UNIVERSITÉ DE GENÈVE — Section de Mathématiques

Faculté des sciences — À préparer pour le 10 décembre 2009

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE

Série 11

Exercice 1. *Théorème limite central pondéré*

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables réelles *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0,1)$. En calculant la fonction caractéristique de son terme général, étudier la convergence en loi de la suite :

$$Y_n := \frac{nX_1 + (n-1)X_2 + \ldots + X_n}{n\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. On veut estimer une intégrale $I := \int_0^1 g(x)\,dx$ où $0 \leq g(x) \leq 1$. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On définit alors trois variables U, V, W de la façon suivante :

$$U := \mathbf{1}_{Y\leq g(X)}, \quad V := g(X), \quad W := \frac{1}{2}\left(g(X) + g(1-X)\right).$$

1. Montrer que U, V et W sont des estimateurs sans biais de l'intégrale I.
2. Classez ces estimateurs en fonction de leur variance.

Exercice 3. *Sondage à la sortie des urnes*

Lors d'un référendum avec deux réponses possibles (0 ou 1), on fait un sondage à la sortie des urnes pour prédire le résultat final avant que tous les bulletins ne soient dépouillés. À cette fin, on demande à n personnes pour qui ils ont voté lorsqu'ils sortent de l'isoloire ; on récolte ainsi des données $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Soit p la proportion (inconnue) d'électeurs ayant voté 1 dans la population totale. Un modèle naturel (quoique simpliste) pour décrire le vote consiste à supposer que les électeurs font le choix 0 avec probabilité $1-p$ et le choix 1 avec probabilité p, autrement dit que les x_i sont des réalisations de variables indépendantes X_i de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

1. Montrer que si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $var(X) \leq 1/4$;
2. En vous inspirant de la loi des grands nombres, construire à partir des x_i un estimateur consistant $\widehat{p}_n$ du paramètre p ;
3. On souhaite donner une fourchette de largeur $\alpha = 2\%$ pour le paramètre p avec une certitude de $98\% = 1-\alpha$, c'est-à-dire trouver un intervalle (aléatoire) $I_\alpha = [c_\alpha, d_\alpha]$ avec $|d_\alpha - c_\alpha| \leq 2\%$ tel que $\mathbb{P}\left(p \in I_\alpha\right) \geq 1-\alpha$. En utilisant les questions précédentes et le théorème limite central, montrer que cela est possible pourvu que n est assez grand.

Exercice 4. *Contrôle de fiabilité*

Dans une usine fabriquant des composants électriques, on veut s'assurer que des résistances ont une durée de vie suffisament grande pour pouvoir être commercialisées. On prélève n résistances de la chaîne de production et on mesure leur durée de vie dans un circuit test. On récolte ainsi des données $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. La durée de vie des résistances peut être modélisée par une variable aléatoire de loi expontentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ où λ est un paramètre inconnu. Autrement dit, on peut supposer que les x_i sont des réalisations de variables indépendantes X_i, de loi expontentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. À partir de la loi des grands nombres, construire un estimateur consistant $\widehat{\lambda}_n$ du paramètre λ ;
2. En supposant que n est assez grand et en utilisant le théorème limite central, donner un intervalle de confiance I de largeur 2% tel que $\mathbb{P}\left(\lambda \in I\right) \geq 99\%$.