UNIVERSITÉ DE GENÈVE — Section de Mathématiques
Faculté des sciences — 21 octobre 2009

PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 5

Exercice 1. *Développement diadique*
Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On écrit son développement diadique (c'est-à-dire en base 2) $U = 0.X_1X_2\dots$ (en choisissant celui qui est fini dans le cas où U s'écrit $n2^{-k}$ avec n, k entiers positifs). Montrer que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Exercice 2. *Loi exponentielle et radioactivité*
La durée de vie d'un atome quelconque d'un élément radioactif est une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle dont le paramètre $\lambda > 0$ est la constante de désintégration. A l'origine des temps t = 0, il existe n atomes et les comportements des différents atomes sont indépendants.

1. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_k(t)$ pour que, dans l'intervalle de temps $[0, t]$, k atomes exactement se désintègrent.
2. Soit la variable aléatoire X_t représentant le nombre de désintégrations observées sur $[0, t]$. En conditionnant sur la valeur de X_t, montrer que
$$\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t = k) = \mathbb{P}(X_s = k)$$
3. Calculer $\mathbb{E}(X_t)$.
4. Soit Y la variable aléatoire représentant le temps de la première désintégration. Calculer la fonction de répartition de Y, puis vérifier que Y satisfait la propriété de non vieillissement.

Exercice 3. *Variables aléatoires indépendantes*
Montrer le lemme 3.4.1 du cours dans le cas de v.a. discrètes : La famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires est indépendante si et seulement si les événements $(X_i \le x_i)_{i\in J}$, sont indépendants pour tout $x_i \in \mathbb{R}$, $i \in J$, et tout $J \subset I$ fini.

Introduction aux deux exercices qui suivent
La physique quantique nous enseigne qu'à l'échelle atomique, les niveaux d'énergie des particules élémentaires sont quantifiés, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas à valeurs dans un intervalle (par ex. $]0, +\infty[$), mais dans un ensemble discret (par ex. un sous ensemble fini de $\mathbb{N}^*$). L'objet de la mécanique statistique est de comprendre le comportement moyen de systèmes de $N >> 1$ telles particules en interaction.

Exercice 4.
La mécanique statistique classique s'appuie sur le modèle statistique de Maxwell, dans lequel les N particules considérées sont réparties parmi n états, dont n_j ont un niveau d'énergie e_j , de sorte que $n = n_1 + \dots + n_d$. Soit N_j le nombre de particules ayant le niveau d'énergie e_j, de sorte que $N = N_1 + \dots + N_d$.

1. Quelle est la loi du vecteur $(N_1, \ldots, N_d)$?

   Réponse : c'est la loi multinômiale, définie par $\forall\ (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $k_1 + \ldots + k_d = N$:

$$\mathbb{P}\left((N_1, \ldots, N_d) = (k_1, \ldots, k_d)\right) = \frac{N!}{k_1! \ldots k_d!} \times \frac{n_1^{k_1} \times \ldots \times n_d^{k_d}}{n^N}.$$

2. En déduire la généralisation de la formule du binôme :

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d \\ k_1+\ldots+k_d=N}} \frac{N!}{k_1! \ldots k_d!} \times z_1^{k_1} \ldots z_d^{k_d} = (z_1 + \ldots + z_d)^N,$$

   en particulier

$$\sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_d)\in\mathbb{N}^d \\ k_1+\ldots+k_d=N}} \frac{N!}{k_1! \ldots k_d!} = d^N.$$

Exercice 5.

Le modèle de Maxwell n'est en fait pas vraiment réaliste, du fait qu'il suppose les particules distinguables, ce qui n'est pas le cas en mécanique quantique. Supposant les particules indistinguables, on a le choix entre deux options : on peut les répartir entre les différents états soit avec répétitions, soit sans répétition. L'option avec répétitions est la statistique de Bose-Einstein, relative aux particules de spin entier (photons, mésons, etc.), et l'option sans répétition est la statistique de Fermi-Dirac, relative aux particules de spin demi-entier (électrons, neutrons, protons, etc.), qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli.

Pour la statistique de Fermi-Dirac, la loi généralise la loi hypergéométrique :

$$\mathbb{P}\left((N_1, \ldots, N_d) = (k_1, \ldots, k_d)\right) = \frac{\binom{n_1}{k_1} \ldots \binom{n_d}{k_d}}{\binom{n}{N}}.$$

En effet, il faut simplement répartir k_1 particules parmi n_1 états d'énergie $e_1, \ldots, k_d$ particules parmi n_d états d'énergie e_d, cependant qu'il y a en tout N particules à répartir parmi n états d'énergie ; avec à chaque fois une seule particule au plus par état, ce qui revient exactement à choisir le sous-ensemble des états occupés parmi les états disponibles, d'où les coefficients binômiaux.

Pour la statistique de Bose-Einstein, la loi est

$$\mathbb{P}\left((N_1, \ldots, N_d) = (k_1, \ldots, k_d)\right) = \frac{\binom{n_1+k_1-1}{k_1} \ldots \binom{n_d+k_d-1}{k_d}}{\binom{n+N-1}{N}}.$$

Le décompte est en effet le même que pour la statistique de Fermi-Dirac, les combinaisons devant être remplacées par des combinaisons avec répétitions. Or $\binom{n+N-1}{N}$ est le nombre des combinaisons avec répétitions de N particules placées dans n états ; ce qui se voit en juxtaposant sur un segment les N particules, et en considérant la bijection qui à chaque ensemble de $(n-1)$ signes délimitant n sous-segments (figurant les états) associe la combinaison avec répétitions ainsi constitué.

Montrer que lorsque le nombre n des états tend vers l'infini de façon que les proportions $n_1/n, \ldots, n_d/n$ convergent vers $p_1, \ldots, p_d$, alors les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein convergent vers la loi multinômiale.