# PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
## Série 4

**Exercice 1.**
Soient $F$ et $G$ deux fonctions de répartition, et $0 \leq \lambda \leq 1$.

1. Montrer que $\lambda F + (1-\lambda)G$ est aussi une fonction de répartition.
2. Est-ce que leur produit $FG$ est une fonction de répartition ?

**Exercice 2.**
Soient $0 < p < 1$ et $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire telle que :

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ :

$$\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n\,;$$

2. Montrer que la variable $X$ vérifie la propriété d'absence de mémoire (on dit aussi de "non-vieillissement") :

$$\mathbb{P}(X > n+m \,|\, X > m) = \mathbb{P}(X > n), \quad \forall\, n,\, m \in \mathbb{N}^*\,;$$

3. Y a-t-il d'autres lois sur $\mathbb{N}^*$ qui vérifient cette propriété ?
*Indication : Soit $Y$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie la propriété de non-vieillissement. Considérer la fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ tq*

$$F(n) = -\ln(\mathbb{P}(Y > n))$$

*Montrer que F(n+m)=F(n)+F(m), puis poser $1-p = e^{-F(1)}$...*

**Exercice 3.**
Soient $0 < p < 1$ et $r$ un entier supérieur ou égal à 1. On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit une loi de Pascal de paramètres $(r, p)$ si $X$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k, \quad \forall\, k \geq 0$$

Vérifier que la loi de $X$ est bien une loi de probabilité, *i.e.* que

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

*Indication : on pourra procéder par récurrence sur $r \geq 1$ en dérivant la série par rapport à $p$.*

**Exercice 4.**
Montrer le lemme 3.2.3 du cours, i.e. montrer que la loi hypergéométrique, de fonction de masse

$$f_{hyp}(k) = \binom{b}{k}\binom{N-b}{n-k}/\binom{N}{n} \quad k \in \{0, ..., b\}$$

tend vers une loi binomiale, de fonction de masse

$$f_{binom}(k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad k \in \{0, ..., n\}$$

lorsque $N, b \to \infty$ et $b/N \to p$

**Exercice 5.**
Soient $X \sim Pascal(n, p)$ et $Y \sim Binom(n + k, p)$.
Montrer que

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(Y \geq n)$$

**Exercice 6.**
Soient $X \sim Poisson(\lambda)$ et $Y \sim Poisson(\nu)$ deux variables aléatoires indépendantes.
Montrer que leur somme $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \nu$.