PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 3

Exercice 1. Soient A, B deux événements indépendants. Montrer que A et B^c sont indépendants, et A^c et B^c sont indépendants.
Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_n$ sont indépendants, montrer que

$$B_1, \ldots, B_n,$$

où $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$, sont aussi indépendants.

Exercice 2. On tire deux fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. Considérer les 3 événements suivants :

$$A_1 = \{\text{Le premier jet donne "pile"}\}, \quad A_2 = \{\text{Le second jet donne "pile"}\},$$
$$A_3 = \{\text{Les résultats des 2 jets coïncident}\}.$$

Montrer qu'ils sont indépendants deux à deux. Forment-ils une famille indépendante ?

Exercice 3. Montrer par des exemples que l'indépendance conditionnelle de deux événements A et B étant donné un événement C n'implique pas, ni n'est impliquée, par l'indépendance de A et de B.

Exercice 4. Une urne contient des boules numérotées, rouges ou noires. Lors d'un tirage, la probabilité de tirer une boule rouge est $3/5$; d'en tirer une de numéro impair est $2/3$; d'en tirer une rouge et de numéro pair est p.

1. Que vaut la probabilité d'en tirer une noir impair ?
2. Pour quelles valeurs de p les évènements "noir" et "impair" sont-ils indépendants ?

Exercice 5. Une urne contient b boules blanches et n boules noires. Quand une boule est tirée, on la remet dans l'urne, avec ℓ boules de la même couleur. On effectue ainsi 3 tirages au hasard.

1. Quelle est la probabilité que la 1ère boule tirée soit noire sachant que la seconde est blanche ?
2. Quelle est la probabilité que la 3ème boule soit noire ?

Exercice 6. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?

Exercice 7. Un livre a une probabilité $p > 0$ de se trouver dans une commode comportant k tiroirs, et des chances égales de se trouver dans chacun des tiroirs.

1. On ouvre les $(k-1)$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ?
2. Soit $j \in \{2, .., k-1\}$. On ouvre les $(k-j)$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des j derniers tiroirs ?

Exercice 8. *Problème de Monty-Hall*
Lors d'un jeu télévisé, un candidat doit désigner une porte parmi trois. Derrière l'une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres une chèvre ; les trois cas possibles sont équiprobables. Lorsque le candidat a choisi une porte, le présentateur ouvre l'une deux des autres, qui cache une chèvre. Le candidat peut alors : soit maintenir son choix, soit changer de porte. Que doit-il faire pour gagner la voiture ?

1. Intuitivement, comment répondez-vous à la question ?
2. Formalisons le problème. On résume l'ensemble des situations possibles par le tableau ci-dessous (sans perte de généralité, on considère ici que le candidat désigne initialement la porte I) :

	I	II	III	le présentateur ouvre...
situation 1	chèvre	chèvre	voiture	II
situation 2	chèvre	voiture	chèvre	III
situation 3	voiture	chèvre	chèvre	II
situation 4	voiture	chèvre	chèvre	III

   (a) Parmi les 4 situations possibles, lesquelles ont une probabilité décrite explicitement par l'énoncé du problème ?

   (b) Si l'on note $\Omega = \{situation1, situation2, situation3, situation4\}$, quelle est donc la tribu naturelle sur laquelle une mesure de probabilité est définie a priori ? Commentez.

   (c) Dans le cas où la voiture se trouve derrière la porte I, on dit que le présentateur choisit la porte II avec probabilité p et la porte III avec probabilité $1-p$. En conditionnant sur la porte ouverte par le présentateur, calculez la probabilité de gagner la voiture en changeant de porte. Qu'en déduisez-vous ?