ses faces marquées $-2, -2, 1, 1, 1, a$. Soit X_j le résultat du $j$ème lancer. Préciser la loi, l'espérance et la variance de X_j , ainsi que celles de $X_1 + X_2 + X_3$. Représenter la fonction de répartition de $X_1 + X_2 + X_3$ lorsque $a = 2$.

Exercice 7 :

Une urne contient 2 boules vertes, 5 boules jaunes et 3 boules rouges. On tire 3 boules simultanément, et on gagne 2 euros par boule verte, 1 euro par boule jaune, et rien par boule rouge. Calculer la loi, l'espérance et la variance du gain ainsi obtenu, et tracer sa fonction de répartition.

Exercice 8 :

Dans une urne se trouvent 3 boules blanches et 2 boules noires. On tire successivement 3 boules, avec remise pour les noires et sans remise pour les blanches. Calculer la loi, l'espérance et la variance du nombre X de boules blanches ainsi tirées.

Exercice 9 :

Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On tire successivement 2 boules sans remise, et on note S la somme des 2 numéros ainsi tirés et D leur différence (en valeur absolue). $i)$ Calculer successivement : la loi de (S, D), les espérances de S et de D, leur variances, et $\mathbb{P}(S \times D = 48)$. $ii)$ Mêmes questions pour un tirage avec remise.

Exercice 10 :

On tire successivement 3 jetons d'un sac en contenant n, numérotés de 1 à n, et on note X le numéro du 3ème. Préciser la loi, l'espérance et la variance de X, lorsqu'on tire avec remise, puis lorsque l'on tire sans remise.

Exercice 11 :

Une variable aléatoire X prend les valeurs $k \in \{1, 2, 3, 6\}$, avec probabilité proportionnelle à k. Préciser la loi de X, son espérance, sa variance, et le coefficient de corrélation linéaire entre X et $(X - 3)^2$.

Exercice 12 :

Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Calculer la loi, l'espérance et la variance du du nombre d'essais ncéssaires. Même question si on réessaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir écarté la précédente.

Exercice 13 :

Vous écrivez chaque jour avec probabilité 1 si vous n'avez pas écrit la veille, et avec probabilité 1/2 sinon. Montrez que vous écrivez ainsi en moyenne 243 lettres par an.

Exercice 14 :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et uniformément réparties sur $\{1, \ldots, k\}$. Soient $Y := \max\{X_1, .., X_n\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, et $r \in \{1, \ldots, k\}$. Calculer la loi et l'espérance de Y, puis $\mathbb{P}(Y = X_j)$ et $\mathbb{P}(Y = X_j = r)$.

Exercice 15 :

Quand la somme de 2 variables aléatoires binomiales indépendantes est-elle binomiale ?

Exercice 16 :

Soient $X_1, \ldots, X_n$ n v.a. indépendantes, X_j étant poissonnienne de paramètre λ_j. Calculer la loi, l'espérance et la variance de X_j sachant $X_1 + \ldots + X_n$.