UNIVERSITÉ DE GENÈVE — Section de Mathématiques
Faculté des sciences — 17 septembre 2009

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 1

Exercice 1. Montrer qu'il y a distributivité entre l'union et l'intersection d'ensembles :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 2. Montrer que :

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^C = \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^C$$

Exercice 3. Soit $\mathcal{T}$ une tribu et A un élément de $\mathcal{T}$.
Montrer que $\{A \cap B, B \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur A.

Exercice 4. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Quelle est la tribu engendrée par $\{1, 3, 6\}$?

Exercice 5. Démontrer les affirmations suivantes :

1. Soit $\mathcal{F}$ une tribu, si $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.
2. Si $\mathcal{F}_i$, $i \in I$, est une famille de tribus sur Ω, alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ est également une tribu.

Exercice 6. On considère un jeu de cartes ordinaire (52 cartes). Un as vaut 10 point, un roi 5, une dame 3, un valet 1 et toutes les autres cartes valent 0 points. Vous tirez deux cartes. Décrire un espace probabilisé correspondant et donner la probabilité que la valeur de vos deux cartes soit impaire.

Exercice 7. On veut démontrer ici la formule de Stirling :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$$

Pour cela on considère la suite :

$$a_n = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) + \frac{1}{2} \log n$$

1. On note A_k le trapèze reliant les points $(k, 0)$, $(k, \log k)$, $(k+1, \log(k+1))$ et $(k+1, 0)$ et B_k le trapèze de base $k - \frac{1}{2} < x < k + \frac{1}{2}$, de cotés verticaux et de coté supérieur la tangente à la courbe $y = \log x$ au point $(k, \log k)$. Montrer que a_n est égale à la somme des aires des A_k et que $a_n - \frac{1}{2} \log n$ est égale à la somme des aires des B_k. En déduire que :
$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x \, dx \leq a_n \leq \int_{1}^{n} \log x \, dx$$
.
2. On pose $\delta_n = \log n! - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n$. Montrer que δ_n tend vers une limite $\log c$ telle que $\frac{3}{2}\left(1 - \log \frac{3}{2}\right) \leq \log c \leq 1$.
3. En admettant que $c = \sqrt{2\pi}$, conclure.