Introduction

Bref historique du problème Notre aventure commence avec deux célèbres problèmes de géométrie énumérative. Le premier est le problème d'Apollonius de Perge (env. 200 av. J.-C.) :

Problème (Apollonius)**.** *Trouver le nombre maximal de cercles tangents à trois cercles donnés.*

Viète en donne la solution dans son *Apollonius Gallus* à la fin du XVIIe siècle : le nombre maximal est 8 (voir Fig. 1).

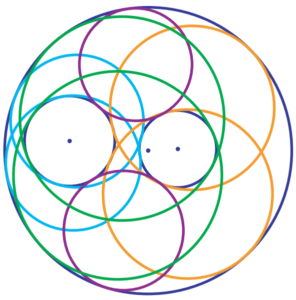


FIGURE 1 – 8 cercles tangents à 3 cercles donnés

Le deuxième est un problème classique de géométrie énumérative proposé en 1848 par J. Steiner :

Problème (Steiner - 1848)**.** *Trouver le nombre maximal de coniques tangentes à cinq coniques données.*

Ce problème a été résolu en 1859 par de Jonquières et, en 1864, par Chasles, qui proposa une méthode permettant de plus de résoudre d'autres problèmes similaires : il existe 3264 coniques tangentes à cinq coniques données. Cependant, parmi ces 3264 coniques, il peut y avoir un certain nombre de coniques complexes. Ce n'est qu'en 1997 que F. Ronga, A. Tognoli et T. Vust ([RTV97]) donnent une configuration de cinq coniques réelles telle que les 3264 coniques tangentes soient toutes réelles. Cette solution se trouve au voisinage d'une configuration de cinq coniques chacune dégénérée en une paire de droites (voir Fig. 2). En 2005, J.-Y. Welschinger ([Wel06]) apporte sa contribution en démontrant que, pour cinq coniques d'intérieurs disjoints, il existe toujours au moins 32 coniques réelles tangentes à ces cinq coniques .

Le problème traité dans ce travail est en fait le mariage entre les deux problèmes précédents :

Problème. *Trouver le nombre maximal de cercles (réels) tangents à trois coniques réelles données.*

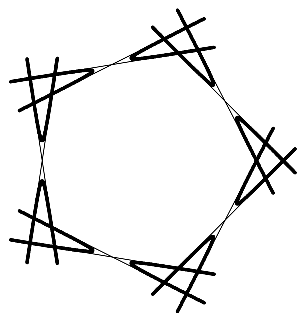


FIGURE 2 – Esquisse d'une configuration de cinq coniques réelles fournissant 3264 coniques réelles tangentes

Ce travail s'articule en deux parties ; dans la première, nous étudions le problème général, tandis que dans la deuxième partie, nous analysons un cas particulier.

Aperçu de la Première partie. Dans la Première partie, nous nous attaquons directement au problème proposé. Une première approche, traitée dans le **Chapitre 1**, consiste à adapter la méthode proposée dans [RTV97] ; autrement dit, on se place au voisinage d'une configuration de trois coniques dégénérées chacune en une paire de droites. On a alors le résultat suivant :

Théorème (Thm 1.1.1 et Corollaire p.14). *Il existe un triplet $\underline{r}^0$ de coniques dégénérées en deux droites tel que, dans un voisinage de $\underline{r}^0$, il existe un triplet d'hyperboles lisses $\underline{q}$ tel que le nombre de cercles tangents aux trois coniques du triplet $\underline{q}$ soit* 136*.*

De plus, 136 *est le nombre maximal de cercles que l'on peut trouver au voisinage d'une configuration de trois coniques dégénérées en paires de droites.*

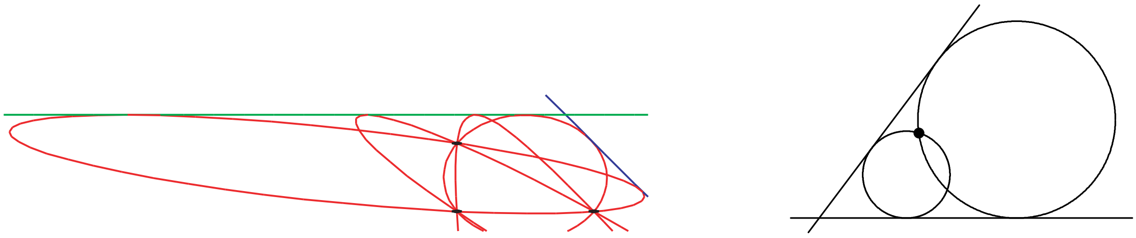
En géométrie projective, un cercle n'est autre qu'une conique réelle passant par les deux points conjugués complexes $[1 : \pm i : 0]$. On remarque que le groupe des transformations projectives réelles du plan agit transitivement sur les paires de points conjugués complexes. Ainsi, nous pouvons reformuler notre problème de la manière suivante :

Problème. *Trouver le nombre maximal de coniques réelles tangentes à trois coniques réelles données et passant par deux points conjugués complexes distincts donnés.*

Cependant, le nombre de solutions complexes à ce problème est 184, et non 136 [1]. De plus, en s'inspirant de [RTV97], on peut trouver une configuration réelle de trois coniques lisses et deux points *réels* telle que le nombre de coniques passant par ces deux points et tangentes à ces trois coniques soit 184. On en déduit que, lorsque deux points réels deviennent complexes conjugués (non réels), on perd un certain nombre de solutions. Cette intuition est corroborée par le fait suivant : lorsque l'on observe le nombre maximal de coniques réelles et de cercles tangents à deux droites données et passant par le nombre adéquat de points, on remarque ce nombre est quatre pour les coniques tandis qu'il est de seulement deux pour les cercles (voir Fig. 3).

L'objet du **Chapitre 2** est donc d'étudier l'éventuel changement du nombre de coniques tangentes à trois coniques données et passant par deux points lorsque les deux points réels se confondent en un point double avant de passer dans le domaine complexe. Pour ce faire,

1. Pour une démonstration du fait que 184 est le nombre de solutions complexes à ce problème voir par exemple [BKT08].



(a) Il y a 4 coniques tangentes à deux droites... (b) ... mais seulement 2 cercles.

FIGURE 3 – Une différence entre coniques et cercles

nous fixons trois coniques réelles q_1, q_2 et q_3 , un point P, un vecteur v et nous étudions les coniques tangentes aux trois coniques fixées et passant par les deux points $P + i\sqrt{\varepsilon}v$ et $P - i\sqrt{\varepsilon}v$ paramétrés par le scalaire réel ε. Des expériences numériques montrent qu'il existe deux comportements possibles lorsque ε tend vers 0. Certaines coniques deviennent tangentes à la droite passant par P et dirigée par le vecteur v tandis que d'autres dégénèrent en des droites doubles passant par le point P ; ce sons ces dernières qui deviennent purement complexes lorsque les points $P \pm i\sqrt{\varepsilon}v$ deviennent complexes conjugués.

Pour étudier les coniques qui dégénèrent en droites doubles passant par le point P, nous utilisons la notion de *conique complète*, présentée dans le livre de J. Harris [Har95]. Une conique dégénérée en une droite double est tangente à toute courbe qu'elle intersecte, au sens où elle possède un point d'intersection de multiplicité deux. Ainsi, toute droite double passant par le point P et intersectant les trois coniques fixées leur est tangente. Or, nous désirons étudier les seules coniques dégénérées qui sont limite d'une conique lisse tangente au trois coniques. L'idée des coniques complètes est donc d'ajouter deux points marqués à la droite double et de changer la condition de tangence : une conique complète est tangente à une courbe donnée

- si la droite qui soutient la conique dégénérée est tangente à la courbe,
- ou bien si la droite intersecte la courbe à l'un des points marqués.

Ainsi, une conique complète est limite d'une famille de coniques lisses.

Le Théorème 2.3.2 montre que la disparition ou l'apparition de solutions réelles dépend de la position relative du point P et du point de tangence entre la conique complète et l'une des coniques fixées par rapport aux points marqués de la conique complète. Il permet de plus d'expliquer la disparition de 48 coniques au voisinage d'une configuration de trois coniques dégénérées en deux droites. Cependant, il peut a priori exister une configuration de trois coniques réelles et de deux points réels telle que le nombre de coniques tangentes à ces trois coniques et passant par ces deux points soit compris entre 136 et 184, lorsque les deux points considérés deviennent complexes conjugués.

Aperçu de la Deuxième partie. Dans la deuxième partie, nous considérons une version plus simple du problème initial à savoir :

Problème. *Trouver le nombre maximal de cercles tangents à une hyperbole, une droite et un point fixés.*

Nous avons choisi ce problème en particulier, car il s'agit de la configuration la plus simple d'une conique lisse et de deux coniques (fortement) dégénérées telle que le nombre total de coniques (éventuellement complexes) tangentes est égal au nombre de coniques réelles tangentes mais différent du nombre de cercles prévu par la méthode utilisée dans le Chapitre 1. En effet, le Théorème de Bézout prédit 12 coniques (complexes) tangentes à une hyperbole, une droite et passant par trois points et la méthode décrite dans [RTV97] permet effectivement de construire 12 coniques réelles passant par trois points réels et tangentes à une hyperbole et une droite. Cependant, le nombre de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point (plus les deux points conjugués complexes $[1 : \pm i : 0]$) obtenus avec la méthode utilisée dans le Chapitre 1 est de seulement 8. Le but de la Deuxième partie est donc de répondre à la question suivante : est-ce que 8 est bien le nombre maximal de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point fixés ?

Une première approche pour trouver le nombre de cercles tangents à une hyperbole, une droite et passant par un point fixés est d'étudier un certain polynôme de degré 12 et de déterminer le nombre de racines réelles. Cependant, une approche géométrique se relève plus efficace. L'idée est la suivante : on sait que le lieu des centres des cercles tangents à une droite et passant par un point est la parabole de directrice la droite fixée et de foyer le point fixé. Construisons alors le lieu des centres des cercles tangents à une hyperbole fixée et passant par un point et étudions son intersection avec la parabole.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudions donc ce lieu qui possède un certain nombre de points singuliers intimement liés à des cercles tangents à l'hyperbole très particuliers. La manière la plus élégante pour décrire ce lieu est la suivante :

Théorème (Thm. 3.1.2)**.** *Le lieu des cercles tangents à une hyperbole q et passant un point F fixé, noté $\mathcal{S}_{q,F}$, est l'enveloppe des médiatrices des segments $\overline{QF}$ pour tout point Q appartenant l'hyperbole q.*

S'ensuit une description de l'allure de ce lieu pour les différentes positions respectives du point fixé F par rapport à l'hyperbole et ses asymptotes.

Dans le **Chapitre 4**, nous étudions l'intersection entre le lieu $\mathcal{S}_{q,F}$ et la parabole, lieu des centres des cercles passant par le point F et tangents à une droite donnée. L'étude de cette intersection peut se révéler très fastidieuse. L'idée est donc de transformer la parabole en une droite et d'étudier l'intersection de cette droite avec la transformée de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$. La transformation utilisée est l'application complexe bivaluée

$$\begin{array}{rccc} \sqrt{\cdot}: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \sqrt{z} \end{array}$$

En effet, cette fonction envoie les paraboles dont le foyer est à l'origine sur des droites. Toute notre étude se base sur le fait que le signe de la courbure de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ de la courbe $\mathcal{S}_{q,F}$ est le même que celui de l'hyperbole au point correspondant (Prop. 4.2.1). De plus, les composantes connexes de la transformée $\sqrt{\mathcal{S}_{q,F}}$ privée de ses points singuliers vérifient les condition pour qu'il y ait équivalence entre courbure de signe constant et convexité. Ainsi notre étude repose essentiellement sur les propriétés des arcs convexes. Ceci nous permet de démontrer, contre toute attente, le résultat suivant :

Théorème (Thm. 4.0.2)**.** *Le nombre maximal de cercles passant par un point F et tangents à une droite d et à une hyperbole q est 10.*

Finalement, dans le **Chapitre 5**, nous construisons explicitement une configuration d'une hyperbole, une droite et un point fournissant le nombre maximal de cercles tangents, à savoir 10. L'idée principale est de choisir le point fixé au voisinage du point de tangence entre deux cercles osculateurs à l'hyperbole fixée.

Bibliographie

[BKT08] Andrew Bashelor, Amy Ksir, and Will Traves. Enumerative algebraic geometry of conics. *Amer. Math. Monthly*, 115(8) :701–728, 2008.

[Har95] Joe Harris. *Algebraic geometry*, volume 133 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995. A first course, Corrected reprint of the 1992 original.

[Kne12] Adolf Kneser. Bemerkungen über die anzahl der extreme der krümmung auf geschlossenen kurven und über verwandte fragen in einer nichteuklidischen geometrie. In *Festschrift Heinrich Weber zu seinem siebzigsten Geburtstag am 5. März 1912*, pages 170–180, Leibzig, 1912. Teubner.

[Lei62] G. W. Leibniz. Acta Eruditorum 1692. In *Mathematische Schriften. Bd. V : Die mathematischen Abhandlungen*, Herausgegeben von C. I. Gerhardt, pages viii+418 pp. (7 inserts). Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1962.

[Lei89] G. W. Leibniz. *La naissance du calcul différentiel.* Mathesis. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1989. 26 articles des Acta Eruditorum.

[RTV97] Felice Ronga, Alberto Tognoli, and Thierry Vust. The number of conics tangent to five given conics : the real case. *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid*, 10(2) :391–421, 1997.

[Wel06] J.-Y. Welschinger. Towards relative invariants of real symplectic four-manifolds. *Geom. Funct. Anal.*, 16(5) :1157–1182, 2006.