Liste d'exercices 5

Exercice 1 :

Pour aller travailler un homme prend un bus de la ligne A, qui passe devant chez lui entre 7h30 et 7h40, avec loi uniforme dans cette plage horaire. a) S'il arrive à 7h30, combien de temps devra-t-il attendre en moyenne, et avec quelle variance ? b) Si la ligne B lui convient aussi et fait également et indépendamment passer un bus avec la même loi entre 7h30 et 7h40, quel est son temps moyen d'attente (à partir de 7h30) ? c) S'il arrive à 7h36, quelle est sa probabilité d'avoir un bus avant 7h40 ?

Exercice 2 :

Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. Pour $p \in]0,1[$, on pose $G(p) := \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq p\}$.
a) Justifier l'existence dans $\mathbb{R}$ de $G(p)$.
b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ G(F(x)) \leq x$.
c) Montrer que $(\forall p \in]0,1[),\ F(G(p)) \geq p$.
d) Montrer que $G(p) \leq x \Leftrightarrow F(x) \geq p$.
e) Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $G(U)$ admet F pour fonction de répartition.
f) Que vaut G lorsque F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$?

Exercice 3 :

Pour être en cours à 8h, un étudiant en voiture a le choix entre un trajet sur petite route, dont la durée (en minutes) X suit la loi normale de moyenne 35,2 et de variance 25, et un trajet sur autoroute, dont la durée Y suit la loi normale de moyenne 40 et de variance 4. Il désire arriver à l'heure. Quel trajet doit-il préférer s'il part à 7h15 ? Et s'il part à 7h30 ?

Exercice 4 :

a) Montrer que si X est une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre λ, alors elle vérifie la propriété de non-vieillissement : pour tous $s,t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$. b) Réciproquement, montrer que si une v.a.r. $Y > 0$ vérifie la propriété de nonvieillissement et admet une densité continue en 0, alors sa loi est exponentielle. c) Quelles sont les v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifient la propriété de non-vieillissement ?

Exercice 5 :

Soient U, V, W 3 v.a. indépendantes uniformes sur $[0,1]$. a) Montrer que $\mathbb{P}(U \neq V \neq W \neq U) = 1$. Notons $X < Y < Z$ les 3 variables U, V, W rangées par ordre croissant b) Trouver les fonctions de répartition et les densités des variables X, Y, Z .

Exercice 6 :

Soient X_1, X_2 2 v.a.r. indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1, λ_2. a) Calculer les lois de $m := \min\{X_1, X_2\}$, $M := \max\{X_1, X_2\}$. b) Supposant que $\lambda_1 = \lambda_2$, montrer que m et $M - m$ sont des variables indépendantes.

Exercice 7 :

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de densité respectives f, g , avec

$$f(x) = 1_{x>0} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^n e^{-\lambda x}, \quad g(y) = 1_{y>0} \lambda e^{-\lambda y}.$$

Calculer la densité de $X + Y$, $\mathbb{E}(X + Y)$, et $var(X + Y)$.

Exercice 8 :

3016 mathématiciens sont invités à un colloque ; en moyenne un sur 4 répondra favorablement, et les réponses sont supposées indépendantes les unes des autres. Combien les organisateurs doivent-ils prévoir de places, afin que la probabilité de ne pas en manquer soit supérieure à $0,99$?

Exercice 9 :

Une compagnie assure 10000 clients sur la vie, qui payent chacun une prime annuelle de A euros. On estime que chaque client a une probabilité de décés au cours d'une année égale à $6/1000$, indépendamment les uns des autres. La prime de décès est de B euros. a) Quelle est la loi du nombre annuel des décès ? Comment peut-on l'approcher ? b) Si $B = 1000$, pour quels A la compagnie a-t-elle une probabilité $< 1/100$ d'être en déficit ? c) Si $A = 15$, pour quels B la compagnie a-t-elle une probabilité $> 0,7$ de faire un bénéfice annuel > 50000euros ?

Exercice 10 :

Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a.i.i.d. de loi commune $B(p)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n := X_n \times X_{n+1}$ et $S_n := (Y_1 + .. + Y_n)/n$. Calculer la loi et l'espérance de Y_n , puis la covariance de Y_n et de Y_{n+k}. Calculer l'espérance de S_{2n} et montrer que S_n converge en probabilité vers p^2.

Exercice 11 :

Soit $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ une suite de v.a.i.i.d. de fonction de répartition commune F. On suppose que F vérifie $\lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) = \lim_{x\to+\infty} xF(-x) = 0$. On pose $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, et $m_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Montrer que M_n/n et m_n/n convergent en probabilité vers 0.

Exercice 12 :

Montrer qu'une suite $(X_n,\ n \in \mathbb{N})$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si la suite $\left(\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right]\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

Exercice 13 :

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes et ont la même loi (laquelle ?). Calculer la densité de X/Y.

Exercice 14 :

Calculer les transformées de Fourier (fonctions caractéristiques) des lois usuelles suivantes : géométriques, binomiales, Poisson, uniformes, exponentielles.