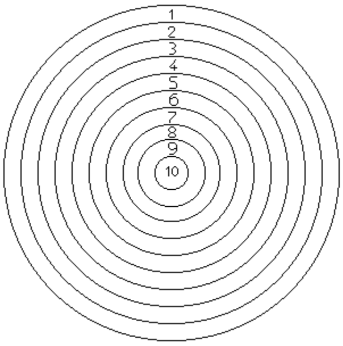
PROBABILITÉS ET STATISTIQUE
Série 9

Exercice 1. *Jeux de fléchettes*



Sur une cible circulaire de rayon 10 divisée en zones annulaires séparées par des cercles concentriques de rayon $n = 1, \ldots, 10$, la zone centrale circulaire de rayon 1 vaut 10 et la zone annulaire située entre les rayons k et $k+1$ vaut $10 - k$, pour $1 \leq k \leq 9$ (voir figure ci-contre). Au lancer de fléchette, le joueur touche la cible avec une probabilité $p = 4/5$. Lorsqu'il touche la cible, il touche la zone de valeur k avec une probabilité proportionnelle à la surface de la zone.

1. Soit X le score obtenu avec une fléchette en un lancer (score $= 0$ à l'extérieur de la cible). Écrire la loi de probabilité de X ;
2. À l'aide de la fonction génératrice, calculer l'espérance et la variance de X ;

   On dispose de trois fléchettes que l'on lance successivement jusqu'à ce que chacune donne un score supérieur à 7. On note Y le nombre de lancers nécessaires pour parvenir à cette configuration.
3. Quelle est la loi de probabilité de Y ? Déterminer son espérance.

Exercice 2. *Scandale dans la famille*
Dans une famille donnée, on appelle X, Y et Z les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ représentant respectivement le nombre de filles, le nombre de garçons, le nombre d'enfants, de la famille. On suppose qu'à chaque naissance, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon, de manière indépendante des autres naissances.

1. Démontrer que, si g_X et g_Z sont les fonctions génératrices de X et Z, alors $g_X(t) = g_Z\left(\frac{t+1}{2}\right)$.
   Indice : on pourra tout d'abord conditionner par l'évènement $\{Z = n\}$.
2. Donner la loi de X dans les cas suivants : Z suit une loi de Poisson de paramètre λ, Z suit une loi géométrique de paramètre p.

Exercice 3. *Processus de Galton-Watson*
On reprend le processus de Galton-Watson tel qu'il a été défini en cours. On note μ la loi du nombre de descendants d'un individu donné, et m l'espérance d'une variable aléatoire de loi μ. On suppose de plus que $\mu(\{1\}) \neq 1$. On notera X_n le nombre d'individus présents à la n-ième génération.

1. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_n.
2. En déduire que, si $m < 1$, alors le processus s'éteint presque sûrement (i.e., avec probabilité 1 il existe n_0 tel que $X_n = 0$ pour tout $n > n_0$.
3. Soit g_1 la fonction génératrice de X_1 (c'est-à-dire celle de μ), *i.e.*
$$g_1(z) = E\left[z^{X_1}\right].$$
   Montrer que la fonction g_1 est positive et convexe sur l'intervalle $[0, 1]$. Montrer qu'elle y est strictement convexe si et seulement si $P[X_1 > 1] > 0$.

4. Calculer, en fonction de g_1, la fonction génératrice de X_n.
5. En déduire que, si $m \leqslant 1$, le processus s'éteint presque sûrement, alors que si $m > 1$ il survit avec probabilité positive.
6. Dans le cas $m > 1$, montrer qu'avec probabilité 1 la suite (X_n) soit est stationnaire en 0, soit tend vers $+\infty$.
7. Jusqu'ici, nous avons supposé que $X_0 = 1$ (un seul individu au départ). Calculer maintenant l'espérance de la variable aléatoire X_n si $X_0 = N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille s'éteint presque sûrement si et seulement si chacun des N arbres s'éteint.

Exercice 4. *Limite d'une suite constante*
Soit $X_n = X$ une suite constante de variables aléatoires de Bernoulli prenant les valeurs 0 et 1 avec la même probabilité $\frac{1}{2}$. Soit $Y = 1 - X$. Montrer que X_n converge en loi vers Y lorsque n tend vers l'infini. Qu'en est-il des convergences de X_n vers Y en moyenne d'ordre r, presque sûre et en probabilité?

Exercice 5. *Le contre exemple de la bosse voyageuse*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers zéro mais diverge en moyenne.

Exercice 6. *Relations entre les convergences en moyenne*
Soient deux nombres réels r et s tels que $r > s \geq 1$. Trouver une suite de variables aléatoires qui converge en moyenne d'ordre s mais pas en moyenne d'ordre r.