PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 2

Exercice 1. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$. Montrer que

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n).$$

Indication : procéder par récurrence sur n.

Exercice 2. On appelle dérangement d'un ensemble A toute permutation des éléments de A telle qu'aucun élément n'est envoyé sur lui-même.

1. En utilisant le résultat précédent, montrer que le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ ($n \ge 1$) est égal à $[n!/e]$, où $[x]$ représente l'entier le plus proche de x. La fonction $[n!/e]$ est appellée sous-factorielle de n et notée $!n$.
   Indication : Considérer l'ensemble P de toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$, et les ensembles A_i, $i = 1, \ldots, n$, de toutes les permutations laissant i fixe. Montrer que le nombre de dérangements est égal à $|P| - |\bigcup_i A_i|$.

2. Voici l'illustration classique du résultat précédent : le problème des chapeaux. Le responsable du vestiaire de l'Opéra de Genève reçoit un soir 100 chapeaux à garder. À la fin du spectacle, il décide de redistribuer les chapeaux au hasard (c'est-à -dire avec la distribution uniforme) lorsque ces 100 personnes viennent les lui réclamer. Quelle est la probabilité qu'aucune d'entre elles ne reparte avec son chapeau ?

Exercice 3. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, soit $K_{m,n} = (V, E)$ le graphe simple dont l'ensemble des sommets est constitué de deux sous-ensembles disjoints A et B tels que $V = A \cup B$, $|A| = m, |B| = n$, et dont les $m \cdot n$ arrêtes relient chacune un sommet de A à un sommet de B. (On appelle $K_{m,n}$ un graphe bipartite complet.)
Soient maintenant n et m deux entiers positifs ($n, m > 1$) tels que $m \ge 2 \log_2 n$. Montrer qu'il est possible de colorier chaque arrête de $K_{n,n}$ en rouge ou bleu de telle sorte qu'aucun sous-graphe $K_{m,m}$ monochromatique (soit entièrement rouge, soit entièrement bleu) de $K_{n,n}$ ne soit formé.
Indication : Travailler avec la mesure uniforme sur l'ensemble des 2-coloriages de $K_{n,n}$ et décrire la probabilité de l'événement complémentaire.
Remarque : Une autre formulation de ce résultat consiste à dire que si $m \ge 2 \log_2 n$, alors il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ telle qu'aucun de ses mineurs de taille $m \times m$ n'est constitué uniquement de 0 ou de 1. Or on ne sait pas construire une telle matrice lorsque n est grand, bien que cette méthode probabiliste nous prouve son existence. La meilleure construction (algorithmique) connue permet d'obtenir une matrice $n \times n$ dont aucun mineur de taille $m = cste \cdot \sqrt{n}$ n'est homogène... c'est beaucoup moins bon que la borne obtenue ici !

Exercice 4. (Lemme 2.2.8) Vérifier que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F_{\mathbb{P}}(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$$

est une fonction de répartition.

Indication : pour démontrer la continuité à droite, utiliser le Lemme 2.1.2 du cours.

Exercice 5. Une pièce de monnaie truquée est lancée n fois, $\mathbb{P}(\text{pile}) = p$. Quelle est la probabilité qu'au n-ième lancer

1. pile apparaît pour la première fois ?
2. le nombre de pile est égal au nombre de face ?
3. pile est apparu exactement deux fois ?
4. pile est apparu au moins deux fois ?

Exercice 6. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de répartition est au plus dénombrable.

Exercice 7. *Paradoxe de Bertrand.*
On considère un cercle de centre O et le triangle équilatéral inscrit dans celui-ci. On veut déterminer la probabilité qu'une corde AB tirée au hasard ait une longueur supérieure au côté du triangle. On propose 3 façons de procéder.
1. On tire indépendemment deux points A et B au hasard le long du cercle (c'est-à-dire uniformément).
2. On choisit une direction au hasard, ce qui revient à tirer au hasard un point C du cercle. On tire alors au hasard un point P le long du segment OC. La droite perpendiculaire à OC passant par P intersecte le cercle en 2 points A et B.
3. On tire un point C au hasard à l'intérieur du cercle. A et B sont les deux points du cercle tels que C se trouve au milieu du segment AB.
Déterminer la probabilité que la corde soit plus longue que le côté du triangle inscrit.
(Conseil : faire des dessins et réfléchir ; on peut à chaque fois déterminer la probabilité sans faire de calculs !)
Que vous inspire le résultat ?

Exercice 8. 12 personnes doivent effectuer au même moment un trajet, et disposent pour cela de 3 voitures, comportant respectivement 6, 4 et 2 places. De combien de façons peut-on les répartir dans ces voitures...
a) ...si toutes ont le permis de conduire ?
b) ... si 4 seulement ont le permis de conduire ?