UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FACULTÉ DES SCIENCES

Cours donné par

Tatiana Smirnova-Nagnibeda

Topologie générale

Table des matières

1 Espaces topologique. Ouverts et fermés . . . 4

2 Sous-espaces. Bases de topologies . . . 11

3 Applications continues. Homéomorphismes . . . 17

4 Espace métriques . . . 25

5 Topologie produit, topologie quotient . . . 32

5.1 Topologie produit . . . 32

5.2 Topologie des quotients . . . 35

6 Suites et limites, espaces séparés . . . 39

7 Connexité . . . 47

8 Compacité . . . 55

9 Variétés et classification des surfaces . . . 63

9.1 Théorème de classification de surfaces à homéomorphismes près . . . 71

Introduction

Continuité en général :

Pour une fonction $f : X \to Y$

f est continue en un point x si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que si y est δ proche de x, alors $f(y)$ sera ε proche de $f(x)$

Pour cela, il nous faut une métrique dans chacun des ensembles X et Y.

Dans certains cas, les métriques seront équivalentes, mais pas toujours.

On va regarder les invariants des espaces par continuité.

1 Espaces topologique. Ouverts et fermés

Définition

Soit X un ensemble. Une topologie sur X est une famille de sous-ensembles de X (appelés les ouverts) qui satisfont trois conditions :

- 1) $\emptyset, X$ sont dans $\mathcal{T}$
- 2) Toute union des éléments de $\mathcal{T}$ est de nouveau un élément de $\mathcal{T}$.
- 3) Toute intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{T}$ est aussi un élément de $\mathcal{T}$

Remarques

- $\mathcal{T}$ peut être finie ou infinie, dénombrable ou non.
- Sur un ensemble X, on peut définir à priori plusieurs topologies, si $|X| > 1$.

Exemples

- 1) X quelconque $\mathcal{T}_{\text{triv}} = \{X, \emptyset\}$ la topologie triviale.
- 2) X quelconque $\mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X) =$ tous les sous-ensembles de X.
- 3) $X = \mathbb{R}^n$ muni de la métrique euclidienne : $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ avec $x, y \in \mathbb{R}^n$

  Topologie standard sur $\mathbb{R}^n$:

  $\mathcal{T}_{\text{st}} = \{U \subset \mathbb{R}^n \big| \forall x \in U\ \exists \delta > 0$ tel que $U \supset B_{d_2}(x, \delta)\} =$ tous les sous-ensembles $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que chaque point de U est contenu dans U avec une petite boule ouverte autour de lui.

  Montrons que c'est bien une topologie :

  - i)
    $mathbbR^n, \emptyset \in \mathcal{T}_{\text{st}}$
  - ii) Supposons que $x \in \bigcup_i U_i$ Alors, $\exists \delta$ tel que $\bigcup U_i \supset B(x, \delta)$
    $\implies \exists x$ tel que $x \in U_i \implies \exists \delta$ tel que $B(x, \delta) \supset U_i$ car U_i ouverts.

- iii) Vérifions la condition puor les intersections finies :

  $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n \implies \forall i = 1, \cdots, n, x \in U_i \implies \delta_i, \forall i$ tel que $B(x, \delta_i) \supset U_i$ si $\delta \leq \underset{1 \leq i \leq n}{min} \delta$

  Alors $B(x, \delta) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est aussi un ouvert.

- X quelconque $\mathcal{T}_f = \{U \subset \mathcal{P}(X) \ : \ X \backslash U \text{ est fini } \}$

Remarque

$\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_{\text{disc}} \iff |X| < \infty$

Définition

Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X.

On dit que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ si $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$

C'est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des topologies sur X.

Exemples

- 1) Voir remarque précédente

- 2) Sur $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_{triv} \subsetneq \mathcal{T}_f \subsetneq \mathcal{T}_{\text{st}} \subsetneq \mathcal{T}_{\text{disc}}$

  Plus généralement, $\forall \mathcal{T}$ sur$\forall X$: $\mathcal{T}_{\text{triv}} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{disc}}$

  Pour $|X| > 1$, au moins une des deux inclusions est stricte.

Remarques

- Il suffit de demander, dans la condition iii) que $\forall U_1, U_2 \in \mathcal{T}, \ U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ iii')

  En effet, si la condition est vérifiée pour les couples $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, alors $\forall n \geq 2$

  $U_1 \cap \cdots \cap U_n = (U_1 \cap U_2) \cap U_3 \cap \cdots \cap U_n = (\cdots (U_1 \cap U_2) \cap U_3) \cdots) \cap U_n) \in \mathcal{T}$ par iii')

- 2) La condition iii) n'est en général pas vérifiée sur les intersections infinies !

Exemple

$U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{T}_{\text{st}}$

Toutes les intersections finies des U_n sont des intervalles ouverts et donc $\in \mathcal{T}_{\text{st}}$

Mais $\bigcap_{n\geq 1} U_n = \{0\} \notin \mathcal{T}_{\text{st}}$

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Un sous-ensemble $F \subset X$ est dit fermé si $X \backslash F \in \mathcal{T}$

(Voir un exo Série 1 qui montre que l'on peut définir un espace topologique à partir des fermés en modifiant les axiomes)

Nota Bene !

Fermé-ouvert n'est pas une dichotomie !!!

- On peut avoir des sous-ensembles à la fois fermés et ouverts : $X, \emptyset, \forall A, \in \mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{T}$.
- On peut avoir des sous-ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés, par exemple $(0, 1]$ dans $\mathcal{T}_{\text{st}}$

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Pour un point $x \in X$, un sous-ensemble $N \subset \mathcal{P}(X)$ est un voisinage de x s'il existe un ouvert $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset N$

Définition

$(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $A \subset X$. On définit A° l'intérieur de A :

$A^\circ = \{x \in A \ : \ A \text{ est un voisinage de } x\}$

Exemple

$A = [0, 1]$, alors $A^\circ = (0, 1)$

Proposition 1

- 1) $A^\circ \subset A$

- 2) $\forall A, A^\circ$ est ouvert.

Preuve

- 1) Trivial par la définition de A°

- 2) $\forall x \in A^\circ,\ \exists U_x \in \mathcal{T}$ tel que $U_x \subset A^\circ$ (on réécrit la définition de A° et la définition d'un voisinage)

  Mais maintenant, $\forall y \in U_x,\ y$ appartient à A avec l'ouvert $U_x \ni y$. Donc, A est un voisinage de y. Donc $U_x \subset A^\circ$

  Donc $\forall x \in A^\circ,\ U_x \subset A^\circ$

  Alors $A^\circ = \bigcup_{x \in A} U_x$ par axiome (ii), A° est un ouvert.

Définition

$(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $A \subset X$
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
$\overline{A} = \{x \in X \big| X \backslash A \text{ n'est pas un voisinage de } x\}$

Proposition 2

- 1) $A \subset \overline{A}$

- 2) $\forall A, \overline{A}$ est fermé

Exemples

- 1) $\overline{[0,1]} = [0,1]$

- 2) $\overline{(0,1)} = [0,1]$

Preuve de la Proposition 2

- 1) Clairement, $A \subseteq \overline{A}$ car $a \in A,\ a \notin X \backslash A$ et donc $X \backslash A$ ne peut pas être un voisinage de a.
- 2) On montre que $X \backslash \overline{A}$ est ouvert

  $X \backslash \overline{A} = \{x \in X | X \backslash A \text{ est un voisinage de } x\} = (X \backslash A)^{circ}$

  Donc par la Proposition 1, $X \backslash \overline{A}$ est un ouvert $\implies$ $\overline{A}$ est un fermé

$\square$

Nota Bene !

$$X \backslash \overline{A} = (X \backslash A^{\circ})(\text{ exo 6 série 1})$$

Théorème 1

$(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

- 1) $A \subset X$ est un ouvert de $\mathcal{T}$ si et seulement si $A = A^{\circ}$
- 2)$A \subset X$ est un fermé de $\mathcal{T}$ si et seulement si $A = \overline{A}$

Preuve Théorème 1

- 1) $\impliedby$ par Proposition 1 $\implies$ Soit A est ouvert. En particulier, il est lui-même un voisinage de tout point à l'intérieur de A :

  Rappel

  $X \supset N$ est un voisinage d'un point x s'il existe $U \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U \subset N$

  Dans la situation où $A \subset X$ est un ouvert et $x \in A$, on prend $U = A$ dans cette définition et on a que A est un voisinage de tout $x \in A$

  Cela montre que $A \subseteq A^{\circ}$. D'autre part, $A^{\circ} \subseteq A$ par Proposition 1.

  Donc $A = A^{\circ}$

- 2) $\Longleftarrow$ par Proposition 2

  $\Longrightarrow$ Soit A un fermé. Alors $X\backslash A$ est un ouvert $\Longrightarrow$ $X\backslash A = (X\backslash A)^\circ$ par Proposition 1

  Mais $(X\backslash A)^\circ = X\backslash\overline{A} \Longrightarrow X\backslash A = X\backslash\overline{A} \Longrightarrow A = \overline{A}$

$\square$

Corrolaire 1

- 1) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$
- 2) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$

Définition

$(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $A \subset X$ $\underset{\text{bord de } A}{\partial A} = \overline{A}\backslash A^\circ$

Corrolaire 2

Étant donné $A \subset X$, on a :

$$X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (X\backslash A)^\circ = \overline{A} \sqcup (X\backslash A)^\circ = A^\circ \sqcup \overline{X\backslash A}$$

$\partial A = \partial(X\backslash A)$

Remarque

∂A peut contenir des points de A et des points de $X\backslash A$

Exemple

$A = [0, 1) \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}})$
$A^\circ = (0, 1), \overline{A} = [0, 1], \partial A = \{0, 1\}$

Définition

$A \subset X$ est <u>dense</u> dans X si $\overline{A} = X$

Dans d'autre termes, $X\backslash\overline{A} = \emptyset \Longrightarrow (X\backslash A)^\circ = \emptyset$, ce qui veut dire que $X\backslash A$ ne contient aucun ouvert de $\mathcal{T} \Longleftrightarrow$ tout ouvert de $\mathcal{T}$ contient au moins un point de A

On a également :

A est dense si et seulement si $X = A^\circ \sqcup \partial A$ (Corrolaire 2)

Exemple

$\mathbb{Q} \subset (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{st}}$. Alors $\mathbb{Q}$ est dense (vu en Analyse 1. Tout intervalle ouvert contient un rationnel)

De plus, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

Prenons $0 \neq U \in \mathcal{T}_{\text{st}}$

$\exists \varepsilon > 0,\ x \in U$ tel que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$

On sait que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ est non-denombrable et $\mathbb{Q}$ est dénombrable

$\implies U$ contient nécessairement des points de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \implies U \not\subset \mathbb{Q} \implies \mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

2 Sous-espaces. Bases de topologies

Définition

$(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $Y \subset X$

On définit une topologie sur Y que l'on appelle la topologie induite par la topologie $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_Y$ en prenant :

$$\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y | U \in \mathcal{T}\}$$

$(Y, \mathcal{T}_Y)$, Y muni de la topologie induite $\mathcal{T}_Y$ est dit un sous-espace de $(X, \mathcal{T})$

Il faut voir que $\mathcal{T}_Y$ est bien une topologie.

- i) $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $Y = X \cap Y \implies \emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$
- ii) Soit $(U'_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{T}_Y$

  Alors $\bigcup_\alpha U'_\alpha = \bigcup_\alpha U_\alpha \cap Y = (\underbrace{\bigcup_\alpha U_\alpha}_{\in \mathcal{T}}) \cap Y \in \mathcal{T}_Y$ avec $(U_\alpha)_\alpha \in \mathcal{T}$
- iii) $\bigcap_{i=1}^n U'_i = \bigcap_{i=1}^n (U_i \cap Y) = \left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^n U_i}_{\in \mathcal{T}}\right) \cap Y \implies \bigcap_{i=1}^n U'_i \in \mathcal{T}_Y$ avec $U_i \in \mathcal{T}$

Exemples

- 1) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$

  $Y = [0, \infty)$ avec $\mathcal{T}_Y$ Soit $A = [0, 1)$ Dans $\mathcal{T}_{st}$, A n'est ni ouvert, ni fermé.

  Par contre, $A = [0, 1)$ est ouvert dans $\mathcal{T}_Y$ car $A = \underbrace{(-1, 1)}_{\in \mathcal{T}_{st}} \cap Y$

  $Y \backslash A = [1, \infty) \notin \mathcal{T}_Y$ car on ne peut pas écrire $[1, \infty)$ comme une intersection $Y \cap U$ avec $U \in \mathcal{T}$

  Donc A n'est pas fermé dans $\mathcal{T}_Y$

- 2) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ $Y' = (-\infty, 1)$ et $A = [0, 1)$

  $Y \backslash A = (-\infty, 0) \in \mathcal{T}_{Y'}$ car $Y' \backslash A = Y' \cap \underbrace{(-\infty, 0)}_{\in \mathcal{T}_{st}}$

  $\implies A$ est fermé dans $\mathcal{T}_{Y'}$

Par contre, A n'est pas ouvert dans $\mathcal{T}_{Y'}$ car on ne peut pas écrire $[0,1)$ comme une intersection d'un ouvert de $\mathcal{T}_{st}$ avec $(-\infty, 1)$

- 3) $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ $Y'' = [0,1)$

  Alors $A = [0,1)$ est fermé et ouvert dans $\mathcal{T}_{Y''}$

Exemple

$\mathbb{R}^{n+1} \supset B_{d_2}(0,1)$ la boule ouvert centrée en zéro de rayon 1.

$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : ||x||_2 < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : d_2(0,x) < 1\}$

$\partial B_2(0,1) = S^n$ la sphère de dimension $n \subset \mathbb{R}^{n+1}$

En particulier, $S^1 =$ le cercle unité.

On peut considérer les boules et les sphéres avec la topologie induite par $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$

Proposition 1

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un sous-espace et $A \subset X$

$\overline{A \cap Y}^{\mathcal{T}_Y} \subseteq \overline{A}^{\mathcal{T}} \cap Y$

De plus , si $A \subseteq Y$, alors c'est une égalité.

Remarque

En général, ce n'est pas une égalité :

Par exemple, pour $X = [-1,1],\ Y = [0,1],\ A = [-1,0,)$

$A \cap Y = \emptyset \implies \overline{A \cap Y}^{\mathcal{T}_Y} = \emptyset$

Mais $\overline{A} = [-1,0]$ et donc $\overline{A} \cap Y = \{0\} \neq \emptyset$

Preuve de la Proposition 1

Pas dans le cours, mais elle se trouve dans le livre "Introduction to Topology" de Th.Gamelin dans le chapitre 2.

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique $B \subset \mathcal{T}$ est une base de la topologie $\mathcal{T}$ si $\forall U \in \mathcal{T},\ U$ est une union d'élémetnts de B.

Exemple

Soit $(X, \mathcal{T}_{\text{disc}})$ et $B = (\{x\})_{x \in X} = \{A \in \mathcal{P}(X) \Big| |A| = 1\}$
$\mathcal{T}_{\text{disc}} = \mathcal{P}(X)$

Remarque

Par convention, $\emptyset$ s'obtient comme une union sur une famille vide.

Exemple

$\{B_{d_2}(x.r) \Big| x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ est une base de $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}^n$

Théorème 1

Soit X un ensemble. Une famille de sous-ensembles $B \subset \mathcal{P}(X)$ est une base topologique sur X si et seulement si :

- 1) $X = \bigcup\limits_{b \in B} b$
- 2) $\forall\, B_1, B_2 \in B\ \forall x \in B_1 \cap B_2,\ \exists\, b \in B$ tel que $x \in b \subset B_1 \cap B_2$

Preuve

$\implies$ Soient $\mathcal{T}$ une topologie sur X et B une base de $\mathcal{T}$. A voir : B satisfait les points 1) et 2) du Théorème 1 :

- 1) est vrai par définition d'une base car $X \in \mathcal{T}$
- 2) B une base $\implies$ $B \subset \mathcal{T}$, donc $\forall\, B_1, B_2 \in B$, on a $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$ $\implies$ $B_1 \cap B_2$ est une union d'éléments de B, et donc $\forall\, x \in B_1 \cap B_2, \exists\, b \in B$ tel que $x \in B$

$\impliedby$ Soit $B \subset P(X)$ satifaisant 1) et 2)

On définit $\mathcal{T} = \ U \in P(X) \Big| U$ une union d'éléments de $B\}$ et vérifie que $\mathcal{T}$ est bien une topologie sur X.

On vérifie les 3 axiomes d'une topologie :

- i) $\emptyset$ est une union vide par convention.

  $X \in \mathcal{T}$ par la condition 1) du Théorème 1

- ii) Une union d'éléments de B est une union d'éléments de B

- iii) Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. A voir : $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

  $U_1 = \bigcup_i B_i$, $U_2 = \bigcup_j B_j$ avec B_i et B_j des éléments de B.

  $U_1 \cap U_2 = \bigcup_i B_i \cup \bigcup_j B_j = \bigcup_{i,j} B_i \cap B_j$

  Par 2), $\forall\, i, j, \forall\, x \in B_i \cap B_j, \exists\, B_x \in B$ tel que $x \in B \subset B_i \cap B_j$

  Alors $B_i \cap B_j = \bigcup_{x \in B_i \cap B_j} B_x \in \mathcal{T}$ par définition de $\mathcal{T}$

$\square$

Nota Bene !

Une manière de comprendre le Théorème 1 est qu'une base détermine une topologie sur X.

(Par contre, une topologie peut admettre des bases différentes)

On peut aussi comparer des topologies différentes sur X à l'aide des bases, voir Série 3.

On peut aussi parler de sous-bases :

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ est une sous-base de $\mathcal{T}$ si l'ensemble de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Exemples

- Pour X un ensemble quelconque :

  $\{X \backslash \{x\} \big| x \in X\}$ est une sous-base de la topologie $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ sur X.

  $\to$ exo dans la série 3.

- Toute base est aussi une sous-base (trivialement)

- $\mathcal{S} = \{(-\infty, a) \big| a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, \infty) \big| b \in \mathbb{R}\}$ est une sous-base de $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}$.

Corollaire du Théorème 1

Soit X un ensemble, $\mathcal{S} \subset P(X)$ est une sous-base d'une topologie sur X si et seulement si $X = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$

Preuve

$\Longrightarrow$ Si $\mathcal{T}$ est une topologie sur X et $\mathcal{S}$ une sous-base de $\mathcal{T}$, alors tout ouvert dans $\mathcal{T}$ est une union des intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$.

En particulier, tout élément de X appartient à au moins un élément de $\mathcal{S}$, $\Longrightarrow X = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$

$\Longleftarrow$ Soit $\mathcal{S} \subset P(X)$ tel que $X = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$.

Posons $B =$ l'ensemble de toutes les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$.

Il suffit de vérifier que B est une base : on le fait en vérifiant que B satisfait les conditions 1) et 2) du Théorème 1 :

- 1) est vérifiée car $X = \bigcup_{U \in \mathcal{S}} U$ et $U \in \mathcal{S} \implies U \in B$
- 2) Soient $B_1, B_2 \in B$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$, donc $B_1 = \bigcap_{i \in I} U_i$ et $U_2 = \bigcap_{j \in J} U_j$ avec les U_i et les U_j des éléments de $\mathcal{S}$ et $|I|, |J| < \infty$

  Alors $B_1 \cap B_2 = \bigcap_{i \in I} U_i \cap \bigcap_{j \in J} U_j$ une intersection d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{S}$

  Donc $B_1 \cap B_2 = B$

  En particulier, $\forall\, x \in B_1 \cap B_2$, on peut prendre $B_x = B_1 \cap B_2 \in B$ et 2) est satisafait.

□

Proposition

Soit X un ensemble. Étant donné $\mathcal{S} \subset P(X)$ une sous-base de topologie, la topologie $\mathcal{T}_x$ déterminée par $\mathcal{S}$ sur X est la topologie la moins fine contenant $\mathcal{S}$, c'est à dire $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} = \bigcap_{\supset \mathcal{S}, \mathcal{T} \text{ une topologie sur } \mathcal{X}} \mathcal{T}$

Preuve

$\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \overset{?}{=} \bigcap_{\mathcal{T} \text{ une topologie sur } X, \mathcal{T} \supset \mathcal{S}}$

$\supset$ évident car $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ est une topologie sur X et $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$

$\subset$: A voir : $U \in \mathcal{T}_\mathcal{S} \implies U \in \bigcap\limits_{\mathcal{T} \supset \mathcal{S}}$

C'est à dire $\forall \mathcal{T}$ topologie sur X tel que $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$, $U \in \mathcal{T}$.

Soit $\mathcal{T}$ une telle topologie sur X. $U \in \mathcal{T}_\mathcal{S} \implies U$ est une union des intersections finies de $\mathcal{S}$.

Mais $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ et donc $U \in \mathcal{T}$ par axiomes (ii) et (iii) de topologie $\mathcal{T}$

$\square$

3 Applications continues. Homéomorphismes

Définition

Soient $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

$f : X \to X'$ est une application continue entre l'espace topologique $(X,\mathcal{T})$ vers l'espace topologique $(X',\mathcal{T}')$ si $\forall\, U \in \mathcal{T}'$ et $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$

Proposition 1

$f : X \to X'$ et $g : X' \to X''$ deux applications continues entre $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ et $(X',\mathcal{T}')$, $(X'',\mathcal{T}'')$ respectivement, alors $g \circ f : X \to X''$ est une fonction continue de $(X,\mathcal{T})$ vers $(X'',\mathcal{T}'')$

Démonstration. Prenons $X'' \supset U'' \in \mathcal{T}''$

$(g \circ f)^{-1}(U'') = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(U'')}_{\subset X', \in \mathcal{T}' \text{ car } g \text{ est continue}}) \in \mathcal{T}$ car f est continue.

□

Proposition 2

$f : X \to X'$ est continue entre $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{X}')$ si et seulement si $\forall\, F' \subset X'$ fermée pour $\mathcal{T}'$, $f^{-1}(F) \subset X$ fermé pour $\mathcal{T}$.

Exercice dans la série 3.

Exemples

- 1) Id_x sur $(X,\mathcal{T})$ est continue.

  Plus généralement, si $\mathcal{T},\mathcal{T}'$ sont deux topologies sur X et on considère $Id_x : (X,\mathcal{T}) \to (X,\mathcal{T}')$, alors Id_x est continue si et seulement si $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$

  $\implies \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$

  Soit $U' \in \mathcal{T}'$, $Id_x^{-1}(U') = U' \in \mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \implies U' \in \mathcal{T}$

  $\Longleftarrow$

  Soit $U' \in \mathcal{T}'$ Id_x continue $\implies U' = Id_x^{-1}(U') \in \mathcal{T}$ Donc $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$

- 2) a) $f : (X,\mathcal{T}_{disc}) \to (X',\mathcal{T}')$ est continue quelque soit $X, X', \mathcal{T}'$ car tout sous-ensemble de X est ouvert dans $\mathcal{T}_{disc}$

b) $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_{triv})$ est continue quelque soit $X, Y, \mathcal{T}$ car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(Y) = X$ ($\emptyset$ et Y sont les seuls ouverts de $\mathcal{T}_{triv}$)

- 3)
  - a) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $Y \subseteq X$. On considère Y avec la topologie induite $\mathcal{T}_Y$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un sous-espace topologique de $(X, \mathcal{T})$.

    Alors $\iota : \begin{array}{ccc} Y & \hookrightarrow & X \\ y \in Y & \to & y \in X \end{array}$ inclusion est continue de $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dans $(X, \mathcal{T})$

    En effet, soit $U \in \mathcal{T}$, $\iota^{-1}(U) = U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$ par définition de la topologie induite.
  - b) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continue

    Soit $Y \subseteq X$.

    Alors $f|_Y : Y \to X'$ est continue comme application de $(Y, \mathcal{T}_Y)$ vers $(X', \mathcal{T}')$

    $$\underset{Y \to X'}{f|_Y} = \underset{X \to X'}{f} \circ \underset{Y \to X}{\iota}$$

    Alors $f|_Y$ est continue par la Proposition 1.
  - c) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ continue. Soit $Y' \subseteq X'$ tel que $f(X) \subset Y'$

    Alors la restriction $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ est continue.

    En effet, $U' \in \mathcal{T}_{Y'}$, alors $U' = U \cap Y'$ avec $U \in \mathcal{T}'$ par la définition de la topologie induite.

    $f^{-1}(U') = f^{-1}(U \cap Y') = f^{-1}(U) \cap \underbrace{f^{-1}(Y')}_{=X} = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ car f est continue de $(X, \mathcal{T})$ vers $(X', \mathcal{T}')$
- 4) On aimerait dire qu'une fonction continue d'une variable réelle est aussi un exemple d'une application continue !

Rappel continuité

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle est continue si elle est continue en tout point $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, f est continue en x si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si $x \in (x - \delta, x + \delta)$, alors $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$.

Remarque

La définition "analytique" de continuité est une définition "locale", définie en un point x.

Théorème 1

Soient $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

$f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si f est continue en tout point, c'est à dire, $\forall\, x \in X$, pour tout voisinage N de $f(x)$, la préimage $f^{-1}(N)$ est un voisinage de x dans X.

Exemple

On revient à l'exemple 4) et on vérifie que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue au sens usuel, alors f satisfait la condition du Théorème 1 avec $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x \in \mathbb{R}$.

A voir : $\forall$ voisinage N de $f(x)$. $f^{-1}(N)$ est une voisinage de x.

"$f^{-1}(N)$ est un voisinage de x"$\Longleftrightarrow \exists\, \delta$ tel que $f^{-1}(N) \supset (x - \delta, x + \delta)$ par la définition de $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}$.

Mais on sait que N est un vosinage de $f(x)$, ce qui veut dire que pour $N, \exists\, \varepsilon > 0$ tel que $(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \subset N$.

On applique le fait que f est une fonction contiue. (1)

Prenons N un voisinage quelconque de $f(x) \to \varepsilon$ (1)

car f est une fonction continue, pour ce $\varepsilon, \exists\, \delta$ tel que si $x \in (x - \delta, x + \delta)$, alors $f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$

Cela veut dire exactement que $f^{-1}(N) \supset (x - \delta, x + \delta)$

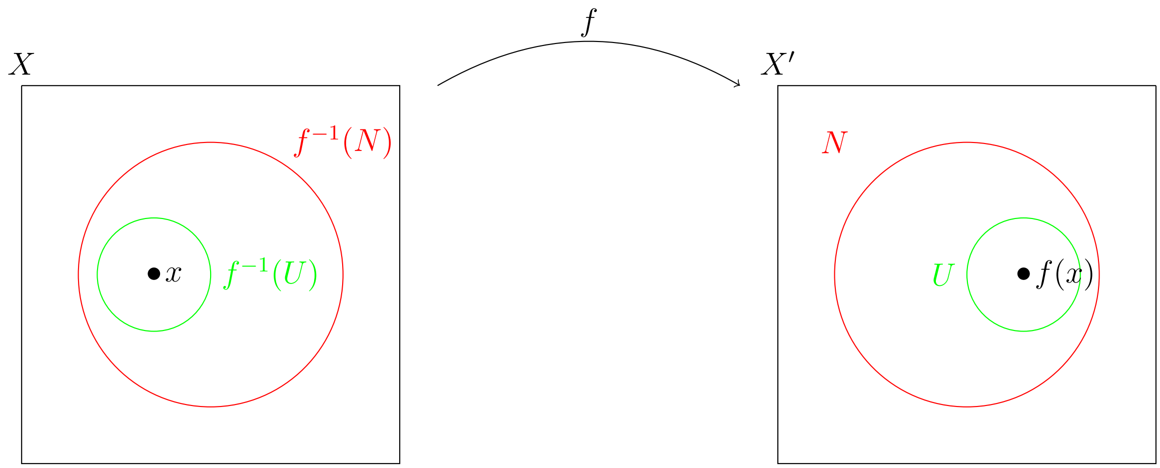
Ce qui veut dire exactement que $f^{-1}(N)$ est un voisinage de x.

Ainsi, par le Théorème 1, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ vers $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$

Démonstration. $\Longrightarrow$

Soit donc f continue. Fixons $x \in X$, et un voisinage N de $f(x) \in X'$. À voir : $f^{-1}(N)$ est un voisinage de $x \in X$

Par définition du voisinage, $\exists U \in \mathcal{T}'$ tel que $f(x) \in U \subset N$



On a donc : $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(N)$, avec $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ car $U \in \mathcal{T}'$ et f est continue.

$\Longleftarrow$

Soit f continue en tout $x \in X$. Fixons $U \in \mathcal{T}'$.

Á voir : $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$

U est ouvert $\implies$ U est voisinage de tous ses éléments. En particulier : $\forall\, x$ tel que $f(x) \in U$, U est voisinage de $f(x)$.

Ainsi, par l'hypothèse appliquée à $N = U$, $\forall\, x \in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ est voisinage de $x \implies f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$

$\square$

Proposition 3

Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ une application, avec $\mathcal{T}'$ engendrée par une sous-base $S \subset \mathcal{T}'$. Alors f est continue $\iff \forall\, U \in S$, on a $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$

Démonstration. $\implies$

Trivial, car $S \subset \mathcal{T}'$

$\Longleftarrow$

Soit $O \in \mathcal{T}'$. Par définition d'une sous-base, $\exists\, \{U_{i_j}\}_{i \in I,\, j=1,\cdots,n(i)} \subset S$ tel que $O = \bigcup_{i \in I} U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{n(i)}}$

On a :

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_{n(i)}} \right)$$

$$= \bigcup_{i \in I} f^{-1}\left(U_{i_1}\right) \cap \cdots \cap f^{-1}\left(U_{i_{n(i)}}\right) \in \mathcal{T}$$

On a donc $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$ par l'hypothèse $\left(f^{-1}(U_{i_j})\right) \in \mathcal{T} \forall\, i, j$ et par définition d'une topologie.

$\square$

Terminologie

Une application $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est dite ouverte si $\forall\, U \in \mathcal{T}$, on a $f(U) \in \mathcal{T}'$

Remarque

Si $\mathcal{T}'$ est engendrée par une base B, alors $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est ouverte $\iff \forall\, U \in B$, on a $f(U) \in \mathcal{T}'$ (exo 2 série 4)

Remarque

Une application $f : (X, \mathcal{T}) \to (X'\mathcal{T}')$ est un homéomorphisme si f est continue bijective et $f^{-1} : (X', \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ est continue.

S'il existe un tel homomorphisme, alors les espaces topologiques X et X' sont dits homéomorphes, noté $X \cong X'$

Remarques

- 1) Les homéomorphismes jouent en topologie le rôle que jouent les isométries linéaires en algèbre linéaire, les isométries en théorie des groupes, les bijections en théorie des ensembles.

  La relation $\cong$ est une relation d'équivalence (exo 3, série 4) et on a tendance à "identifier" 2 espaces homéomorphes. (en topologie)

- 2) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est un homéomorphisme $\iff$ f est bijective, continue et ouvert (immédiat)

- 3) $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est un homéomorphisme $\iff$ f est bijetive et f définit une bijection entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ (exo 4, série 4)

Notation

$$Homeo(X) = \{f : X \to X \big| f \text{ homéomorphe } \}$$

Proposition 4

$Homeo(x)$ est un groupe (pour la composition des applications) qui agit sur l'ensemble X via

$$\begin{array}{rcl} Homeo(X) \times X & \to & X \\ x & \to & f \cdot x = f(x) \end{array}$$

Démonstration.

- La loi est interne : $f, g \in Homeo(X)$, à voir : $g \circ f \in Homeo(X)$
  - f, g continues $\implies$ $g \circ f$ continue
  - f, g bijectives $\implies$ $g \circ f$ bijective
  - f^{-1}, g^{-1} continues $\implies$ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ est continue

  $\implies$ $g \circ f$ est un homéomorphisme
- La loi est associative : OK
- Élément neutre : $Id_X \in Homeo(X)$ (immédiat)
- Inverse : $f \in Homeo(X) \implies f^{-1} \in Homeo(X)$ (immédiat)

  Action de groupe :
- $\forall\, x \in X,\ Id_X \cdot x = Id_X(x) = x$
- $\forall\, f, g \in Homeo(X), \forall\, x \in X : f \cdot (g \cdot x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = (f \circ g) \cdot x$

□

Terminologie

Une proriété d'un sous-ensemble $Y \subset X$ est une propriété topologique si ellle invariante par l'action de $Homeo(X)$

(On peut comprendre la topologie comme l'étude des propriétés invariantes par cette action)

Exemples

- 1) Être un espace topologique discret est une propriété topologique, c'est à dire :

  Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique discret et $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ un homéomorphisme, alors $(X', \mathcal{T}')$ est discret.

  ($\forall\, U \subset X'$, on a $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ discrète $\overset{f \text{ ouverte}}{\Longrightarrow}$ $U = f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{T}'$, alors $\mathcal{T}'$ est discrète)

- 2) Dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$, "être borné" (pour la métrique standard) n'est pas une propriété topologique.

Exemples d'homéomorphismes

- 1) Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ donnée par $f(x) = 3x - 2$

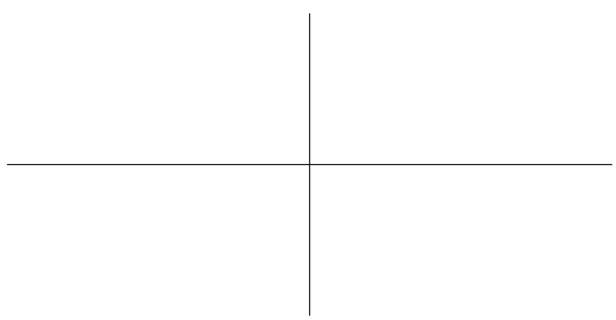
  C'est un espace topologique d'inverse $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \dfrac{1}{3}(y - 2)$

  f, g continues au sens ε, δ (Analyse I) $\implies$ f, g continues.

- 2) Soient $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})$ et $X = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ avec $\mathcal{T}'$, la topologie induite par $\mathcal{T}_{st}$

  Soit $f : \mathbb{R} \to (-1, 1), f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$

  f est bijective d'inverse $g(y) = \dfrac{y}{1 - |y|}$



Comme ci-dessus, f, g sont continues (par Analyse I + Théorème 1)

Conclusion

f est un homéomorphisme et du coup $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$

(alors que $(-1, 1)$ est borné et $\mathbb{R}$ pas !)

- 3) carré équivalent à un cercle. (exo 6, série 4)

Attention

f est continue et bijective $\not\Longrightarrow$ f un homéomorphisme !

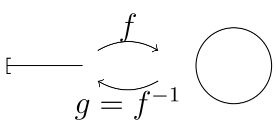
Exemples

- 1) $f = Id_X : (X, \mathcal{T}_{disc}) \to (X, \mathcal{T}_{triv})$ est bijective et continue.

  Mais $f^{-1} = Id_X : (X, \mathcal{T}_{triv}) \to (X, \mathcal{T}_{disc})$ n'est pas continue si $|X| > 1$

- 2) Soient $X = [0, 1) \subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}$ et $X' = S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, muni de la topologie induite par $\mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}^2$

  Soit $f : [0, 1) \to S^1$ donnée par $f(t) = e^{2\pi t}$



-
  - f est clairement bijective
  - f est continue, f est la restriction de $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$

    aux sous-espaces [0,1) $\subset \mathbb{R}$ et $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

    $\tilde{f}$ est continue au sens ε, δ (Analyse I) $\implies$ $\tilde{f}$ est continue $\implies$ f continue.

- $g = f^{-1} : S^1 \to [0, 1)$ n'est pas continue (en le point $1 \in S^1$)

  [Intuitivement, g "casse" le cercle en 1, pas continu]

  En effet, soit $N = [0, 1/4)$: c'est un voisinage de $g(1) = 0 \in [0, 1)$, $N = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \cap [0, 1)$

  En revanche, $g^{-1}(N) = f(N)$ n'est pas un voisinage de $1 \in S^1$

  En effet, $g^{-1}(N)$ est voisinage de $1 \in S^1$ $\implies$ $\exists \varepsilon > 0$ tel que $S^1 \cap B(1, \varepsilon) \subset N$

  Or, c'est impossible : $\forall, \varepsilon > 0, B(1, \varepsilon) \cap S^1 \not\subset g^{-1}(N)$ car "on dépasse en bas"

4 Espace métriques

Définition

Soit X un ensemble, $d : X \to X$ est une métrique sur X si :

- (i) $d(x,y) \geq 0 \, \forall \, x, y \in X$
- (ii) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$
- (iii) $d(x,y) = d(y,x) \, \forall \, x, y \in X$
- (iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \, \forall \, x, y, z \in X$. C'est l'inagalité du triangle

Si un ensemble X est muni d'une métrique d, alors on parle d'un espace métrique (X, d).

Exemples

- 1) Métrique discrète : $\begin{cases} d(x,y) = 1 & \text{si } x \neq y \, x, y, \in X \\ d(x,x) = 0 & \forall \, x \in X \end{cases}$
- 2) $X = \mathbb{R}$, $d_2(x,y) = |x - y|$

  Plus généralement, si $X = \mathbb{R}^n, n \geq 1$:

  $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

  On a noté cette métrique d_2

  Par analogie, on peut définir pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

  $x, y \in \mathbb{R}^n \; d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^p \right)^{1/p}$

  Aussi, $d_\infty(x,y) = \underset{i=1,\cdots,n}{max} |x_i - y_i|$

Définition

Soit (X, d) un espace métrique. Soit $x \in X, r > 0$

$B_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ la boule ouverte de rayon r centrée en x.

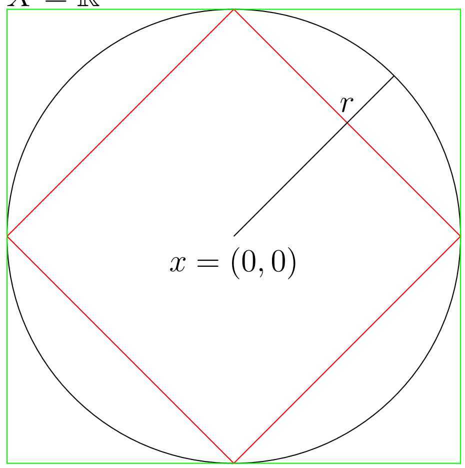
$B'_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$ la boule fermée de rayon r centrée en x.

Voir série 5. dans $\mathbb{R}^n$ $B'_d(x,r) = \overline{B_d(x,r)}$

Pour (X, d), on a en général $\overline{B_d(x,r) \subseteq B'_d(x,r)}$, mais l'égalité n'est pas vraie tout le temps.

$S_d(x,r)\{y \in X \Big| d(x,y) = r\}$ la sphère de rayon r centrée en X.

$X = \mathbb{R}^2$



$x = (0,0)$

$B_{d_2}(x,r)$ en noir

$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$B_{d_1}(x,r)$ en rouge

$B_{d_\infty}(x,r)$ en vert

Remarque

$B_{d_p}(x,r) \subseteq B_{d_q}(x,r) \, \forall \, p \leq q$ et $p, q \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$

- 3) X = fonctions continues sur $[0,1]$

  $d_\infty(f_1, f_2) = \underset{x\in[0,1]}{max} |f_1(x) - f_2(x)|$

  On appelle cette métrique la métrique L^∞

  Et en général $d_p(f_1, f_2) = \left(\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$ C'est la métrique L^p sur X.

- 4) Si $Y \subseteq X$, alors la restriction d'une métrique d sur X est une métrique $d|_Y$ sur Y.

  $(Y, d|_Y)$ est un sous-espace (métrique) de (X, d)

Si X est un ensemble muni d'une métrique d, alors il est aussi muni d'une topologie "induite par la métrique", notée $\mathcal{T}_d$. Cela découel du Théorème suivant :

Théorème 1

Soit (X, d) un espace métrique

La famille $B = \{B_d(x, r) \big| x \in X, r > 0\}$ est une base de topologie sur X.

C'est cette topologie déterminée par la base B que l'on appelle la topologie induite par d.

Démonstration. On utilise le Théorème 1 du paragraphe 2 qui caractérise les bases de topologies parmi les familles de sous-ensembles dans un ensemble X. □

Rappel

$B \subseteq X$ est une base d'une topologie sur X si et seulement si :

- 1) $X = \bigcup_{b \in B} b$
- 2) $\forall b_1, b_2 \in B, \forall\, x \in b_1 \cap b_2$, $\exists\, b \in B$ tel que $x \in b \subset b_1 \cap b_2$

Le théorème 1 du paragraphe 2 nous dit en particulier que si, pour un ensemble X, on a une famille de sous-ensembles satisfaisant 1) et 2), alors on a une topologie sur X (et cette famille est une sous-base de cette topologie).

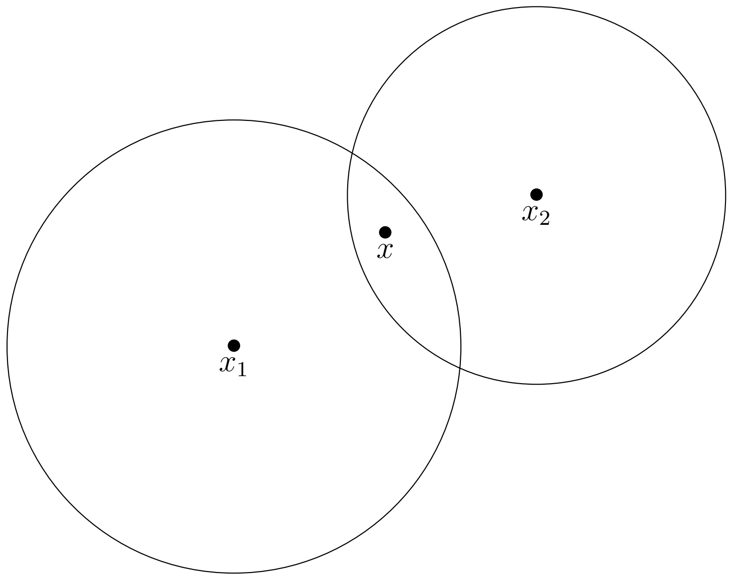
Pour montrer notre Théorème 1, on vérifie que 1) et 2) sont satisfaites pour la famille B de boules (définie à partir de la métrique d).

La condition 1) est satisfaite trivialement car $\forall\, x \in X$, $x \in B(x, r) \,\forall\, r > 0$

Il reste à vérifier la condition 2).

Soient $b_1, b_2 \in B$: $b_1 = B_d(x_1, r_1), b_2 = B_d(x_2, r_2)$

Soit $x \in b_1 \cap b_2$: $d(x, x_1) < r_1$ et $d(x, x_2) < r_2$



On cherche δ tel que $B(x,\delta) \subset b_1 \cap b_2$

$r_1 - d(x, x_1) = \delta_1 > 0$ et $r_2 - d(x, x_2) = \delta_2 > 0$

Prenons $0 < \delta < min(\delta_1, \delta_2)$

Alors $(x_1 - \delta) - d(x, x_1) = \delta_1 - \delta > 0$ et $(x_2 - \delta) - d(x, x_2) = \delta_2 - \delta > 0$ On montre que $B(x,\delta) \subset b_1 \cap b_2$

Soit $z \in B(x, \delta)$. À voir : $d(z, x_1) < r_1$ et $d(z, r_2) < r_2$

Par l'inégalité du triangle

$d(z, x_1) \leq d(z, x) + d(x, x_1) < \delta + r_1 - \delta_1 < r_1$

On fait la même chose pour $d(z, x_2) < r_2$

$\square$

Rappel

B une base de topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble $X \iff$ ouverts de $\mathcal{T}$ sont des réunions d'éléments de B.

Donc les ouverts de la topologie $\mathcal{T}_d$ induite par une métrique d sont des réunions de boules ouvertes.

En particulier $\mathcal{T}_{d_2} = \mathcal{T}_{st}$ sur $\mathbb{R}^n$. C'est comme ça que l'on a défini $\mathcal{T}_{st}$ dans le paragraphe 1.

Aussi, $\mathcal{T}_{d_{disc}} = \mathcal{T}_{disc}$

Définition

d, d' deux métriques sur un ensemble X sont équivalentes $d \sim d'$ s'il existe $C, C' > 0$ tel que $\forall\, x, y \in X$, $C \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C' \cdot d(x,y)$

C'est une relation d'équivalence $\rightarrow$ voir série 5

Proposition

Soit X un ensemble muni de deux métriques équivalentes $d \sim d'$. Alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$

Démonstration. Dans le paragraphe 2, on a vu que $\mathcal{T}_{B'} \supset \mathcal{T}_B$ si et seulement si $\forall\, x \in X$, $\forall\, b \in B$ tel que $x \in B$, $\exists\, b' \in B'$ tel que $x \in b' \subset B$ $(*)$

On va se servie de cette caractérisation pour $B = \{B_d(x,r)\Big| x \in X, r > 0\}, B' = \{B_{d'}(x,r)\Big| x \in X, r > 0\}$

Si on vérifie $(*)$ pour montrer $\mathcal{T}_B \subset \mathcal{T}_{B'}$ et $\mathcal{T}_{B'} \subset \mathcal{T}_B$.

La proposition sera démontrée car $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_B, \mathcal{T}_{d'} = \mathcal{T}_{B'}$

On va utiliser l'équivalence $d \sim d'$ qui implique :

$B_{d'}(x, Cr) \subset B_d(x,r) \subset (B_{d'}(x, C'r')$ $(**)$

Soit $x \in X$, $b \in B, x \in b = B_d(y,r)$ pour un certain $y \in X, r > 0$

b ouvert $\implies \exists\, \delta$ tel que $B_d(x,\delta) \subset b$

Mais alors $B_{d'}(x, C\delta) \subset B_d(x,\delta) \subset b$

$\implies \mathcal{T}_B \supset \mathcal{T}_{B'}$

En utilisant l'autre partie de $(**)$, on obtient $\mathcal{T}_B' \supset \mathcal{T}_B$

$\square$

Revenons à l'exemple 2) des métriques d_p sur $\mathbb{R}^n$.

On a $d_\infty \sim d_{p_1} \sim d_{p_2}\, \forall p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$

Plus précisément, on peut montrer, pour comparer d_∞ et $d_p\, \forall\, p$:

$d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq n^{1/p}\, d_\infty(x,y)\, \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

Pour $n = 1$, on a $d_{p_1} = d_{p_2} = d_\infty$

$n > 2$. Par exemple : $p = 2$ on veut montrer :

$$\underset{i=1,\cdots,n}{max} |x_i - y_i| \underset{(1)}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_1 - y_i|^2} \underset{(2)}{\leq} \sqrt{n}\, \underset{i=1,\cdots,n}{max} |x_i - y_i|$$

- (1) : $\overset{\forall\, i}{=\!=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \geq \sqrt{|x_i - y_i|^2} = |x_i - y_i|$

$$\implies \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2} \geq \max_{i=1,\cdots,n}|x_i - y_i|$$

- (2) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{n \max_{i=1,\cdots,n}|x_i - y_i|^2} = \sqrt{n}\max_{i=1,\cdots,n}|x_i - y_i|$

$$\implies \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|^2} \leq \sqrt{n}\max_{i=1,\cdots,n}|x_i - y_i|$$

Donc $\mathcal{T}_{d_p} = \mathcal{T}_{st}\,\forall\, p \in \mathbb{N}$

Pas FINI

$d_{disc} \not\sim d_p$ sur $\mathbb{R}^n$ par Proposition , car on a vu que $\mathcal{T}_{disc} \neq \mathcal{T}_{st}$

Nota Bene !

Deux métriques qui ne sont pas équivalentes peuvant quand même induire la même topologie.

Soit (x, d) un espace métrique.

À partir de la métrique d, on définit la métrique $\overline{d}(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

$\overline{d}$ est une exemple d'une métrique bornée, c'est à dire $\exists\, c > 0$ tel que $\forall\, x, y \in X, d(x, y) < c$

On peut montrer que $\mathcal{T}_{\overline{d}} = \mathcal{T}_d$ Pour tout $d_2 \not\sim \overline{d_2}$ (par exemple)

Remarque

Cela montre que être borné est une propriété métrique et non topologique.

Proposition 2

Une application $f : (X, \mathcal{T}_{d_X}) \to (Y, \mathcal{T}_{d_y})$ est continue en $x \in X \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall\, x' \in X$ avec $d_X(x, x') < \delta$, on a $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Démonstration. Exactement la preuve que dans $\mathbb{R}^n$, en remplaçant $||x - x'||$ par $d_X(x, x')$ et $||f(x) - f(x')||$ par $d_Y(f(x), f(x'))$. La preuve est aussi dans le polycopié. $\square$

Corollaire 3

Un application $f : (X, \mathcal{T}_{d_X}) \to (Y, \mathcal{T}_{d_Y})$ est continue $\iff \forall\, x \in X, \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que $\forall\, x' \in X$ avec $d_X(x, x') < \delta$, on a $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Démonstration. Théorème 1 du paragraphe 3 et Proposition 2. $\square$

Définition

Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit <u>métrisable</u> s'il existe une métrique d sur X tel que $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$

Exemples

- 1) Un espace discret est métrisable ($\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{T}_d$, d la métrique discrète)
- 2) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{st})$ est métrisable, car $\mathcal{T}_{st} = \mathcal{T}_d$ avec $d = d_2$, la métrique euclidienne. (ou $d = d_p$ avec $p \in [1, \infty]$)
- 3) Soit X quelconque. Alors $(X, \mathcal{T}_{triv})$ est métrisable $\iff |X| \leq 1$

  En effet : $[\iff], |X| \leq 1 \implies \mathcal{T}_{triv} = \{\emptyset, X\} = \mathcal{T}_{disc}$, métrisable par l'exemple 1.

  $[\implies]$ Supposons $|X| \geq 2$, et montrons que $\mathcal{T}_{triv} = \{\emptyset, X\} \neq \mathcal{T}_d$, pour tout d.

  Soit donc d une métrique sur X, on veut rtouver $U \in \mathcal{T}_d$, avec $U \neq \emptyset, U \neq X$.

  Comme $|X| \geq 2$, on a $x \neq y \in X$

  Par définition de d, $r := d(x, y) > 0$. Posons $U = B_d(x, r)$.

  On a $U \neq 0$ (car $x \in U$). $U \neq X$ (car $y \notin U$) et $U \in \mathcal{T}_d$ par définition.
- 4) Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est métrisable $\iff \mathcal{T} = \mathcal{T}_{disc}$ (exercice 1, série 6)

5 Topologie produit, topologie quotient

- Paragraphe 1-3 : Les bases de la théorie
- Paragraphe 4 : Une classe importante d'exemples
- Paragraphe 5 : Comment construire de nouveaux espaces topologiques avec d'anciens.

5.1 Topologie produit

Rappels de théorie des ensembles

Le produit (cartésien) de 2 ensembles X_1 et X_2 est $X_1 \times X_2 := \{x = (x_1, x_2) \Big| x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\} = \{x : 1, 2 \to X_1 \cup X_2 \Big| x(1) := x_1 \in X, x(2) := x_2 \in X_2\}$

Cette seconde définition plus formelle se généralise comme suit :

Le produit d'une famille d'ensembles $\{X_i\}_{i\in I}$ indexée par un ensemble I quelconque est défini par

$$\prod_{i\in I} X_i := \left\{ x : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \Big| \forall\, i \in I, x(i) = x_i \in X_i \right\}$$

On a les projections $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} X_i \to X_j$, $\pi_j(x) = x(j) = x_j \in X_j$, la projection sur la $j$ème coordonnée. On note souvent $x \in \prod\limits_{i\in I} X_i$ se note $x = (x_i)_{i\in I}$

Exemples

- 1) Si $I = \{1\}$, alors le produit de $\{X_1\}$ est :

$$\prod_{i\in I} X_i = \left\{ x : \{1\} \to X_1 \Big| x(1) \in X_1 \right\} = X_1$$

- 2) Si $I = \{1, 2\}$, on obtient

$$\prod_{i\in\{1,2\}} X_i = X_1 \times X_2$$

  comme vu plus haut.

- 3) Plus généralement, si $|I| < \infty$, disons $I = \{1, 2, \cdots, n\}$, alors on note :

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \left\{ x : \{1, \cdots, n\} \to \bigcup_{i=1}^{n} X_i \Big| x(i) \in X_i\, \forall\, i = 1, \cdots, n \right\}$$

- 4) Si $X_i = X \, \forall \, i \in I$, on obtient alors :

$$\prod_{i \in I} = \left\{ x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i = X \middle| x(i) \in X_i = X \, \forall \, i \right\} = \{ x : I \to X \} := X^I$$

Si I est fini, disons $|I| = n$, alors on le note $X^n = \overbrace{X \times \cdots \times X}^{n}$

Supposons que $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques.

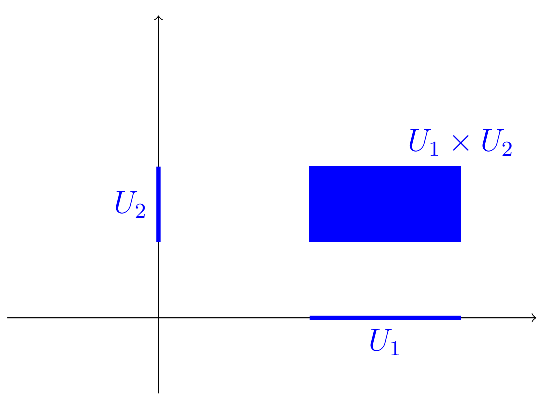
Question ?

Y a-t-il une topologie naturelle sur $\prod_{i \in I} X_i$?

Réponse 1

Considérons le sous-ensemble de $\mathcal{P}\left(\prod_{i \in I} X_i \right)$:

$$\mathcal{B}' := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \subset \prod_{i \in I} X_i \middle| U_i \in \mathcal{T}_i \, \forall \, i \in I \right\}$$



En général, ce n'est pas une topologie, mais c'est une base : elle satisfait les points du Théorème 1 du paragraphe 2.

- 1) Comme $X_i \in \mathcal{T}_i \, \forall \, i$, on a $X = \prod_{i \in I} X_i \in \mathcal{B}'$, d'où $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B = X$
- 2) Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{B}'$, c'est à dire $B_1 = \prod_{i \in I} U_i$ et $B_2 = \prod_{i \in I} V_i$ avec $U_i, V_I \in \mathcal{T}_i \, \forall \, i \in I$ On a alors $B_1, \cap B_2 \in \mathcal{B}'$ puisque :

$$B_1 \cap B_2 = \left(\prod_{i \in I} U_i \right) \cap \left(\prod_{i \in I} V_i \right) = \prod_{i \in I} \underbrace{(U_i \cap V_i)}_{\in \mathcal{T}_i \text{ par la définition de topologie}} \in \mathcal{B}'$$

On peut donc prendre $B_3 = B_1 \cap B_2$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ induit une topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$, la topologie des boîtes sur $\prod_{i\in I} X_i$

Exemples

- 1) Si $(X_i, \mathcal{T}_i)$ est discret $\forall\, i$, alors $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'} = \mathcal{T}_{disc}$ sur $\prod_{i\in I} X_i$

  $\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} U_i \subset \prod_{i\in I} X_i \middle| U_i \in \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(X_i) \right\}$ contient tous les singlotons.

  $(\{x = (x_i)_{i\in I}\}) = \prod_{i\in I} \{x_i\}$ avec $\{x_i\} \in \mathcal{T}_i = \mathcal{P}(X_i)$

  Ainsi, tout $U \in \prod_{i\in I} X_i$ s'écrit comme l'union de ses éléments, donc l'union de $\mathcal{B}'$, donc est un ouvert de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$

- 2) Considérons $I = \mathbb{N}^*$ et $(X_i, \mathcal{T}_I) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{st})\, \forall\, i \in I = \mathbb{N}^*$

  Tentons de comprendre la topologie des boîtes sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$

  Par exemple, l'ensemble $U := (-1, 1) \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \times \cdots = \prod_{i\in\mathbb{N}^*} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right)$

  Considérons l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, f(t) = (t, t, t, \cdots)$

  Elle n'est <u>pas</u> continue pour la topologie des boîtes !

  En effet, $f^{-1}(U) = \left\{ t \in \mathbb{R} \middle| f(t) \in U \right\} = \left\{ t \in \mathbb{R} \middle| t \in \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) \forall\, i \in \mathbb{N}^* \right\} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}^*} \left(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right) = \{0\}$

  Donc $f^{-1}(U)$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$!

Problème

f est très naturelle, mais pas continue : $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ est trop fine !

D'où la réponse 2 :

Réponse 2

Considérons $S \subset \mathcal{P}\left(\prod_{i\in I} X_i\right)$ donné par :

$$S := \left\{ \pi_j^{-1}(U_j) \middle| j \in J, U_j \in \mathcal{T}_j \right\}$$

En clair, les éléments de S sont $\pi_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i \in J, i \neq j} X_i$

C'est une sous-base ($X_j \in \mathcal{T}_j \implies \pi_j^{-1}(X_j) = \prod_{i \in I} X_i \in S$, donc OK)

Cela induit une topologie $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_{prod}$ sur $\prod_{i \in I} X_i$ la topologie produit.

La base correspondante est donnée par les intersections finies d'éléments de S, c'est à dire :

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in I/J} X_i \middle| J \text{ fini } \subset I, U_j \in \mathcal{T}_j \,\forall\, j \in J \right\}$$

Par définition, les éléments de $\mathcal{T}_{prod}$ sont les unions d'éléments de $\mathcal{B}$.

Remarques

- 1) Pour I fini, on a $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, d'où les topologies produit et des boîtes coïncident.

  Mais pour I infini, $\mathcal{T}_{prod}$ est moins fine !

- 2) Considérons les projections $\pi_j : \prod_{iinI} X_i \to X_j$

  π_j est continue $\forall\, j$ (pour une topologie $\mathcal{T}$ sur $\prod_{i \in I} X_i$) $\iff \forall\, U_j \in \mathcal{T}_j$, $\pi_j^{-1}(U_j) \in \mathcal{T}, \forall\, j \iff S \subset \mathcal{T}$

  $\iff \mathcal{T}_{prod} = \mathcal{T}_S \subset \mathcal{T}$

Conclusion

$\mathcal{T}_{prod}$ est la topologie la moins fine tel que π_j est continue $\forall\, j \in I$

- 3) Une application $f : X \to \prod_{i \in I} X_i$ est équivalente à une famille $\{f_i : X \to X_i\}_{i \in I}$ tel que $\pi_i \circ f = f_i$

  (voir exo 2 série 6)

5.2 Topologie des quotients

Rappel

- Soit X un ensemble, et $\sim$ une relation d'équivalence sur X.

- $X/\sim = \{[x] \big| x \in X\}$ et $X = \bigsqcup_{x \in X} [x]$

- $\begin{pmatrix} X & \to & {}^{X}/_{\sim} \\ x & \to & [x] \end{pmatrix}$ la projection de quotient.

Soit X, Y deux ensembles, $f : X \to Y$ est une application, X muni d'une relation d'équivalence $\sim$ tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$

Dans cette situation, f "passe au quotient", ce qui veut dire que $\overline{f} : \begin{pmatrix} {}^{X}/_{\sim} & \to & Y \\ [x] & \to & f(x) \end{pmatrix}$ est bien définie $\forall\, x \in [x]$

On a alors que $f = \overline{f} \circ \pi$, $f(x) = \overline{f}(\pi(x))$

$\overline{f}$ est injective $\iff x \sim x' \iff f(x) = f(x')$

Remarque

Si on a $f : X \to Y$, on peut considérer la relation d'équivalence sur X en mettant $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$

Alors : $\overline{f}$: ${}^{X}/_{\text{cette relation}} \to Y$ rend $\overline{f}$ injective. De plus, si on restreint notre application en l'envoyant sur $f(X) \subseteq Y$, on aurait alors : $g : \begin{pmatrix} {}^{X}/_{\sim} & \to & f(X) \\ [x] & \to & f(x) \end{pmatrix}$ $\forall\, x \in [x]$ qui est bijective. $(*)$

Un cas particulier :

Soit X un ensemble, $A \subseteq X$. Définissons une relation : $x \sim y$ si $x = y$ avec $x, y \in A$.

On peut vérifier que c'est bien une relation d'équivalence.

Notation

${}^{X}/_{A}$ Cela vient à collapser tous les points de A en un seul point dans ${}^{X}/_{A}$

Exemple

$X = [0, 1], A = \{0, 1\}$

${}^{[0,1]}/_{\{0,1\}}$ sera alors en bijection avec S^1.

On a vu $f : \begin{pmatrix} [0, 1] & \to & S^1 \\ t & \to & e^{2\pi it} \end{pmatrix}$ surjective et $x \sim x' \implies f(x) = f(x')$ car $f(0) = f(1)$

De plus, $f(t) \neq f(t')\, \forall\, t \neq t' \in (0, 1)$. Donc par $(*)$, $\overline{f}$ est une bijection ${}^{[0,1]}/_{\{0,1\}} \to S^1$

Maintenant, on aimerait compléter cet exemple en introduisant une topologie sur le quotient.

Définition

Soit X un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\sim$.

On définit la "topologie quotient" en mettant $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}\left({}^{X}\!/\!{\sim}\right)$ avec $\mathcal{T} = \left\{ U \in \mathcal{P}\left({}^{X}\!/\!{\sim}\right) \middle| \pi^{-1}(U) \text{ ouvert dans } X \right\}$

C'est la topologie la plus fine sur $X\Big|_{\sim}$ qui rend la projection π continue.

En revenant à notre construction $(*)$, admettons de plus que $f : X \to Y$ est une application continue.

$(X, Y$ sont des espaces topologiques, X est muni d'une relation d'équivalence tel que $x \sim x' \implies f(x) = f(x'))$

Alors $g : {}^{X}\!/\!{\sim} \to f(X)$ est bijection continue entre ${}^{X}\!/\!{\sim}$ muni de la topologie quotient et Y.

En effet, on a vu que si $f : X \to Y$ continue, alors $\tilde{f} : X \to f(X)$ est surjective et continue.

De plus, f continue $\implies \overline{f}$ continue, $\overline{f} : \begin{pmatrix} {}^{X}\!/\!{\sim} & \to & Y \\ [x] & \to & f(x) \end{pmatrix}$

Soit $V \subset Y$ un ouvert, $\overline{f}^{-1} =$ A compléter.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & Y \arrow[dl, dash] \\ {}^{X}\!/\!{\sim} & \end{tikzcd}$$

$\underbrace{\pi(f^{-1}(\underbrace{V}_{\text{ouvert de } Y}))}_{\text{ouvert de } X} \subset {}^{X}\!/\!{\sim}$

Finir le dessin

Mais $A \subset {}^{X}\!/\!{\sim}$ est ouvert si et seulement si (par définition de la topologie) $\pi^{-1}(A)$ est ouvert dans X.

Ici, $A = \pi\left(f^{-1}\left(V\right)\right)$ et on sait qu'il est ouvert car f est continue et $V \subset Y$ est ouvert.

Donc $\pi(f^{-1}(V))$ est ou ouvert de ${}^{X}\!/\!{\sim}$

ça montre que $g : {}^{X}\!/\!{\sim} \to f(X)$ est une bijection continue.

Si de plus, f était une application ouvert, alors g serait aussi ouverte (vérification similaire), et dans ce cas, on aurait $g : {}^{X}\!/\!{\sim} \to f(X)$ un homéomorphisme.

Dans l'exemple $f : \begin{matrix} [0,1] & \to & S^1 \\ t & \to & e^{2\pi i t} \end{matrix}$, f n'est pas ouverte (Paragraphe 3 : exemple d'une application continue mais pas ouvert).

Néanmoins, : $\overline{f} : {}^{[0,1]}\!/\!{\{0,1\}} \to S^1$ est un homéomorphisme !

En effet, être ouvert pour f est une condition suffisante pour que g soit un homéomorphisme, mais pas nécessaire.

Montrons que $\overline{f}$ est une application ouvert, c'est à dire que l'image d'un ouvert est aussi un ouvert. On utilise la caractérisation : un ensemble est ouvert si et seulement si tout point lui appartient avec son voisinage.

Soit $z \in f(\pi^{-1}(U))_{\subset S^1}$ avec U un ouvert de ${}^{X}/_{\sim}$

$z = e^{2\pi i t}$ avec $t \in \pi^{-1}(U)$

Soit $t \in \{0,1\}$ soit $t \notin \{0,1\}$

Si $t \notin \{0,1\}$, $\exists \varepsilon > 0$, tel que $(t-\varepsilon, t+\varepsilon) \subset \pi^{-1}(U) \subset (0,1)$

$f((t-\varepsilon, t+\varepsilon))$ est un voisinage de z.

Si $t \in \{0,1\}$, alors $\pi^{-1}(U)$ contient 0 ET 1

$z = e^{2\pi i t} \in f(\pi^{-t}(U))$ et c'est un ouvert de [0.1].

Donc $\exists \varepsilon, \varepsilon' > 0$ tel que $\pi^{-1}(U) \supset [0,\varepsilon) \supset (1-\varepsilon', 1]$

Dans ce cas là, on a que $z \in f(\underbrace{[0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon', 1]}_{\text{un voisinage de } z})$

$e^{2\pi i t} = \dfrac{1}{2\pi} log : \mathbb{C} \backslash [0, +\infty) \to (0, 2\pi)$

Ainsi, $f(\pi^{-1}(U))$ contient tout son point avec un voisinage ouvert de ${}^{[0,1]}/_{\{0,1\}}$

Donc ${}^{[0,1]}/_{\{0,1\}} \cong S^1$ (homéomorphisme).

Exemples

- 1) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & ||x|| \end{array} \to g : {}^{\mathbb{R}^2}/_{\sim_f} \to [0, +\infty)$ La relation d'équivalence induite par f, comme discutée au début de 5.2

- 2) $X = [0,1] \times [0,1]$ avec la topologie produit,

  $\sim$: $(x,0) \sim (x,1) \, \forall \, x \in [0,1]$ et $(0,y) \sim (1,y) \, \forall \, y \in [0,1]$

  $X\Big|_S \simeq S^1 \times S^1 = T^2$ le tore.

6 Suites et limites, espaces séparés

Définition (Rappel)

Une suite d'éléments dans un ensemble X est une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & X \\ n & \to & x_n \end{array}$

Notation : $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si X est de plus un espace topologique, on peut parler de la convergence des suites.

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, $\{x_n\}_n$ une suite d'éléments de X, $x \in X$ est une limite de la suite $\{x_n\}$ si $\forall\, U \in \mathcal{T}$ avec $x \in U$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N$, $x_n \in U$

Définition

Soit X un espace topologique, $x \in X$. $\mathcal{B}_x$ un ensemble de voisinages de x est appelé une de voisinages de x, si $\forall$ voisinage V de x, $\exists B \in \mathcal{B}_x$ avec $B \subset V$

Proposition 1

Si $\mathcal{B}_x$ est une base de voisinages de $x \in X$, alors $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ si et seulement si $\forall\, B \in \mathcal{B}_x$, $\exists N$ tel que $\forall\, n \geq N, x_n \in B$

Preuve

[$\Longrightarrow$] est immédiat par la définition de la convergence, car tout voisinage $B \ni x\,\exists\, U$ ouvert. $B \supset U \ni x$

[$\Longleftarrow$] Soit $U \ni x$ un ouvert. Alors par la définition d'une base de voisinages, $\exists\, B \in \mathcal{B}_x$ tel que $B \subset U$

Donc $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N, x_n \in B \subset U \implies x_n \in U$

$\square$

Exemples

- 1) Soit (X, d) un espace métrique. On a alors un choix naturel d'une base de voisinages. $\forall\, x \in X : \mathcal{B}_x = \{B_d(x,r) \big| r > 0\}$

Avec ce choix de base de voisinages et en vue de la Proposition 1, on retrouve, dans (X,d) la notion de convergence habituelle :

$x_n \to x$ si et seulement si $\forall\, r > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N : d(x, x_n) < r \iff x_n \in B_d(x,r)$

- $\mathcal{T}_{disc}$ $\{x\}$ est un ouvert. Donc pour satisfaire $x_n \to x$, il faut et il suffit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N, x_n = x$

  En général, des suites $\{x_n\}$ tel que $x_n = x \in X\ \forall\, n \geq N \in \mathbb{N}$ s'appellent des suites stationnaires.

  On vient de voir que dans un espace discret, les suites stationnaires sont les seules suites convergentes.

- 3) $(X, \mathcal{T}_{triv})$ $|X| > 2$ Tout $x \in X$, toute suite $\{x_n\}_n \subset X$

  $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x$ car le seul ouvert $\neq 0$ est X.

  Donc tout le monde est une limite de tout le monde $\to$ pas très intéressant.

  Pas d'unicité de limite pour une suite donnée.

On peut imposer des conditions sur notre espace topologique pour garantir l'unicité de limite.

Définition

$(X,\mathcal{T})$ un espace topologique est séparé si $\forall\, x \neq y$, $x, y \in X\ \exists\, U, V \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$

Exemple

$(X, \mathcal{T}_{triv})$ n'est pas séparé.

Rappel

$(X,\mathcal{T})$ un espace topologique est séparé si $\forall\, x \neq y$ avec $x, y \in X$, $\exists\, U, V$ tels que $x \in U, y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exemple

$(X, \mathcal{T}_{triv})$ $|X| \geq 2$ n'est pas séparé.

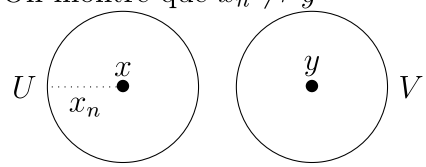
Proposition 2

Si X est un espace toplogique séparé et $\{x_n\} \subset X$ une suite, alors $x_n \underset{n}{\to} x$ et $x_n \underset{n}{\to} y \implies x = y$

Preuve

Supposons $x_n \underset{n}{\to} x$ et $y \in X$ avec $y \neq x$.

On montre que $x_n \not\to y$



Car X est séparé, prenons U et $V \in \mathcal{T}$ qui séparent x et y avec $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$

Par définition de la limite, $\exists\, N$ tel que $\forall\, n \geq N$, $x_n \in U$

$U \cap V = \emptyset \implies \forall\, n \geq N, x_n \notin V$. Alors V est un ouvert tel que $y \in V$, mais $\forall\, M \in N, \exists\, n > M$ tel que $x_n \notin V$, donc $x_n \underset{n}{\not\to} y$

$\square$

Proposition

Pour un espace topologique, être séparé est une relation topologique :

Si $X \simeq Y$, alors X est séparé si et seulement si Y est séparé.

Preuve

En effet : $x \in U, y \in V \implies f(x) \in f(U), f(y) \in f(V)$, comme f est un homéomorphisme et U, V sont ouverts,

$\implies f(U), f(V)$ ouverts et $U \cap V = \emptyset \implies f(U) \cap f(V) = \emptyset$ car f est bijective.

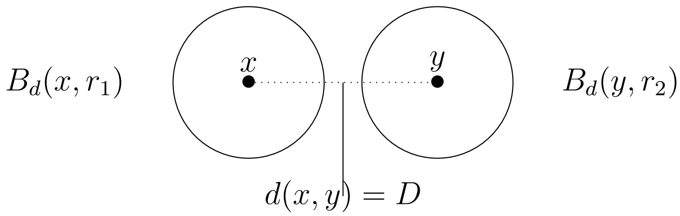
Pareil dans l'autre sens.

$\square$

Exemples

- 1) Tout espace métrique est séparé. En fait, tout espace métrisable est séparé.

  Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.



avec $r_1, r_2 < \dfrac{D}{2}$

$B(x, r_1) = U$ et $B(y, r_2) = V$ séparent x et y.

- 2) Tout espace discret est séparé, car $\{x\}$ sont des ouverts $\forall\, x \in X$

- 3) X séparé, $Y \subseteq X \implies Y$ muni de la topolgie induite est séparé.

- 4) Si $\{X_i\}_{i \in I}$ sont séparés, alors $\displaystyle\prod_{I \in I} X_i$ avec la topologie produit est séparé.

- 5) $(X, \mathcal{T}_{triv})$ avec $|X| \geq 2$ est non-séparé.

- 6) Si X est séparé, alors ${}^{X}\!/\!\sim$ n'est pas nécessairement séparé !

  Par exemple, ${}^{\mathbb{R}}\!/\!_{\mathbb{Q}}$ n'est pas séparé $\to$ exo. (et donc il n'est pas métrisable !)

La Proposition 2 nous dit que si $(X, \mathcal{T})$ est séparé, alors il y a l'unicité de la limite pour des suites convergentes dans X.

Est-ce que la réciproque est vraie ?

Rappel

Soit X un ensemble et $\mathcal{T}_{fin}$ la topologie cofinie.

$\mathcal{T}_{fin} = \{U \in \mathcal{P}(X) \Big| X \backslash U \cap \text{ est fini } \} \cup \{\emptyset\}$

Remarque

Si $|X| = \infty$, alors $(X, \mathcal{T}_{fin})$ n'est pas séparé.

Les ouverts sont des sous-ensembles à complément fini.

U, V deux ouverts $\implies U \cap V \neq \emptyset$

Un exemple similaire :

Soit X un ensemble $\to \mathcal{T}_{den}$ la topologie codénombrable.

$\mathcal{T}_{den} = \{U \in \mathcal{P}(X) \Big| X \backslash U \text{ est dénombrable } \} \cup \{\emptyset\}$

Par le même argument, si X est non-dénombrable, alors $(X, \mathcal{T}_{den})$ n'est pas séparé.

On va montrer par contre, que dans $(X, \mathcal{T}_{den})$, pour X non dénombrable, il y a l'unicité de la limite pour des suites convergentes.

Soit $x_n \subset X$ une suite. Supposons que $x_n \underset{n}{\to} x \in X$

On a soit $x \in X \backslash \{x_n\}$, soit $x \in \{x_n\}$

Supposons que $x \in X \backslash \{x_n\} : X \backslash \{x_n\} := U; x \in U$ est un ouvert par la définition de $\mathcal{T}_{den}$

Car $x_n \underset{n}{\to} x$, $\exists\, N : \forall\, n \geq N, x_n \in U$

Contradiction car $U = X \backslash \{x_n\}$

Donc $x \notin X \backslash \{x_n\}$, donc on a $x \in \{x_n\}$

Dans ce cas, considérons $U := (X \backslash \{x_n\}) \cup \{x\}$

$U \in \mathcal{T}_{den}$

$U \ni x$ avec U ouvert et $x_n \underset{n}{\to} x \implies \exists\, N$ tel que $\forall\, n \geq N\; x_n \in U$

Mais $U = (X \backslash \{x_n\}) \cup \{x\}$, donc $\forall\, n \geq N, x_n = x$

Donc $\{x_n\}$ est une telle suite qu'il n'existe pas de N tel que $\forall\, n \geq N$, $x_n = x$, donc $\{x\}$ est une suite stationnaire.

Conclusion

Toute suite convergent dans $(X, \mathcal{T}_{den})$ est stationnaire, et donc en particulier, on a l'unicité de la limite dans $(X, \mathcal{T}_{den})$.

Donc si de plus X est non-dénombrable, alors $(X, \mathcal{T}_{den})$ est un espace non-séparé avec l'unicité de la limite.

Axiomes de séparation : "pas trop peu d'ouverts".

Axiomes de dénombrabilité : "pas trop d'ouverts".

Définition

Soit X un espace topologique. Il est dit "à base dénombrable de voisinages" si $\forall\, x \in X$, $\exists\, \mathcal{B}_x$ une base de voisinages de x qui est dénombrable.

Proposition

Être à base dénombrable de voisinages est une propriété topologique.

Preuve

Évident.

Exemples

- 1) Les espaces métriques : $x \in X \to \mathcal{B}_x = \left\{ B_d \left(x, \frac{1}{n} \right) \right\}_n$
- 2) L'espace topologique $(X, \mathcal{T}_{den})$ avec X non-dénombrables n'est pas à base de voisinages dénombrables. (et donc il n'est pas non plus métrisable !)

  En effet, supposons $x \in X, \mathcal{B}_x = \{B_n\}_n$ une base de voisinages dénombrable.

  Un peut supposer les B_n ouverts.

  Alors par définition de $\mathcal{T}_{den}, X \backslash B_n$ est dénombrable $\forall\, n$.

  $\implies \bigcup\limits_n (X \backslash B_n)$ est aussi dénombrable. Mais X n'est pas dénombrable.

  Donc $\exists$ beaucoup de points $X \ni y \notin \bigcup\limits_n (X \backslash B_n)$ et on peut en choisir un différent de x.

  On a alors $\underbrace{X \backslash \{y\}}_{\text{un ouvert}} \ni x$ et tel qu'il ne contient aucun B_n.

  Contradiction avec le fait que $\{B_n\}$ est une base de voisinages de x. Donc $(X, \mathcal{T}_{den})$ avec X non-dénombrable n'est pas à base dénombrable de voisinages.

Théorème 1

Soit X un espace topologique à base dénombrable de voisinages.

Alors X est séparé si et seulement si X possède l'unicité de la limite pour des suites convergentes :

(Dans des espaces à base de voisinages dénombrables, Prop 2 possède la réciproque)

Remarque

C'est le cas des espaces métriques et plus généralement, les espaces métrisables.

Lemme

Si $\forall\, x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages, alors $\forall\, x \in X$ admet aussi une base dénombrable de voisinages ouverts et décroissante, c'est à dire $B_n \supset B_{n+1} \,\forall\, n$

De plus, toute suite $\{x_n\}$ avec $X_n \in B_n$, alors $x_n \to x$

Preuve du Lemme

Soit $x \in X$ et $\{B''_n\}_n$ une base dénombrable de voisinages de x.

B''_n un voisinage de $x \implies \exists\, B''_n \supset B'_n \ni x$

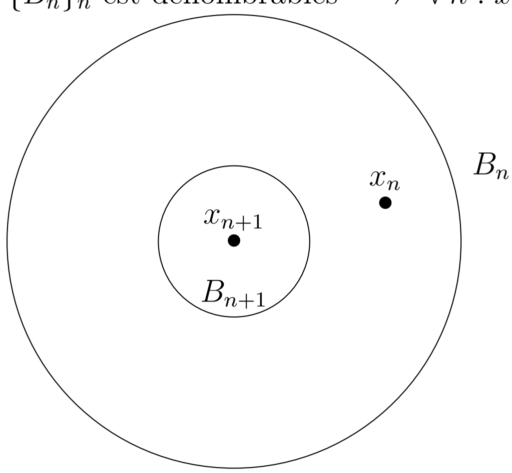
Donc $\{B'_n\}_n$ une base dénombrable de voisinages ouverts de x.

$B_n := B'_1 \cap \cdots \cap B'_n \ni x$ ouvert.

$\{B_n\}_n$ une base dénombrable de voisinages ouverts de x.

Finalement, soit $\{x_n\}$ telle que $x_n \in B_n \,\forall\, n \geq 1$

$\{B_n\}_n$ est dénombrables $\implies \forall\, n : x_n \in B_n$, alors $\forall\, m \geq n, x_m \in B_n$



Alors $x_n \to x$. En effet, soit U un ouvert $x \in U$.

Par la définition de base de voisinages, $\exists\, N$ tel que $B_N \subset U$. Alors par la remarque si dessus, $\forall\, n \geq N$, $x_m \in B_N \subset U \implies x_m \in U \,\forall\, m > N$

Par définition de convergence : $x_n \to x$

□

Preuve du Théorème 1

$[\implies]$ Dans tout X, par la Proposition 2.

$[\Longleftarrow]$

Supposons que X n'est pas séparé et contruisons alors une suite avec deux limites distinctes.

X pas séparé $\iff \exists x \neq y$, $x, y \in X$ tel que $\forall\, U, V$ ouverts avec $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V \neq \emptyset$

Soient $\{B_n(x)\}, \{B_n(y)\}$ des bases débombrables de voisinages des points x et y, comme garanties par le Lemme.

En fait, $B_n(x), B_n(y)$ sont ouverts et par hypothèse, $B_n(x) \cap B_n(y) \neq \emptyset \implies \exists\, x_n \in B_n(x) \cap B_n(y)\, \forall\, n \geq 1$

Par le Lemme, $\{x_n\}$ est telle que $x_n \underset{n}{\to}, x_n \underset{n}{\to} y$

$\square$

Remarque

La condition d'être à base dànombrables de voisinages implique d'autres bonnes propriétés.

Définition

Soit X un espace topologique $A \subset X$ est dit séquentiellement fermé, si $A = A' := \{x \in X \big| \, x$ est la limite d'une suite d'éléments de $A\}$

Notez : $A \subset A'$ car $a \in A$ est la limite de la suite constante. $x_n = a$

Mais en principe, $A \neq A'$

Proposition 5

Soit X un espace topologique $\underbrace{F \subset X}_{\text{fermé}} \implies F$ est séparé et fermé.

Théorème

Soit X un espace topologique à base dénombrable de voisinages.

Alors $F \subset X$ est fermé si et seulement si F est séparé.

Voir le polycopié pour les preuves.

7 Connexité

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Il est dit connexe s'il n'existe pas de manière de le séparer en deux ouverts disjoints non-vides :

$\nexists U, V \in \mathcal{T}$ tel que $U \neq \emptyset, V \neq \emptyset$ et $U \sqcup V = X$

Proposition 1 (Reformulation équivalente de la définition)

$(X, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si les seuls fermés et ouverts sont X et $\emptyset$

Preuve

$[\implies]$

Supposons $A \subseteq X$ ouvert et fermé.

Alors on écrit $X = A \sqcup (X \backslash A)$ A est ouvert et $X \backslash A$ est ouvert aussi car A est fermé.

Comme A est ouvert, on a forcément soit $A = X$, soit $A = \emptyset$

$[\impliedby]$

Soit $X = U \sqcup V$, avec U, V ouverts. Alors U et V sont aussi fermés comme complémentaires des ouverts.

Donc U et V sont fermés et ouverts.

$\implies U = \emptyset$ et $V = X$ ou inversement. $\implies X$ est connexe.

Théorème 1

Soit $f : (X, \mathcal{T}) \to (X' \mathcal{T}')$ une application continue.

Alors si X est connexe, alors $f(X)$ est également connexe.

Preuve

On peut supposer que f est surjective, sinon on considère la restriction sur l'image de $f(X)$

$$g : \begin{array}{ccc} X & \to & f(X) \\ x & \to & f(x) \end{array}$$

On a vu dans le paragraphe 3 que g est continue,.

Une autre manière de lire la définition de connexité :

Si $U, V \in \mathcal{T}$ tel que $X = U cup V$, alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$

On veut encore montrer que X' est connexe.

Supposons $X' = U' \sqcup V'$. Alors $\underbrace{f^{-1}(X')}_{=X} = f^{-1}(U') \sqcup f^{-1}(V')$ et $f^{-1}(U')$, $f^{-1}(V') \in \mathcal{T}$ car f est continue.

Par connexité de X, $f^{-1}(U')$ ou $f^{-1}(V') = \emptyset$.

Donc $U' = \emptyset$ ou $V' = \emptyset$

Donc X' est connexe.

□

Corrolaire

La connexité est une propriété topologique :

Si $(X, \mathcal{T}) \simeq (X', \mathcal{T}')$ sont homéomorphes, alors X est connexe si et seulement si X' est connexe.

Exemples

- 1) $X \supseteq Y$ $(Y, \mathcal{T})$ est un sous-espace de X est connexe si $\forall U, V \in \mathcal{T}$ tel que $U \cap V \cap Y = \emptyset$ et $Y \subset U \cap V$, on a : $\begin{cases} \text{Soit} \quad Y \subset U \\ \text{Soit} \quad Y \subset V \end{cases}$

  $X = \mathbb{R}$ est connexe, mais $Y = (a, b) \sqcup (c, d)$ n'est pas connexe.

- 2) $(X, \mathcal{T}_{triv})$ est connexe

- 3) $(X, \mathcal{T}_{disc})$ n'est pas connexe si $|X| \geq 2$

- 4) $\mathbb{R}^n$ et S^n sont des espaces topologiques connexes.

On peut utiliser la connexité pour voir que $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$

En effet, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est un homéomorphisme, alors : $\tilde{f} = f\Big|_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R}^2\backslash f(0) \\ x & \to & f(x) \end{array}$ est aussi un homéomorphisme

Mais $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ n'est pas connexe tandis que $\mathbb{R}^2\backslash\{x\}$ est connexe pour n'importe quel point x.

On montrera à présent que S^1 est connexe. Cela découle du Théorème suivant :

Théorème

Tout intervalle ouverts $(a, b) \subset \mathbb{R}$ est connexe.

Preuve

Par l'absurde, supposons qu'il existe $a < b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tel que (a, b) n'est pas connexe.

$\implies \exists U_1, V_1 \subset \mathbb{R}$ tel que $U = U_1 \cap (a, b)$ et $V = V_1 \cap (a, b)$ sont non-vides et $(a, b) = U \sqcup V$

Comme $U \neq \emptyset$ et $V \neq \emptyset$, $\exists u \in U$ et $v \in V$ et on a $U \neq V$ car $U \cap V = \emptyset$

Sans perte de généralités, on peut prendre $u < v$.

Considérons $S := \{s \in (a, b) \Big| [a, s] \subset U\} \neq 0$ car $u \in S$

De plus, $S \subset (a, b)$, donc c'est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$

$\implies \exists\, s_0 \in \mathbb{R}, s_0 = \sup_{s \in S^1} s$. s_0 est le plus petit parmi les majorants de S.

Par ailleurs, tout point de V est un majorant de S, en particulier, $s_0 \leq v$. Donc on a : $a < u \leq s_0 \leq v < b$

En particulier, $s_0 \in (a, b) \implies s_0$ est soit dans U, soit dans V.

On montre que les deux cas mènent à une contradiction, ce qui démontre le théorème :

Si $s_0 \in U$ un ouvert, alors $\exists\, \varepsilon$ tel que $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset U$

Alors en particulier, $s_0 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in U$ et $[u, s_0 + \dfrac{\varepsilon}{2}] \subset U \implies s_0 + \dfrac{\varepsilon}{2} \in S$

Cela est en contradiction avec $s_0 = supS$

Si $s_0 \in V$ ouvert, alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset V$

Comme tous les points de V sont des majorants de S, alors on trouve un majorant plus petit que s_0 : $s_0 - \dfrac{\varepsilon}{2}$

CONTRADICTION car s_0 est le plus petit majorant de S.

Proposition 2

Si $A \subset X$ et A est connexe. Alors $\forall\, B$ tel que $A \subseteq B \subset \overline{A}$, B est connexe.

Corrolaire

$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, on a $(a, b)[a, b], [a, b)$ et $(a, b]$ sont connexes.

Cela découle des Théorèmes 1 et 2 et de la Proposition 2.

Preuve de la Proposition 2

U, V sont deux ouverts de X.

Supposons que $B \cap U \cap V = \emptyset$ et $B \subset U \cup V$

On veut que $B \subset U$ ou $B \subset V$

On a $A \subset B \implies A \subset U \cup V$ et $A \cap U \cap V \subset B \cap U \cap V = \emptyset$

Comme A est connexe, on a $A \subset U$ et $A \subset V$.

Sans perdre de généralités, supposons que $A \subset U$.

Alors $A \cap V = \emptyset$. Vérifier que $B \subset U$. Soit $x \in B \subset U \cup V$

Si $x \in V$, alors $x \notin X \backslash V \supset A$ car $A \cap V = \emptyset$

Par ailleurs, $\overline{A} = \bigcup\limits_{F \text{fermé}, F \supset A} F \implies x \notin \overline{A}$

Contradiction avec $x \in B \subset \overline{A}$

Donc $x \notin V$, mais $x \in B$ et $B \cap U \cap V = \emptyset$ et $B \subset U \cup V$

$\square$

Une application de connexité :

Théorème des valeurs intermédiaires (une version du Théorème vu en Analyse I)

Soit X un espace topologique connexe. $f : X \to \mathbb{R}$ une application continue. Soient $ab \in X$ tel que $f(a) < f(b)$, alors $\forall\, r \in (f(a), f(b)) \subset \mathbb{R}$, $\exists\, c \in X$ avec $Ff(c) = r$

Preuve

Par l'absurde, supposons qu'il existe $r \in (f(a), f(b))$ tel que $r \notin f(X)$

$f(a) \in U := (-\infty, r) \cap f(X)$, $f(b) \in V := (r, +\infty) \cap F(X)$ deux ouverts non-vides.

$U \cap V = \emptyset$ et $f(X) = U \cup V$ car $r \notin f(X)$ et c'est le seul point de $\mathbb{R}$ qui n'est pas couvert dans $f(X)$.

De plus, $f(X) \not\subset U$ et $f(X) \not\subset V$, ce qui est en contradiction avec le fait que $f(X)$ est connexe.
$\square$

Remarques

- 1) Si $(X_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces topologiques connexes 'un espace topologique connexe X tel que $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, alors $\bigcup\limits_{i \in I} X_i$ est connexe.

- 2) $\prod_{i\in I} X_i$ est connexe pour la topologie produit.

Une propriété un peu plus forte, liée à la connexité est la connexité par arc.

Définition

Soit X un espace topologique.

Un chemin dans X entre x et y, $x, y \in X$ est une application continue $\gamma : [a, b] \to X$ tel que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$

X est connexe par arc, si $\forall\, x, y \in X\, \exists$ un chemin entre x et y.

Proposition 3

Si X est connexe par arc, alors X est connexe.

Preuve

Par l'absurde. Soit $X = U \sqcup V$ et $x \in U$, $y \in V$ et U, V sont deux ouverts non-vides.

Par hypothèse, $\exists\, \gamma : [a, b] \to X$ tel que $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$

On considère $\gamma^{-1}(U), \gamma^{-1}(V) \subseteq [a, b]$

$a \in \gamma^{-1}(U)$ et $b \in \gamma^{-1}(V)$

$\gamma^{-1}(U) \cap \gamma^{-1}(V) = \emptyset$, $\gamma^{-1}(X) = [a, b] = \gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V)$

Donc on a que $[a, b]$ n'est pas connexe $\implies$ Contradiction par le Théorème 2

NOTA BENE !

X connexe $\not\Longrightarrow$ X connexe par arc.

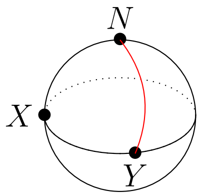
Exemples

- 1) $\mathbb{R}^n$ est connexe par arc, $n \geq 1$

  $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ un segment (une droite) qui les relie.

  Exercice : écrire explicitement $\gamma(t)$ pour $n = 2$

- 2) S^n, $n \geq 1$



- 3) $\mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}$ est connexe par arc pour $n \geq 2$

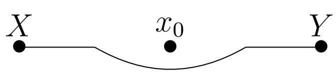
  Si $x_0 \notin [x, y]$, tout marche comme dans l'exemple 1)

  Sinon, on prend un chemin qui évite le point x_0 : dessin

  On modifie le segment pour tracer un chemin liant x à y et évitant x_0.

  Exemple 1) et 3) + Proposition 3 $\implies$ $\mathbb{R}^n$, $S^n, \mathbb{R}^n \backslash \{x_0\}$ sont connexes.

  Précédemment, on en a discuté, mais on ne l'a pas démontré.



- 4) Un espace connexe mais pas connexe par arc :

  On considère la fonction $f(t) = sin\left(\frac{1}{t}\right)$

  $F : \begin{array}{ccc} (0,1) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \rightarrow & \left(t, sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \end{array}$ C'est une application continue de $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$

  Le graphe de la fonction F :

  $(0,1)$ est connexe $\implies$ $F(0,1)$ est connexe $=: X$

  Par la Proposition 2, $\overline{X}$ est aussi connexe, $\overline{X} = X \sqcup \underbrace{\{0\} \times [-1,1]}_{\subset \mathbb{R}^2}$

  $\mathbb{R}^2$ est séparé, donc fermé $\iff$ séparé fermé.

  Pour décrire l'adhérence $\overline{X}$, on s'intéresse aux limites des suites des points de X.

  Pour tout point de la forme $(0, z)$, $z \in [-1, 1]$, il existe une suite (x_n) de points de X qui a $(0, z)$ comme limite.

  x_n sont des points d'intersection de la droite $y = z$ avec X.

  Soit $\varepsilon > 0$, $t \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$, alors $\frac{1}{t} \in \left(\frac{1}{2\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon}\right)$

  Par exemple, si $\varepsilon = \frac{1}{1000000}$ et $2\varepsilon = \frac{2}{1000000}$, alors $\frac{1}{t} \in (500000, 1000000)$

Pour tout $t \in (\varepsilon, 2\varepsilon)$, il y a $\dfrac{250000}{\pi}$ points de X qui sont sur $y = z$.

Donc les points x_n s'accumulent sur $(0, z)$

$\overline{X}$ est un espace connexe

Par contre, $\overline{X}$ n'est pas connexe par arc, car la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t}$ ne s'étend pas en une fonction continue en 0, car il n'y a pas de limite de $f(t)$ quend $t \to 0$.

Donc il n'y a pas de chemin dans $\overline{X}$ qui relie l'origine $(0, 0)$ ou un autre point $(0, z)$, $z \in [-1, 1]$ à un point de X.

On peut néanmoins montrer une réciproque à la Proposition 3 avec une hypothèse supplémentaire.

Proposition 4

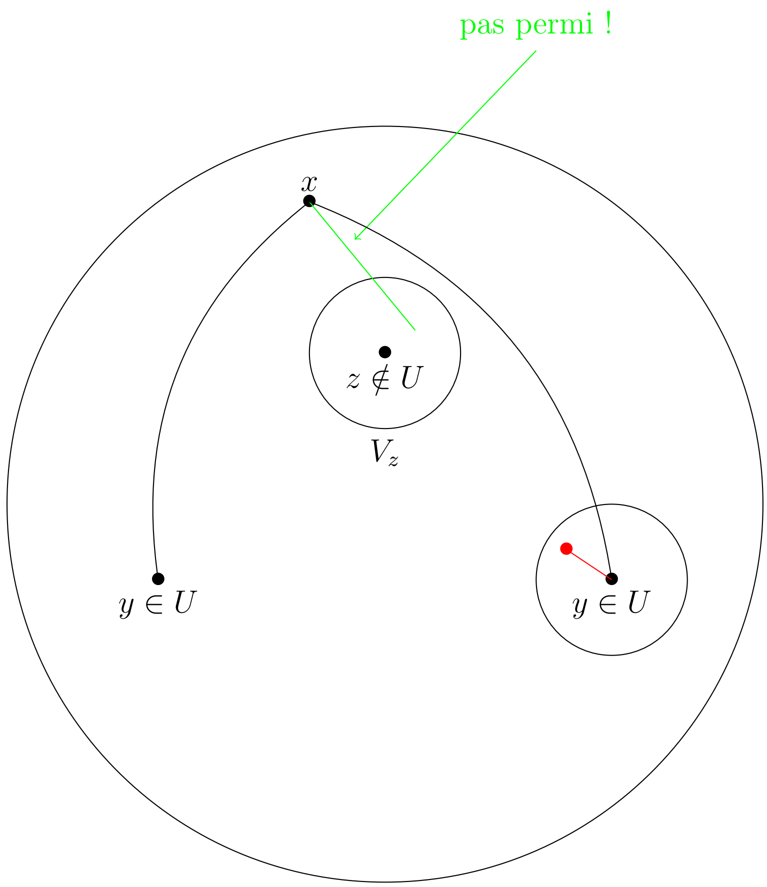
Soit X connexe et localement connexe par arc. $\implies$ X est connexe par arc.

Être localement connexe par arc, ça veut dire que $\forall\, x \in X$, $\exists$ voisinage V de x qui est connexe par arc.

Preuve

Soit $x \in X$, $U := \{y \in X, \exists \text{ un chemin qui relie } x \text{ à } y\} \subseteq X$

$U \neq \emptyset$ (par exemple, car X est localement connexe par arc)



Il suffirait de montrer que $U = X$. Pour cela, on montrera que U est ouvert et fermé et on utilisera la Proposition 1. Il est fermé car $X \backslash U$ est ouvert.

U est ouvert, car il contient tout son point avec un voisinage.

En effet, si y est lié à x par un chemin, alors tout point de voisinage V_y donné par la connexité par arc locale de X sera lié à x par un chemin passant d'abord par y.

$X \backslash U$ est aussi ouvert car il contient tout son point avec un voisinage.

En effet, soit $z \in X \backslash U \iff z$ n'est pas lié à x par un chemin.

Alors $V_z \subset X \backslash U$, car s'il existait un chemin entre x et un point de V_z (voisinage de z, connexe par arc), on aurait aussi un chemin entre x et z, ce qui contredirait $z \in X \backslash U$

$\square$

8 Compacité

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

Un recouvrement ouvert de X est une famille $\{U_i\}_{i\in I}$ d'ouverts tels que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$

X est compact si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini, c'est à dire $\exists, N \in \mathbb{N}$ et $i_1, \cdots, i_N \in I$ tel que $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}$

Remarques/Exemples

Compacité d'un sous-espace.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $Y \subset X$.

Quand est-ce que $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est compact ?

$(Y, \mathcal{T}_Y)$ est compact si et seulement si $\forall \{U_i\}_{i\in I}$ famille d'ouverts de $\mathcal{T}$ telle que $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $i_1, \cdots, i_N \in I$ tel que $Y \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}$

En particulier, si $Y \subset X$ est fini, alors Y est compact.

En effet, car $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, $\forall\, y \in Y\, \exists\, U_y$ tel que $y \in U_y$ $\{U_y\}_{y\in Y}$ est fini car Y est fini.

Théorème 1

$f : X \to Y$ une application continue. Si X est compact, alors $f(X)$ est aussi compact.

Corrolaire

La compacité est une propriété topologique, c'est à dire si $X \cong Y$, alors X est compact si et seulement si Y est compact.

Preuve du Théorème 1

Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ ouverts de Y tels que $f(X) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

f est continue, donc $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X, $\forall\, i$

Par ailleurs, $X = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(U_i)}_{\text{ouverts}}$

$\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ est donc un recouvrement de X et comme X est compact, on en extrait un sous-recouvrement fini : $f^{-1}(U_{i_1}), \cdots, f^{-1}(U_{i_N})$

$$X = f^{-1}(U_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{i_N}) \implies f(X) \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_N}$$

□

Exemples

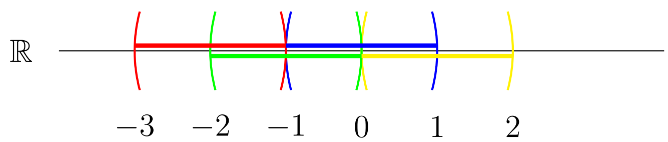
- 1) $(X, \mathcal{T}_{triv})$ est compact (car le nombre d'ouverts est fini).

- $(X, \mathcal{T}_{disc})$ est compact si et seulement si X est fini.

  Si X est fini, on procède comme dans la remarque.

  Si X est infini, le recouvrement $U_i = \{x_i\}$ ouvert n'admet pas de sous-recouvrement fini.

  $\mathbb{R} = \bigcup U_{n\in\mathbb{Z}} \underbrace{(n-1, n+1)}_{U_n}$



  $\forall n$, si on enlève U_n du recouvrement, $U = \{U_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, alors $U \backslash U_n$ n'est plus un recouvrement car le point n n'appartient à aucun ouvert de $U \backslash U_n$

- 4) Corrolaire de l'exemple 3) et du Corrolaire 1.

  $(a, b), (-\infty, a), (a, +\infty)$ ne sont pas compacts.

- 5) (0,1] n'est pas compact.

  $(0, 1] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n}, 1\right]$. Si jamais on pouvait en extraire un sous-recouvrement fini, $\exists\, N : N = max\{m,\, U_m \in$ sous-recouvrement fini $\}$. Alors le point $(\frac{1}{N}$ ne sera pas couvert !

- 6) Corrolaire de l'exemple 3) + Corrolaire 1) :

  $(a, b], [a, b), (-\infty, a)[a, +\infty)$ ne sont pas compacts.

- 7) $\mathbb{R} \supset X = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ est un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ qui est compact.

  Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.

  U_{i_1} := un ouvert qui couvre le point 0.

  U_{i_1} est un ouvert de $\mathbb{R} \implies \exists\, \varepsilon > 0$ tel que $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U_{i_1}$

Donc $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, > N$, $\dfrac{1}{n} \in (0, \varepsilon) \subset U_{i_1}$

Pour couvrir X avec un nombre fini d'ouverts de cette famille, il suffit de choisir un ouvert par point $\dfrac{1}{n}$ avec $n \leq N \implies$ nombre fini.

Théorème 8

$\forall, a \leq b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ est compact.

- 8) Une application du Théorème 8)

Théorème des bornes atteintes

Soit X un compact et $f : X \to \mathbb{R}$ continue.

Alors $\exists\, x_{min}, x_{max} \in X$ tel que $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}) \,\forall\, x \in X$

En analyse, on a vu ce théorème pour $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Preuve

Par le Théorème 1, $f(X)$ est compact.

On en déduit qu'il existe $M \in f(X)$ tel que $f(x) \leq M \,\forall\, x \in X$

Si on démontre ça, on trouve x_{max} en prenant une préimage de $M \in F(X)$ par la fonction f.

Montrons l'existence d'un tel M. S'il n'existait pas de tel M, alors on aurait que $\forall\, M \in f(X) \,\exists\, x \in X$ tel que $f(x) > M$

On considère la famille $\{(-\infty, \infty)\}_{x \in X}$, qui est un recouvrement d'ouverts de $f(X)$.

Comme $f(X)$ est compact, on aura un sous-recouvrement fini.

$\{(-\infty, f(x_1)), \cdots, (-\infty, f(x_N))\}$ avec un certain N et certains $x_i \in X$ pour $i = 1, \cdots, N$

Mais $\underset{i=1,\cdots,N}{max}(f(x_1), \cdots, f(x_N))$ ne sera pas recouvert par ce sous-recouvrement.

Donc ce n'est pas un recouvement de $f(X)$ CONTRADICTION.

Donc $\exists\, M \in f(X)$ tel que $f(x) \leq M \,\forall\, x \in X$

$\implies \exists\, x_{max} \in X$ comme il nous faut.

On fait la même chose pour x_{min}

Rappel du Théorème 2

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\, [a, b]$ est compact.

Preuve

Soit $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$.

On définit $\mathcal{L} = \{x \in (a, b] \Big| [a, x]$ admet un sous-recouvrement fini de $U\}$

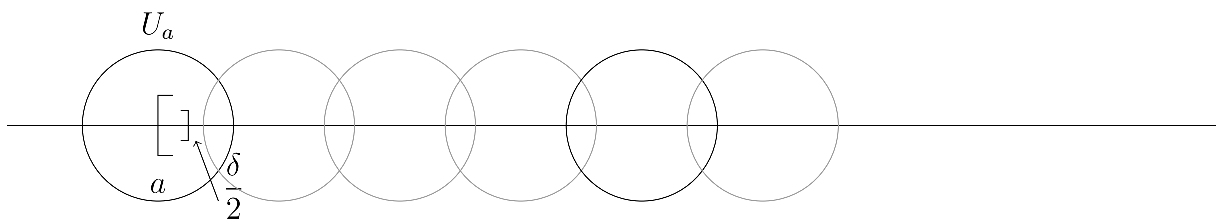
$\mathcal{L}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ borné et non-vide.

En effet, $a \in U_a \in U$

U_a ouvert $\implies \exists\, \delta > 0$ tel que $(a, a + \delta) \subset U_a$, et donc $x = \dfrac{\delta}{2} \in \mathcal{L}$ car $\left[a, a + \dfrac{\delta}{2}\right]$ est couvert par un seul ouvert $U_a \in U$

Donc $\mathcal{L} \neq \emptyset$

Alors $\mathcal{L}$ possède un supremum $c := sup\, \mathcal{L}$



FINIR LE DESSIN

ON montre deux choses sur c :

- 1) $c \in \dfrac{1}{\alpha}$
- 2) $c = b$

$\implies b \in \dfrac{1}{\alpha}$, ce que l'on veut montrer.

- 1) $c \in [a, b]$, donc $\exists\, U_c \in U$ tel que $c \in U_c$

  Comme U_c est ouvert, $\exists, \varepsilon > 0$ tel que $(c - \varepsilon, c] \subset U_c$

  On affirme qu'il existe $d \in (c - \varepsilon, c]$ avec $d \in \mathcal{L}$. Sinon $c - \varepsilon$ serait un majorant de $\mathcal{L}$. Mais on sait que c est le plus petit majorant de $\mathcal{L}$. CONTRADICTION.

  Comme $d \in \mathcal{L}$, il existe un sous-recouvrement U' de $[a, d]$, mais comme $c, d \in U_c$, le recouvrement $U' \subset U_c$ est fini et recouvre $[a, c] \implies c \in \mathcal{L}$

- 2) Si $c < b, \exists\, \eta > 0$ tel que $[c, c + \eta] \subset U_c$ et de plus, $c + \eta < b$

  Mais $c \in \mathcal{L}$ et $c + \eta \in U_c$, donc $[a, c + \eta]$ est recouvert par le recouvrement fini $U' \cup U_c$ construit dans 1).

Cela voudrait dire que $c+\eta \in \mathcal{L} \implies$ CONTRADICTION avec le fait que c est un majorant de $\mathcal{L}$

Donc $c = b$

$\square$

Corollaire

$(a,b) \not\simeq [a,b]$ par compacité

On aimerait maintenant trouver, plus généralement un critère de compacité pour $A \subset \mathbb{R}^n$. Pour cela, on a besoin de quelques résultats préliminaires.

Proposition 1

X quelconque, $Y \subseteq X$ Si Y est fermé, alors il est compact.

Preuve

Soit $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de Y.

Comme Y est fermé, $\implies X \backslash Y$ est un ouvert.

Alors $U \cup X \backslash Y$ est un recouvrement ouvert de X.

X compact $\implies \exists\, N$ et $U_1, \cdots, U_N \subset U \cup X \backslash Y$ un sous-recouvrement fini de X.

On peut supposer sans perdre de généralité que $U_N = X \backslash Y$

Alors $U_1, \cdots, U_N$ est un recouvrement de Y.

$\square$

Une suite de réciproques est vraie sans conditions supplémentaires :

Proposition 2

Si X est un espace topologique séparé et $Y \subseteq X$ avec Y compact, alors Y est fermé.

Preuve

On montre que $X \backslash Y$ est un voisinage de tout son point.

Soit $x \in X \backslash Y$. On a besoin de trouver V un ouvert tel que $x \in V$ et $V \subset X \backslash Y$

$\forall\, y \in Y : \exists\, U_y, V_y$ deux ouverts disjoints avec $y \in U_y$, $x \in U_x$

$\{U_y\}_{y\in Y}$ est un recouvrement d'ouverts de Y. Y est compact $\implies \exists y_1, \cdots, y_n$ avec $\{U_{y_i}\}_{i=1,\cdots,n}$ est un recouvrement de Y.

$V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i}$ est un ouvert car c'est l'intersection d'un nombre fini d'ouverts. $\implies x \in V$

De plus, $V \cap Y = \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} \cap Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_{y_i} \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$

Lemme

$A \cap B \cap X \cup Y \subseteq A \cap X \cup B \cap Y$

Donc $V \subset X \backslash Y$

$\square$

Proposition 3

X, Y compacts $\implies X \times Y$ compact

($\Longleftarrow$ trivialement car $f : \prod X_i \to X_i$ continue)

Preuve

Soit $U = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$:

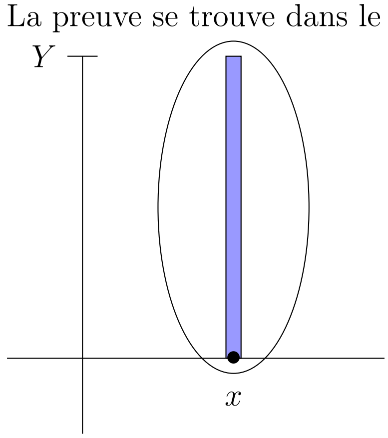
$\forall\, x \in X$, on considère $\{x\} \times Y \cong Y$, qui est compact.

$\implies \{x\} \times Y$ est compact.

$\exists, i_1(x_1), \cdots, i_{n(x)}(x)$ tel que $\{x\} \times Y \subset \underbrace{U_{i_1(x)} \cup \cdots \cup U_{i_{n(x)}(x)}}_{(*)}$

Lemme du tube

La preuve se trouve dans le polycopié.



$:= N_x \subset X \times Y$ ouvert

X et Y compacts. Si $x \in X$ et N un ouvert de $X \times Y$ contenant $\{x\} \times Y$, alors $\exists U$ un ouvert de X tel que $x \in U$ et $U \times Y \subset N$

En admettant le Lemme, on trouve :

$U_x \subset X$ ouvert, $x \in U_x$ tel que $U_x \times Y \subset N_x$

$\{U_x\}_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de $X \implies X$ est compact.

On trouve un sous-recouvrement fini $X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$

$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{i_1}(x_1) \cup \cdots \cup U_{i_{n(x_i)}}(x_i)$ par $(*)$

On a trouvé un recouvrement fini de $X \times Y$.

$\square$

Remarque

La Proposition 3 est aussi vraie pour des produits $\prod_{i \in I} X_i$ avec I quelconque, pour la topologie produit !

Ce résultat s'appelle le Théorème de Tychonoff.

Théorème 3

Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ où $\mathbb{R}^N$ est muni de la topologie standard.

Alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné pour la distance euclidienne.

Preuve

$[\implies]$ $\mathbb{R}^n$ est séparé $\implies$ par Proposition, A est fermé.

Pour montrer que A est borné, considérons le recouvrement de A par des boules $\{B(0,r) \big| r > 0\}$: boules dans d_2.

A compact $\implies \exists r_1, \cdots, r_n$ tel que $A \subset B(0, r_1) \cup \cdot \cup B(o, r_n)$

Alors on peut $A \subseteq B(0, \underset{i=1,\cdots,n}{max}\, r_i) \implies A$ est borné dans la métrique d_2.

$[\impliedby]$ A borné $\implies \exists\, R$ tel que $A \subset [-R, R]^N$, qui est compact par la Proposition 3 et le Théorème 2. N est la dimension de l'espace euclidien dans lequel A est contenu.

A fermé $\implies A$ compact par la Proposition 1.

$\square$

Remarque

Une partie du Théorème : A compact $\implies$ A fermé et borné reste vrai dans tout espace métrique.

L'autre implication dépend de la métrique. Par exemple, la métrique $\overline{d} = \dfrac{d_2}{1+d_2}$ rend tout le $\mathbb{R}^N$ borné. Du coup c'est pas compact !

Dans des "bons" espaces topologiques, on a encore une autre caractérisation de compacité.

Définition

Soit X un espace topologique. Il est séquentiellement compact si $\forall$ suite de points dans X admet une sous-suite convergente.

compacité $\not\Longrightarrow$ séquentiellement compact et l'inverse est faux aussi.

Théorème (sans preuve)

Soit X un espace topologique

- 1) Si X est à base dénombrable de voisinage, alors X compact $\implies$ X séquentiellement fermé.
- 2) Si X est métrisable, alors X séquentiellement fermé $\implies$ x compact.

Corollaire

En particulier, (X, d) X compact $\iff$ X séquentiellement compact.

9 Variétés et classification des surfaces

La notion de variété a été développée un peu plus sérieusement pour la première fois par Bernard Riemann au XIXème siècle.

Définition

Une variété de dimension n est un espace topologique séparé et à base dénombrable tel que totu $x \in X$ admet un voisinage ouvert homéomorphe à (un ouvert de) $\mathbb{R}^n$.

Remarques

- 1) Un espace topologique X est à base dénombrable si il admet une base de topologie dénombrable.

  Être à base dénombrable $\implies$ être à base dénombrable de voisinages.

  $\not\Longleftarrow$, par exemple, prenons X discret non-dénombrable.

  Il n'est pas à base dénombrable car tout point est ouvert et devrait s'écrire comme union d'éléments d'une base, pour toute base.

  D'autre part, c'est à base dénombrable de voisinages, car on peut prendre $B_x = \{\{x\}\}$

- 2) La condition d'être localement $\cong \mathbb{R}^n$ est très importante !

  Par ailleurs, elle implique en soi que X est à base dénombrable de voisinages.

- 3) Les deux conditions $\implies$ une variété est toujours métrisable.

- 4) On définit une variété de $dim\, n$

  Il existe des notions de dimension pour des espaces topologiques, elles sont assez complexes.

  Par exemple, on peut définir "la dimension de recouvrement" :

Définition

La $dim_{cov}(X)$ est le plus petit n tel que tout recouvrement ouvert U de X possède un raffinement tel que pour tout point $x \in X$ appartient à au plus n sous-ensembles.

(un recouvrement ouvert U tel que $\forall\, V \in U$ et un sous-ensemble d'un $u \in U$)

On peut voir que $dim_{cov}(X)$ est un invariant topologique et que $dim_{cov}\mathbb{R}^n = n$

On aimerait avoir des exemples de variétés.

Exemple

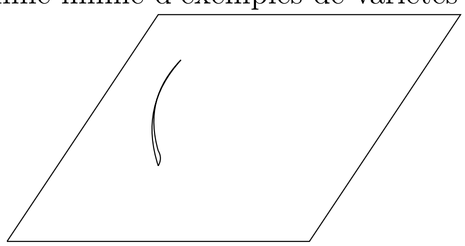
$\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$

On a vu que $\mathbb{R} \ncong \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$

$\mathbb{R}\backslash\{x\}$ n'est pas connexe, mais $\mathbb{R}^n\backslash\{x\}$ est connexe.

Une autre manière de démontrer que $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ avec $n \neq m$ est de passer par la "topologie algébrique".

La notion de dim_{cov} permet de montrer que $\mathbb{R}^n \ncong \mathbb{R}^m$ si et seulement si $n \neq m$. On a donc une famille infinie d'exemples de variétés (à homéomorphisme près).



On ne peut pas déformer de manière continue un lacet qui va autour de x en un lacet qui n'entoure pas x.

Mais dans $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$, on peut déformer n'importe quel lacet vers un n'importe quel autre de manière continue.

C'est en gros la notion d'homotopie étudiée en topologie algébrique.

$\mathbb{R}^2\backslash\{x\}$ n'est pas simplement connexe.

$\pi_1(\mathbb{R}^2\backslash\{x\}) \neq \{e\}$

$\mathbb{R}^n\backslash\{y\}, n \geq 3$ est simplement connexe.

$\pi_1(\mathbb{R}^n\backslash\{y\}) = \{e\}$

La notion d'homologie a été introduite par Henri Poincaré dans "Analysis Situs" $\sim$ 1895-1904

Là, il introduit aussi la notion de groupe fondamental d'un espace topologique : $\pi_1(X)$

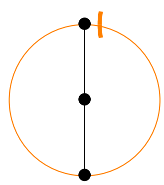
Pour distinguer $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, $n \neq m$, $n, m \geq 3$, on a besoin d'utiliser des analogies supérieurs appelés des groupes d'homotopies $\pi_k(x)$, $k \geq 1$ qui sont définies en considérant des sphères S^k plogées dans X.

Il existe aussi des variétés non-homéomorphes à $\mathbb{R}^n$!

Exemples

- 1) S^1 est une variété de $dim\,1$, compacte $\implies$ donc non-homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ $n \geq 1$

  On a vu dans le chapitre 3 que $S^1 \backslash \{x\} \cong (0,1) \cong \mathbb{R}$

  $S^1 \backslash \{y\}$ est un voisinage de y.

  V_y est homéomorphe à $\mathbb{R}$

- 2) S^2 est une variété de $dim\,2$, compacte.

  $S^2 \backslash \{x\} \cong \mathbb{R}^2$

  FINIR D'ECRIRE

Plus généralement, S^n, $n \geq 2$ sont des variétés compactes de $dim\,n$.

Définition

Des variétés de $dim\,1$ sont appelées des courbes.

Des variétés de $dim\,2$ sont appelées des surfaces.

Peut-on classifier les variétés de dimension donnée, à homéomorphisme près ?

Théorème 1 (Classification des courbes)

Toute courbe connexe est (sans démonstration) homéomorphe à $\mathbb{R}$ si elle est non-compacte. Et si la courbe est compacte, elle est homéomorphe à S^1.

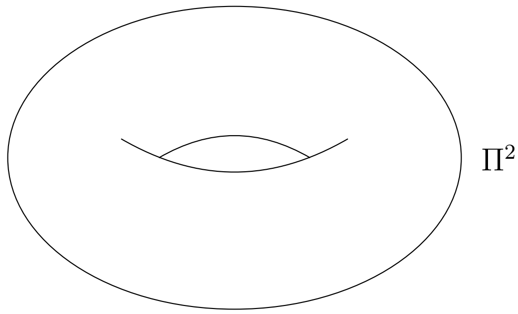
Le théorème des classification des surfaces sera fomulé la semaine prochaine.

La classification des variétés de dimension 3 a été accomplii récemment. En particulier, la conjecture de Poincaré en découle.

Pour la dimension 4, c'est toujours un problème ouvert.

D'autres exemples de surfaces

- 1) Le tore est une surface compacte. On peut le voir comme $\Pi^2 = S^1 \times S^1$



Plus généralement, si X est une variété de dimension n et Y est une variété de dimension m, alors $X \times Y$ est une variété de dimension $n+m$.

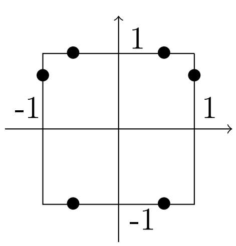
Une autre manière de voir le tore Π^2 est :

On prend un carré et le quotiente par $(x,1) \sim (x,-1), (1,y) \sim (-1,y)$.

On obtient un cylindre.

Quand on choisit $x, y \in [-1,1]$, on obtient un tore.

Donc ${}^{[-1,1]\times[-1,1]}\Big/ \begin{matrix}(x,1) \sim (x,-1) \\ (1,y) \sim (-1,y)\end{matrix}$ pour $x, y \in [-1,1]$ est un tore.



Ce procédé de factorisation s'appelle le recollement.

Définition

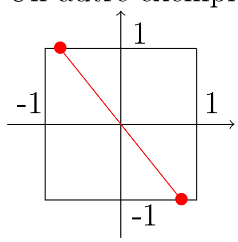
Une surface à bord est un esapce topologique X qui satisfait des conditions d'être une variété, sauf que la troisième condition est relaxée : tout point $x \in X$ possède un voisinage qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^2$, soit au demi-plan.

Exemple

Le cylindre est un exemple d'une surface à bord. Le bord est fermé par des cercles obtenu des côtés du carré, qui n'était pas recollés.

Plus généralement, on peut définir des variétés à bord en toute dimension.

Un autre exemple de recollement :



$^{[-1,1]\times[-1,1]}/_{(x,1)\sim(-x,-1)}$ est une surface à bord appelée le ruban de Möbius.

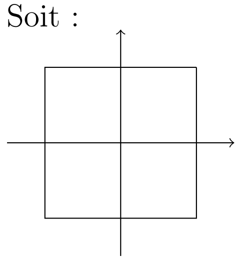
Quand on fait un recollement, les points intérieurs du carré gardent leurs voisinages $\cong \mathbb{R}^2$, les points du bord du carré qui sont recollés voient leurs voisinages homéomorphes au demi-plans recollés en voisinage homéomorphes au plan $\mathbb{R}^2$.

Les points du bord du carré qui ne sont pas recollés deviennent les points du bord de la nouvelle surface.

Par exemple, le bord du volume de Möbius est S^1.

On peut procéder de deux manières pour recoller le bord qui nous reste.

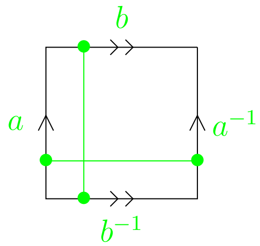
Soit :



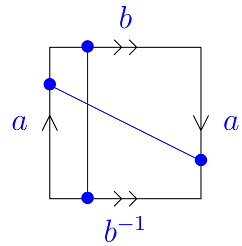
Rappel

Nous avons construit quelques surfaces par le procédé de "recollement". C'est à dire d'identification des côtés opposés d'un carré.

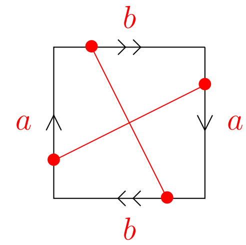
Exemples



Le tore $\mathbb{T}$



La bouteille de Klein



Le plan projectif $\mathbb{R}P^2$

Lors de recollement, on identifie des points du bord.

Par définition, ils ont des vosinages homéomorphes au demi-plan.

Après recollement, les points identifiés deviennent des points intérieurs car les voisinages se recollent le long du bord pour former des voisinages homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ (en rouge sur le dessin du tore).

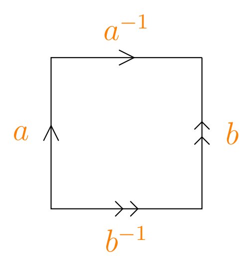
Au lieu de faire des dessins, on peut décrire ce procédé par un codage symbolique des lettres. Assignons une lettre à chaque côté du carré avec la convention que deux côtés sont recollés si et seulement si ils sont marqués par la même lettre.

De plus, on distingue en écrivant a ou a^{-1} le sens dans lequel le côté est parcourus : ou sens horaire, ou sens opposé.

Ainsi, $\mathbb{T} \longleftrightarrow aba^{-1}b^{-1}$, Klein $\longleftrightarrow abab^{-1}$ et $\mathbb{R}P^2 \longleftrightarrow abab$

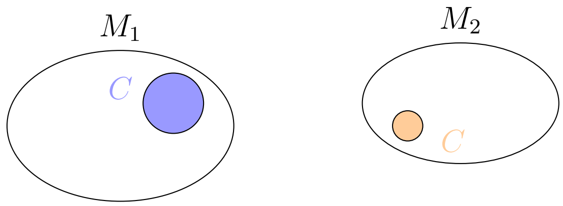
Remarque

On peut aussi obtenir la sphère en appliquant cette règle avec le mot $aa^{-1}bb^{-1}$



Pour construire davantage d'exemples, on a besoin d'introduire une opération en plus : la somme connexe des surfaces.

Imaginons que nous avons deux surfaces M_1, M_2 et on aimerait en fabriquer une nouvelle. On peut le faire de la manière suivante :



On découpe des petits disques dans M_1 et M_2 en les rendants des surfaces à bord.

$M := M_1 \# M_2$ est définie comme résultat du recollement de M_1 et M_2 le long du bord des disques découpés. # représente la somme connexe de M_1 et M_2.

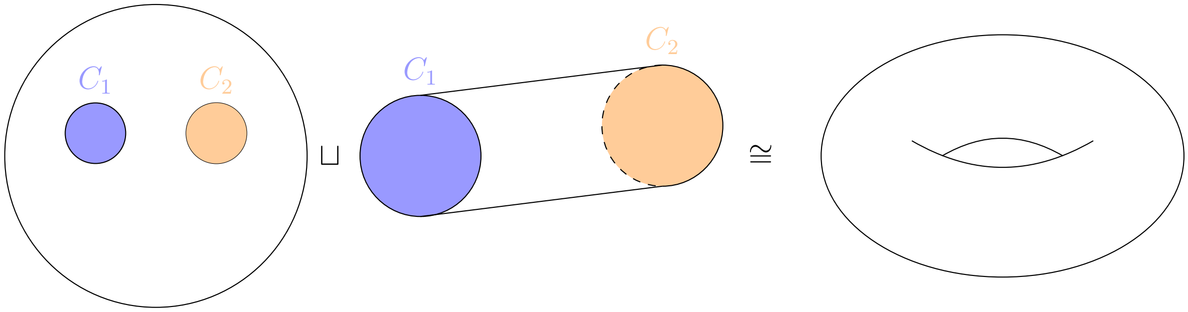
$M := {}^{M_1 \sqcup M_2}/_{\sim}$ où $\sim$ est l'identification de deux cercles de bord noté sur C sur le dessin.

Remarque

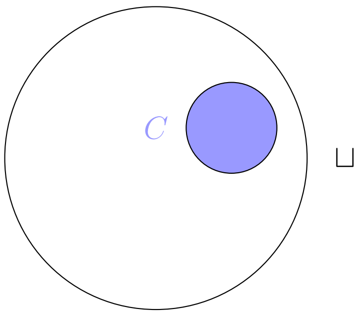
On peut de manière analogue, définir la somme connexe de deux variétés de la même dimension, pour toute dimension.

Exemples

- 1) $S^2 \# S^2 \cong S^2$
- 2)



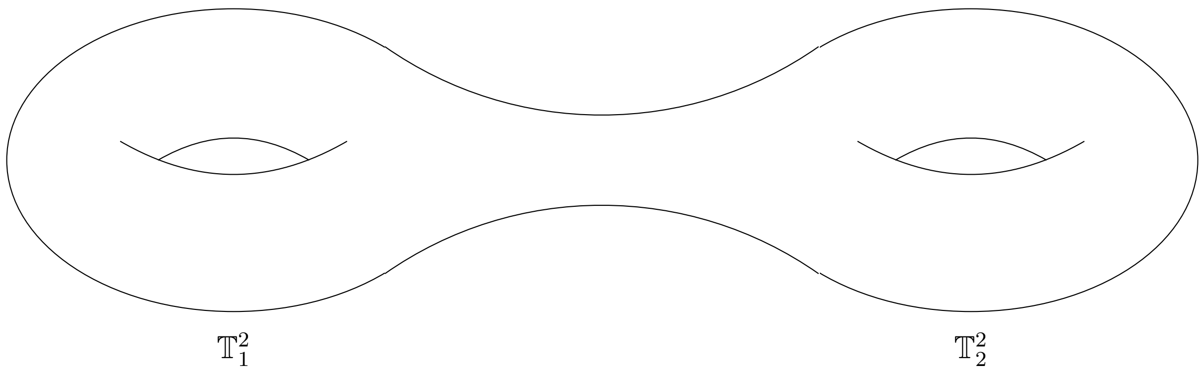
- 3)



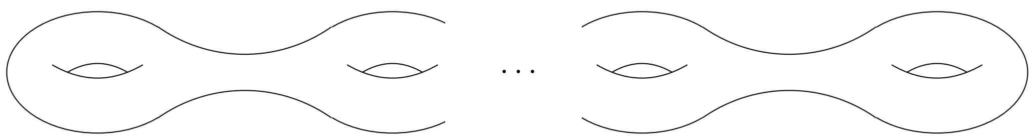
$S^2 \backslash \{$ disque $\}$

- 4)

  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 =$



  On peut itérer :



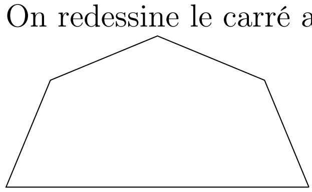
Premier tore trouvé :

DESSIN

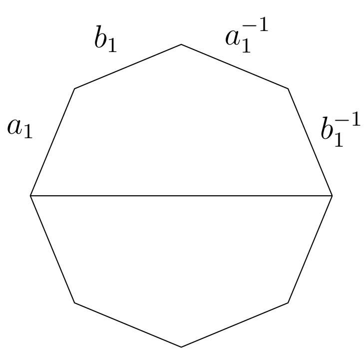
2ème tore trouvé :

DESSIN

On redessine le carré avec le bord supplémentaire en un polygône et on recolle le long de c.



On obtient un octogone avec le mot $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$ sur le bord, et on fait l'identification comme expliqué précédemment.



Plus généralement, pour tout $g \geq 1$, le $4g - gone$ muni du codage $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ donne un "tore à g trous"

⚠ Le mot trou est utilisé dans un autre sens que ci-dessus !

ou une surface $\sum g$ "de genre g, orientable"

Pareil comme pour $g = 2$, on peut obtenir $\sum g$ en prenant $\sum g - 1\#\mathbb{T}^2$

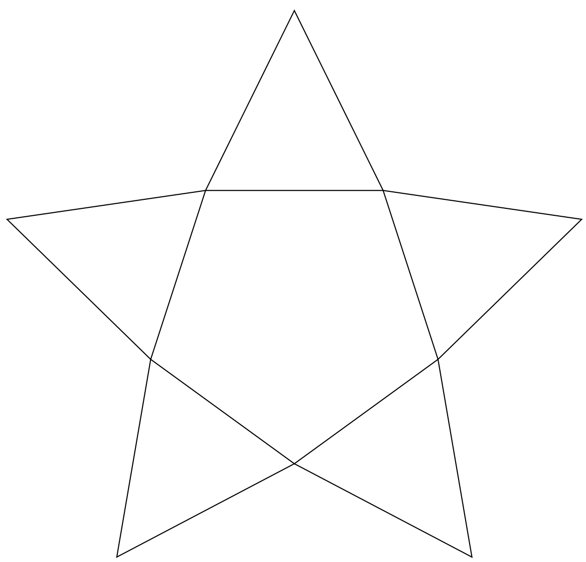
$\sum_1 = \mathbb{T}^2$

Par ailleurs, on peut aussi généraliser la construction de $\mathbb{R}P^2$.

Considérons un $2h$-gone avec codage $\chi_1\chi_1 \cdots \chi_h\chi_h$ (avec $h \geq 1$).

On obtient une surface N_h "non-orientable de genre h".

Exemple pour $h = 5$



$N_h = N_{h-1}\#\mathbb{R}P^2$

$\mathbb{R}P^2 := N_1$

On peut montrer que $N_2 =$ Bouteille de Klein (exo 4 série 13)

Remarque

Une surface sans bord non-orientable ne peut pas être plongée dans $\mathbb{R}^3$.

9.1 Théorème de classification de surfaces à homéomorphismes près

Théorème

Toute surface connexe compact sans bord est homéomorphe :

- Soit à S^2 (surface orientable de genre 0)

- Soit à une somme connexe de g tores (surface orientable de genre g avec $g \geq 1$)

- Soit à une somme connexe de h plans projectifs (surface non-orientable de genre h, $h \geq 1$)

Ces surfaces ne sont pas homéomorphes entre elles. ⚠Il faut rajouter ça ! Ca fait partie du théorème !

Remarque

On peut démontrer la première partie du théorème de manière directe en utilisant le codage symbolique. Mais c'est long et technique.

Il existe des invariants qui permettent de distinguer les surfaces :

- le groupe fondamental dont on a peu parlé la semaine dernière.

  Par exemple, $\Pi_1(S^2) = \{e\}$, $\Pi_1(\mathbb{T}^2) = \langle a, b \big| aba^{-1}b^{-1} = e \rangle = \mathbb{Z}^2$

- la caractéristique d'Euler définie à partir d'une décomposition "cellulaire" de la surface.

Exemple

$\chi(S^2) = \chi\,() = 3 - 3 + 2 = 2.$

$\chi(\mathbb{T}^2) = \chi\,() = 1 - 3 + 2 = 0$

$\chi(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2) = -2$

$\chi(\text{Klein}) = 0$

$\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$