Etude de diffusions dans le cadre de la relativité générale

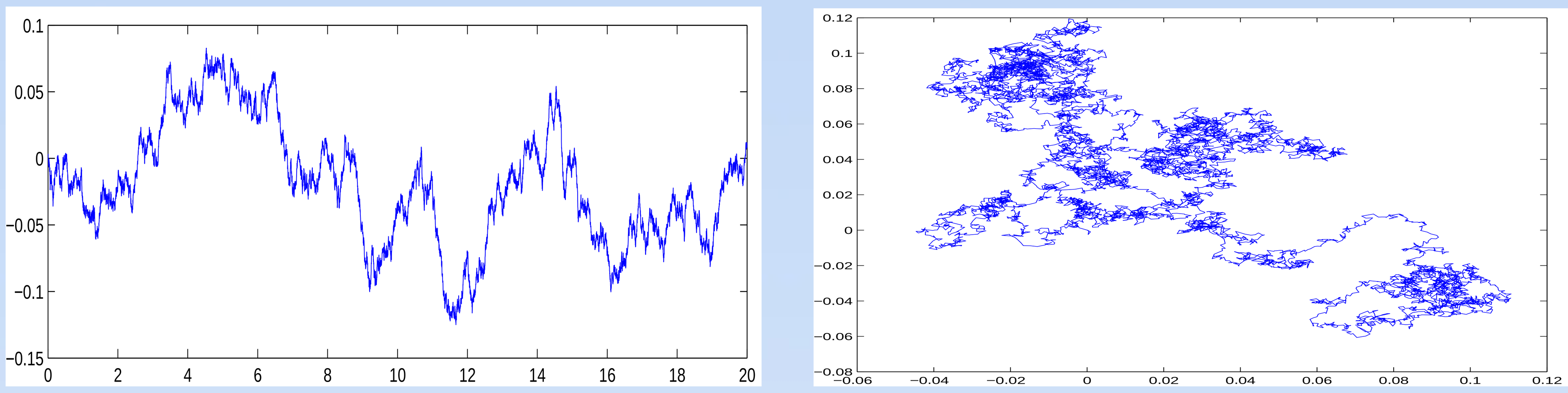
Doctorant : Jürgen Angst (IRMA, ULP).

Directeurs de thèse : Jacques Franchi (IRMA, ULP), Yves Le Jan (Université Paris Sud XI).

Il y a un siècle, Albert Einstein publiait quatre articles qui allaient profondément influer sur la physique du vingtième siècle. Dans le premier texte de 1905, Einstein donne pour la première fois, en se basant sur une description atomique de la matière, une explication raisonnable du mouvement brownien que différentes expériences avaient déjà mis en évidence. Le troisième texte, sans doute le plus célèbre, constitue une introduction au principe de relativité restreinte qu'Einstein complètera en 1915 pour donner sa théorie de la relativité générale. Ces deux articles ont eu chacun une postérité extraordinaire, cependant, il est assez étonnant de constater que relativement peu de travaux associent les deux thèmes : c'est justement l'objet de cette thèse.

Qu'est-ce qu'une diffusion?

En théorie des probabilités, un processus stochastique est la donnée d'une collection de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ indexées par un ensemble T; le plus souvent T représente le temps. Les variables aléatoires considérées sont à valeurs dans un même espace $\mathcal{E}$ (par ex. la droite réelle, le plan complexe, une variété différentielle, etc). $(X_t)_{t\in T}$ peut aussi être vu comme une trajectoire aléatoire dans l'espace $\mathcal{E}$ en fonction du temps t parcourant T. Un processus stochastique est dit ***continu*** si ses trajectoires sont des fonctions continues de T dans $\mathcal{E}$, et on dit qu'il est ***markovien*** si l'évolution de la trajectoire entre deux instants t_0 et $t_0 + dt$ ne dépend du passé (*i.e.* des X_t pour $t \le t_0$) que par la position à l'instant t_0. Dans ce cadre, on appelle ***diffusion***, un processus stochastique ***markovien*** et ***continu***.



Exemples de trajectoires de mouvements browniens réel et complexe : les trajectoires sont continues mais nulle part dérivables !

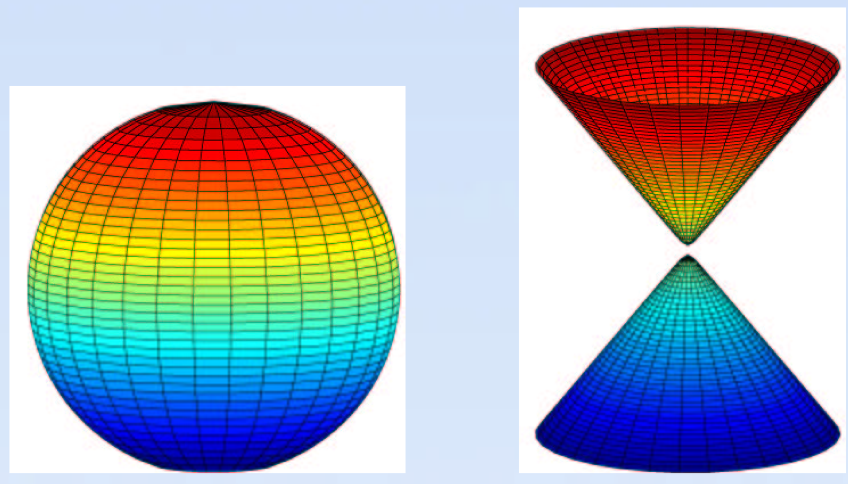
Pour se faire une idée de ce qu'est une diffusion, on peut imaginer un mobile dans le plan, qui à tout instant subit des chocs dans des directions aléatoires. La trajectoire très irrégulière qui en résulte est typique d'une diffusion. L'exemple le plus "simple" de diffusion est le mouvement brownien (réel ou complexe) dont deux exemples de trajectoires sont données ci contre.

Le cadre géométrique de la théorie de la relativité.

Depuis Einstein, les trois dimensions spatiales et le temps ne sont plus considérés comme des grandeurs indépendantes, mais comme faisant partie d'un espace à quatre dimensions, où temps et espace sont liés par des relations géométriques : on parle alors d'espace-temps. Pour la relativité restreinte, le cadre géométrique est celui de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,d}$ avec $d = 3$. Cet espace est l'analogue de l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ à la différence importante que l'élément de longueur n'est plus de la forme

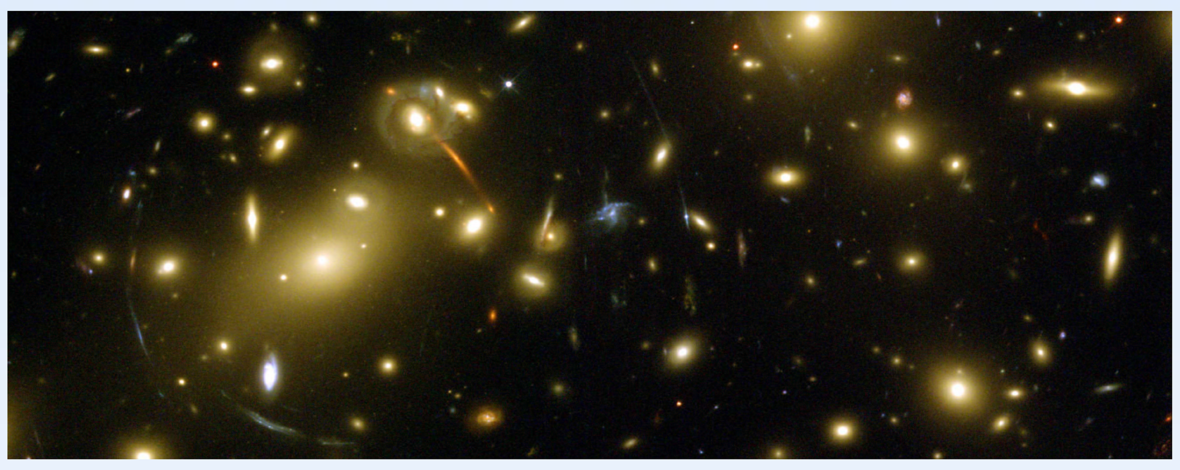
$$ds^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad \text{mais} \quad ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Ce changement de métrique modifie radicalement la géométrie de l'espace, par exemple, la sphère unité de l'espace de Minkowski n'est pas compacte, contrairement au cas euclidien. La théorie de la relativité restreinte requiert que, dans cet espace, les lois physiques décrivant les phénomènes sont invariantes par rapport à une classe de transformations dites Lorentziennes.



La sphère (resp. pseudo-sphère) de l'espace euclidien (resp. de Minkowski)
$\mathbb{S}^2 = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3, t^2 + x^2 + y^2 = 1\}$, (resp. $\mathbb{H} = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3, -t^2 + x^2 + y^2 = 1\}$)

Le cadre mathématique de la théorie de la relativité générale est celui de la géométrie différentielle. L'espace-temps est alors modélisé par une variété différentielle $\mathcal{M}$ de dimension 4, munie d'une métrique Lorentzienne, c'est à dire une métrique de signature $(-,+,+,+)$: deux exemples sont donnés ci-dessous.

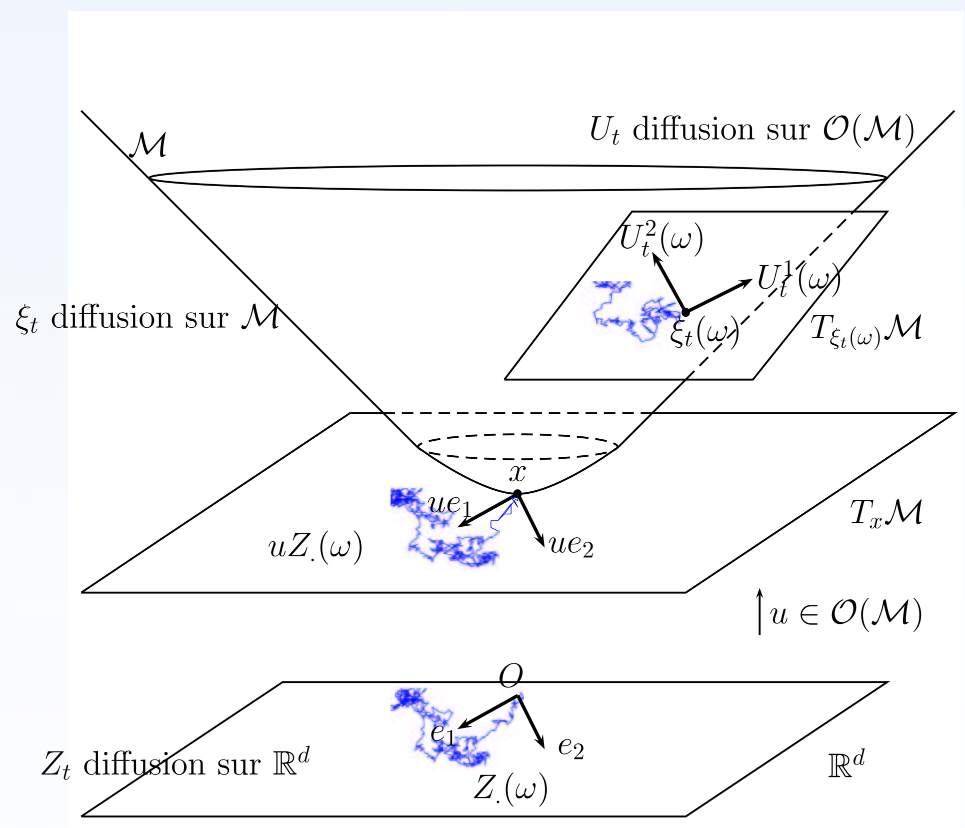


La théorie de la relativité générale stipule que la lumière peut être déviée par un corps massif. Ici, un amas de galaxies provoque une déviation de la lumière telle qu'il donne des galaxies plus lointaines des images déformées en arcs (des fragments d'anneaux) et intensifiées.

Modèle de Schwarzschild	$\mathcal{M} := \left\{\xi = (t,r,\theta) \in \mathbb{R} \times [r_0, +\infty[\times \mathbb{S}^2\right\}$	$ds^2 = -\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \lvert d\theta\rvert^2$
Modèle de FRW	$\mathcal{M} := \left\{\xi = (t,r,\theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2\right\}$	$ds^2 = -dt^2 + a(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 \lvert d\theta\rvert^2\right)$

L'espace de Schwarzschild est utilisé en physique pour modéliser le complémentaire d'une étoile ou d'un trou noir de rayon $r_0 > 0$; l'espace de Friedman-Roberson-Walker (FRW) modélise lui un univers en expansion dans la théorie du big-bang (le facteur d'expansion est $a(t)$, sa dérivée logarithmique $H := \dot{a}/a$ est la "constante" de Hubble, la constante k vaut $-1, 0$ ou 1 selon la courbure de l'espace).

Mouvement brownien et relativité.



La diffusion ξ_t sur $\mathcal{M}$ est obtenue par projection d'une diffusion U_t dans $\mathcal{O}(\mathcal{M})$, le fibré des répères pseudo-orthonormés au dessus de $\mathcal{M}$.

La théorie classique du mouvement brownien n'est pas compatible avec la relativité, comme il ressort clairement du fait que le flux de la chaleur se propage instantanément jusqu'à l'infini. Dans les années soixante, Dudley a défini sur le fibré tangent de l'espace de Minkowski un laplacien généralisé possédant l'invariance lorentzienne, et a montré qu'il n'y a pas d'autre définition possible. Dudley a fait une étude poussée de la diffusion qui en résulte : celle-ci subit continuellement des "boosts" lorentziens (ou rotations hyperboliques), accélérations infinitésimales appliquées dans des directions aléatoires, sa vitesse est un mouvement brownien. Les travaux précurseurs de Dudley n'ont pas connu de suite durant une trentaine d'années, alors que leur généralisation, de la relativité restreinte à la relativité générale, semble très naturelle a priori. Récemment, Jacques Franchi et Yves Le Jan ont proposé une extension naturelle de la diffusion de Dudley au cadre général des variétés lorentziennes. Leur diffusion peut être construite par exemple par développement à partir de la diffusion plate de Dudley.

Franchi et Le Jan ont étudié en détail le comportement de cette diffusion dans le modèle de Schwarzschild. Le comportement diffusif asymptotique qui apparaît alors est remarquable, avec par exemple des trajectoires confinées dans un voisinage du trou noir et y tournant de plus en plus vite. Il est très intéressant à plusieurs titres de tester et d'étudier cette diffusion relativiste générale dans d'autres modèles relativistes classiques, en particulier lorsque ces modèles contiennent de la matière (alors que celui de Schwarzschild en est vide). L'objet de cette thèse est de mener une étude similaire à celle réalisée par Franchi et Le Jan dans le modèle de Schwarzschild, cette fois dans le modèle de Friedman-Walker-Roberson, modèle d'un univers en expansion dans la théorie du big-bang. Ce modèle, déjà dans le cas spacialement plat, présente le mérite à la fois de contenir de la matière et d'avoir une structure suffisamment simple (par exemple) pour qu'on puisse raisonnablement envisager d'y conduire une étude poussée, on peut y résoudre explicitement l'équation des géodésiques.

Journée Poster du 21.09.06, Ecole doctorale MSII.