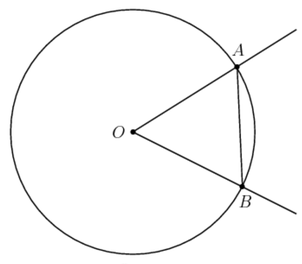
2007 IRMA FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA STRASBOURG FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA STRASBOURG FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA STRASBOURG FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA

ASTRONOMIE ET MATHÉMATIQUE : DES LIENS HISTORIQUES

Les Mathématiques et l'Astronomie entretiennent des liens anciens qui remontent à leurs origines. Les deux sciences se sont développées conjointement et se sont enrichies mutuellement. Nous en donnons quelques exemples significatifs.

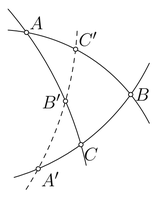
L'ANTIQUITÉ



$\text{corde}(\widehat{AOB}) = AB$

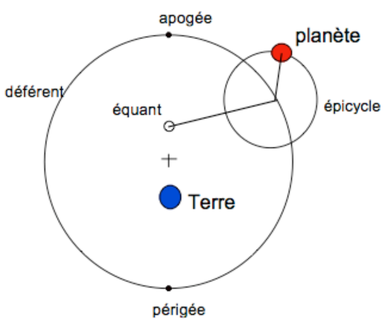
Une des premières tâches des astronomes a été de décrire le ciel et de consigner ses changements. Pour cela, il a fallu développer des outils géométriques adéquats. Le principal outil de l'astronomie antique est la trigonométrie. En effet, on mesure la distance entre deux étoiles en mesurant l'angle qu'elles forment entre elles du point de vue de l'observateur.

On considère que le fondateur de la trigonométrie est l'astronome-mathématicien Hipparque de Rhode (IIème siècle av JC). Il fut le premier à établir des tables de cordes. La corde d'un angle, l'ancêtre de notre *sinus*, est la longueur du segment reliant les intersections d'un secteur angulaire et du cercle de rayon 1. Les astronomes de l'Antiquité considéraient les astres comme des points sur la sphère céleste et essayaient de les repérer les uns par rapport aux autres. Pour mener à bien ce travail, il leur était nécessaire d'étudier les rapports entre les longueurs et les angles des triangles lorsque ces derniers sont dessinés sur une sphère. Un théorème important de Menelaus d'Alexandrie (I-IIème siècle après JC) concerne un triangle ABC sur une sphère de centre O dont les trois côtés sont coupés en A', B' et C' par un arc de grand cercle. On a alors l'égalité :



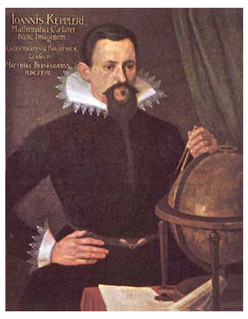
$$\frac{\text{corde}(\widehat{A'OB})}{\text{corde}(\widehat{A'OC})}\,\frac{\text{corde}(\widehat{B'OC})}{\text{corde}(\widehat{B'OA})}\,\frac{\text{corde}(\widehat{C'OA})}{\text{corde}(\widehat{C'OB})} = 1.$$

Pour décrire le mouvement des planètes, les grecs proposèrent des théories reposant également sur la géométrie. L'œuvre majeure en usage de l'Antiquité à la Renaissance fut *l'Almageste* (nom donné par ses traductions de l'arabe) de Claude Ptolémée (Alexandrie, IIème siècle). Il raffine le système géocentrique (la terre est au centre du système) proposé par Hipparque. Ce système suppose que les planètes se meuvent autour de la terre sur des cercles (épicycles) dont le centre est fixé sur un cercle (déférent) excentré par rapport à la Terre.



Claude Ptolémée

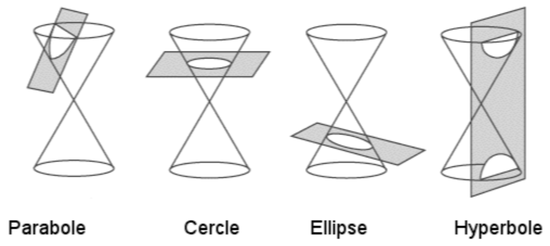
LA RÉVOLUTION COPERNICIENNE



Johannes Kepler

La période de la Renaissance va connaître un bouleversement de l'astronomie. En effet, Nicolas Copernic (1473-1543) comprend vers 1514 que le modèle héliocentrique (basé sur l'hypothèse que les planètes tournent autour du soleil) est plus satisfaisant que le modèle géocentrique : on parle de révolution copernicienne. A la fin de cette période, l'astronome Johannes Kepler (1571-1630) va essayer de mettre en accord les observations de son maître Tycho Brahe avec ce nouveau modèle. Le language en jeu est toujours celui de la géométrie classique.

Les coniques sont des courbes introduites au IVème siècle av J.C. par Ménechme un mathématicien grec afin de résoudre le problème purement mathématique de la duplication du cube. Un autre Grec, Pappus d'Alexandrie (IVème siècle) les décrivit comme l'intersection d'un plan et d'un cône.



L'étude de ces courbes est entrée dans l'éducation mathématiques classique. La familiarité avec ces concepts permit à Kepler d'énoncer ses trois lois décrivant les mouvements des planètes autour du soleil.

Les lois de Kepler :
1) Les planètes (P) décrivent une orbite elliptique dont un des foyers est le Soleil (S).
2) Le rayon vecteur joignant (S) et (P) engendre une aire proportionnelle au temps employé pour la décrire.
3) le carré du temps de révolution sidérale d'une planète est proportionnel au cube du grand axe de sa trajectoire elliptique.

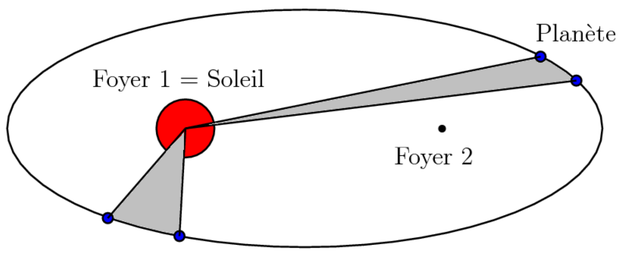
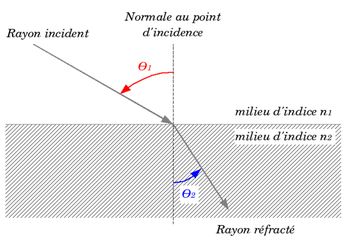


Illustration de la seconde loi de Kepler, dite "loi des aires".

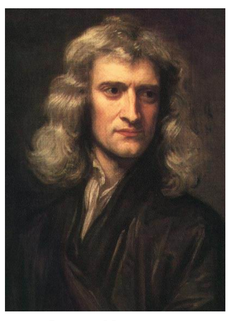
MÉCANIQUE CLASSIQUE ET LOI DE LA GRAVITATION



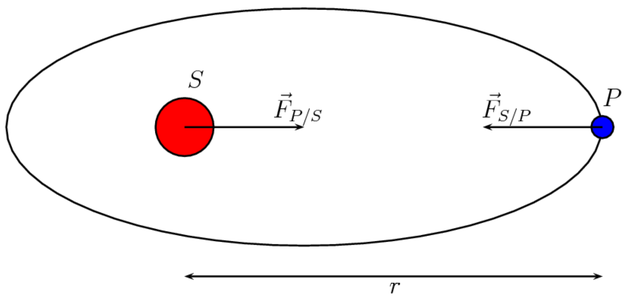
$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2)$

Dans la première partie du XVIIème siècle, les lois de l'optique énoncées par Descartes permettent le perfectionnement des lentilles, lunettes, télescopes etc., et donc une observation toujours plus précise du mouvement des astres. Par ailleurs, en introduisant la géométrie analytique, Descartes (1596-1650) et Fermat (1607-1665) ont simultanément établi un lien fondamental entre géométrie, algèbre et analyse, et ont par la même mis fin à la période classique de la géométrie.

La seconde moitié du XVIIème siècle voit la découverte par Leibniz (1646-1716) et Newton (1643-1727) des bases du calcul différentiel et du calcul intégral. La familiarité de Newton avec ces notions mathématiques lui permet de formuler les lois de la mécanique "classique", à savoir : les trois lois fondamentales de la dynamique, et la loi de la gravitation universelle. Newton retrouve ainsi par le calcul, les lois de Kepler décrivant le mouvement des planètes autour du Soleil.



Isaac Newton



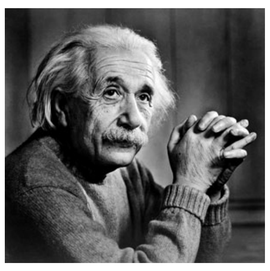
$$|\vec{F}_{P/S}| = |\vec{F}_{S/P}| = \frac{GM_SM_P}{r^2}$$

Dans la théorie Newtonienne, la force d'attraction gravitationnelle entre deux corps est inversement proportionnelle au carré de leur distance

Au milieu du XIXème siècle, les astronomes John Couch Adam et Urbain Le Verrier ont établi à l'aide de calculs l'existence de la planète Neptune. Leur calculs reposaient sur les perturbations que présentait l'orbite observée d'Uranus par rapport à son orbite prévue par les lois de Newton. Au début du XXème siècle, le même type de méthode a permi de prédire l'existence de Pluton.

LOI DE LA GRAVITATION ET RELATIVITÉ

Au début du XXème, malgré des succès encore récents, la théorie de la gravitation de Newton semble atteindre ses limites. Plusieurs observations, comme par exemple l'avance du périhélie de Mercure, semblent en effet échapper à la théorie.

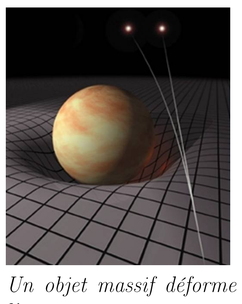


Albert Einstein

Il faut attendre 1905 puis 1916 et la formulation de la théorie de la Relativité (restreinte puis générale) par Albert Einstein (1879-1955), pour trouver une explication à ces phénomènes. Le cadre mathématique de la théorie de la Relativité est celui de la géométrie différentielle, précisément celui des variétés Lorentziennes. Lorsque qu'Einstein formule sa théorie, la géométrie différentielle a environ soixante ans : c'est Bernhard Riemann (1826-1866), qui en 1854 en a posé les bases.

Les motivations de Riemann étaient alors purement mathématiques. Einstein a été orienté vers les travaux de Riemann et les géométries non-euclidiennes, par son ami mathématicien Marcel Grossmann (1878-1936) ; ce dernier l'a aussi initié au calcul tensoriel, qui constitue le langage des base de la théorie de la relativité. Dans cette nouvelle théorie, la gravitation n'est pas une force, mais est la manifestation de la déformation de l'espace (en fait de l'espace-temps) produite par la distribution de matière.

Bernhard Riemann



Un objet massif déforme l'espace-temps

Les équations d'Einstein relient de façon complexe la géométrie de l'espace (décrite par la métrique $g_{\mu\nu}$) et la distribution de matière dans l'espace-temps (reflétée par le tenseur $T_{\mu\nu}$).

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA STRASBOURG FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA STRASBOURG FETE DE LA SCIENCE 2007 IRMA STRASBOURG