PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 8

Exercice 1. *Loi uniforme discrète et continue*
Soient n un entier strictement positif et X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, U)$, où U est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit enfin Y une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$.

1. Calculer la fonction génératrice de Y ;
2. Calculer la fonction génératrice de X, en déduire que X et Y ont même loi.

Exercice 2. *Somme et différence de gaussiennes indépendantes*
Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où $\sigma > 0$.

1. Calculer la fonction génératrice de X ;
2. En utilisant les fonctions génératrices, déterminer la loi de $U := X + Y$ et $V = X - Y$;
3. Montrer que les variables U et V sont indépendantes.

Exercice 3. *LGN et TLC sur un exemple*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. On pose $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$.

1. À l'aide des fonctions génératrices, montrer que S_n/n converge vers λ lorsque $n \to +\infty$;
2. Montrer que la fonction génératrice de $\sqrt{n}(S_n/n - \lambda)$ converge vers celle d'une gaussienne centrée dont on précisera la variance.

Exercice 4. *Gaussiennes et suites lacunaires*
Soit $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que $a_j a_{j+1} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tels que $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j^2 < +\infty$. Pour tout entier n, on définit

$$Y_n := \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} X_j.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique de Y_n converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la fonction caractéristique d'une variable gaussienne centrée dont on précisera la variance ;
2. Les variables Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ?
3. Étudier la convergence dans $\mathbb{L}^2$ de la suite Y_n

Exercice 5. *Processus de Poisson composés et fonctions génératrices*

1. On suppose que le nombre d'accidents de voiture survenus au cours de l'intervalle $[0, t]$ et impliquant k véhicules suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_k t$. On note cette variable aléatoire N_t^k. On suppose également que $\{N_t^k\}_{k\geq 1}$ est une famille indépendante. Soit $\tilde{N}_t$ le nombre total de véhicules impliqués dans les accidents survenus dans $[0, t]$.
   Montrer que
   $$\tilde{h}(s,t) \equiv \mathbb{E}(s^{\tilde{N}_t}) = \prod_{k\geq 1} \exp(-\lambda_k t(1-s^k))$$

2. Soit $\{Y_i\}_i$ une suite de v.a. iid, et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Soit $R_t \sim Poisson(\lambda t)$ indépendante de $\{Y_i\}_i$. On appelle processus de Poisson composé le processus
   $$N_t = S_{R_t} \equiv \sum_{n\geq 1} S_n \mathbb{1}_{\{R_t = n\}}$$
   Montrer que
   $$h(s,t) = \mathbb{E}(s^{N_t}) = \exp(-\lambda t(1 - G_{Y_1}(s)))$$
   avec G_{Y_1} la fonction génératrice de la v.a. Y_1.

3. Soit $\lambda = \sum_{k\geq 1} \lambda_k$ et $\{Y_i\}_i$ une suite de v.a. iid telle que
   $$\mathbb{P}(Y_i = k) = \frac{\lambda_k}{\lambda} \quad \forall i, \forall k \geq 1$$
   Soit $R_t \sim Poisson(\lambda t)$ indépendante de $\{Y_i\}_i$, et S_n, N_t définis comme dans la question 2.
   (a) Calculer la fonction génératrice de Y_i, i.e. $G_{Y_i}(s) = \mathbb{E}(s^{Y_i})$
   (b) Montrer que $\tilde{h}(s,t) = h(s,t)$. On voit donc que le processus de Poisson composé associé à la somme des paramètres λ_k et à ces $\{Y_i\}_i$ a la même fonction génératrice que $\tilde{N}_t$.

4. Réciproquement, montrer qu'on peut décomposer toute fonction génératrice d'un processus de Poisson composé sous la forme
   $$h(s,t) = \prod_{k\geq 1} \exp(-\lambda_k t(1-s^k))$$
   Tout processus de Poisson composé peut donc être vu comme un effet cumulatif.