Liste d'exercices 4 bis

Exercice 1 :

Deux boules sont peintes, soit en rouge soit en noir, au hasard ; chaque boule est peinte indépendamment de l'autre, la couleur noire ayant une chance sur deux d'être utilisée. Les deux boules sont placées dans une urne.

a) On apprend que la couleur rouge a été utilisée, donc qu'au moins une des boules est rouge. Déterminer la probabilité conditionnelle que les deux boules soient rouges.

b) L'urne est renversée et une boule rouge en sort. Quelle est alors la probabilité conditionnelle que les deux boules soient rouges ?

c) Pourquoi les deux résultats sont-ils différents ?

Exercice 2 :

Un candidat doit passer un concours pour entrer dans une grande école. On suppose que 20% seulement des candidats sont vraiment compétents, que parmi les candidats compétents, 80% seront admis au concours, et que parmi les candidats incompétents, 25% seront admis au concours. Calculer

a) la probabilité qu'un reçu au concours soit vraiment compétent ;

b) la probabilité qu'un recalé au concours soit vraiment incompétent.

Exercice 3 :

On modélise le temps qu'il fait à Strasbourg de la façon suivante : s'il fait beau le $n-$ième jour, alors la probabilité qu'il fasse beau le $(n+1)-$ième jour est $1/2$; s'il pleut le $n-$ième jour, alors la probabilité qu'il fasse beau le $(n+1)-$ième jour est $1/4$. On démarre au jour 0, où il pleut.

a) Calculer la probabilité qu'il pleuve le jour 2.

b) Sachant qu'il pleut le jour 2, calculer la probabilité qu'il ait plu le jour 1.

c) On note p_n la probabilité qu'il pleuve le jour n. Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n, et déterminer la valeur de p_n. La suite p_n converge-t-elle ?

Exercice 4 :

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

a) Quel est la valeur la plus probable pour une variable aléatoire $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$?

b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.

c) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires de lois binomiales $\mathcal{B}(n, p_n)$ où la suite p_n vérifie $n \times p_n \to \lambda > 0$. Montrer que la suite X_n converge en loi vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.