Mathématique discrète

Mathématique discrète

1 Premier Principe de comptages. Premier probleme d'enumeration

→ *Principe d'inclusion-Exclusion*
→ *Coeficient binomiaux*

1.1 Principe de multiplication :

Exemples 1) : Londres →(avion, train) Geneve → (train, voiture, car) Evian

Exemples 2) : *Une serrure de valise avec un code a 4 chiffres. Combien combianaison possible ?*
Reponse : 10^4

Exemple 3) : *Combien y'a t'il de maniere de mettre deux tour sur un echequier, sur un carre blanc et noirn qu'elle ne soit pas alignées ?*

Le principe general :
Si on a : n_1 *possibilité de faire un premier choix*
.
.
.
n_k *de faire un k-ième choix,*
alors le nombre total de possibilite pour le choix 1,...,k est $\mathrm{n}_1, ..., \mathrm{n}_\mathrm{k}$

Interpretation ensembliste : $\mathrm{X}_1 \quad := \quad$ *l'ensemble de choix dans la 1er experience*
.
.
$\mathrm{X}_\mathrm{k} \quad := \quad$ *la k-ime experience*

$$\mid \mathrm{X}_1 \mid = \mathrm{n}_1, ..., \mid \mathrm{X}_\mathrm{k} \mid \quad = \quad \mathrm{n}_\mathrm{k} \begin{cases} \mathrm{X} = \textit{l'ensemble total de choix} \\ \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 * \mathrm{X}_2 * ... * \mathrm{X}_\mathrm{k} \end{cases}$$

Corrolaire : $\mid \mathrm{X} \mid = \mathrm{n}_1, ...\mathrm{n}_\mathrm{k}$

Principe d'addition : *La version ensembliste.* $\mid \mathrm{X}_1 \sqcup ... \sqcup \mathrm{X}_\mathrm{k} \mid \quad = \quad \mid \mathrm{X}_1 \mid + \mid \mathrm{X}_2 \mid + ... + \mid \mathrm{X}_\mathrm{k} \mid .$

On applique pour resiudre des probleme suivants :

— *Calculer le nombre total de resultat dans k experience avec les resultat des experience disjoitn deux a deux.*

Peut on généraliser le principe d'addtion au cas ou les ensemble X_i *ne sont pas disjoints ?*

$$| X_1 \cup X_2 |=| X_1 | + | X_2 | - | X_1 \cap X_2 |$$

Principe d'inclusion exclusion :

$$| X_1 \cup .. \cup X_k |=| X_1 | +...+ | X_k | - | X_1 \cap X_2 | -...- | X_{k-1} \cap X_k | + | X_1 \cap X_2 \cap X_3 |$$
$$+...+ | X_{k-2} \cap X_{k-1} \cap X_k | -... + (-1)^{k-1} * | X_1 \cap X_2 ... \cap X_k |$$

$$\boxed{= \sum (-1)^{|J|-1} * | \bigcap_{j \in J} * X_j |}$$

Principe de Dorichdel : *Si il y a 10 cage et 11 lapins il y aura forcement au moin une cage avec au moin deux lapins*

Premier probleme d'énumeration : *Soit X un ensemble (fini).* $| P(X) =? |$ *ou P(x)= l'ensmelbe des parties de X*

Proposition 1 : Si $| X |= n$, alors $| P(x) |= 2^n$
On demontre cette proposition par une preuve par bijection c'est à dire en teablissant une bijection entre l'ensemble qu'on doit énumérer et un autre qu'on sait énumérer :

Démonstration : *Considérons l'alphabet* $\{0, 1\}$ *à deux lettre et l'ensemble de tous les mots en cet alphabet de longueur n. On sait qu'il y a* 2^n *tel mots, par principe de multiplication :*
n lettres, 2 choix pour chaque lettre.

Maintenant on etablit une bijection entre l'ensemble P(X) et l'ensemble Mots(n) $= \{0, 1\}^n = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \mid \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$:

$$P(X) \to \{0, 1\}^n$$
$$X \supset A \to (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)_A \quad \text{ou} \quad \varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_i \in A \\ O & \text{si} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un ordre choisit $X=\{x_1, X_2, ..., x_n\}$

En d'autre termes : f(A) est la fonction caracteristique de A :

$$f(A) : \begin{cases} X \to \{0, 1\} \\ x \to \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

C'est bien une bijection car elle possede l'inverse :

$(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \to$ *le sous ensemble de X contenant exactement les* x_i *avec i :* ε_i *=1*

Corrollaire : $| P(X) |= 2^n$

Définition : $0 \leq k \leq n$, *on note* $\binom{n}{k}$ *"k parmi n" ou "les combinaison de k parmis n", C_k, le nombre de maniere de choisir un sous-ensemble a k elements dans un ensemble a n elements. Pour* $k > n$, *on pose* $\binom{n}{k} := 0$

Proposition 2 :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration : *Découle de Proposition 1 + Principe d'addition :*

$$P(X) = \bigsqcup_{k=0}^{n} \quad \textit{(Partie de X à k éléments)}$$

Proposition 3 :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Ici : preuve combinatoire
On compte de deux manière differentes le meme quantité :

$N(n,k) \quad := \quad$ *le nombre d'arrangements ordonné de k éléments parmis n éléments distincts*

<u>**Lemme :**</u> *Le nombre d'ordonner un ensemble à k éléments est k !*

<u>Preuve :</u> $k! = k * (k-1) * (k-2)... - 1$
En vue du Lemme on, d'une part :

$$N(n,k) = \binom{n}{k} * k!$$

Par le principe de multiplication : on choisit k éléments parmi n et on les ordonnes
<u>D'autre part</u> *on calcul N(n,k) directement : on a n choix par le 1er éléments (n-1) choix pour le 2eme etc..., (n-k+1) choix pour le k-i !me éléments ; Par le principe de multiplication,*

$$\mid N(n,k) \mid = n(n-1)...(n-k+1)$$

Donc en mettant les deux calcul ensemble, on a :

$$\binom{n}{k} * k! = \cancel{N}(n,k) = n(n-1)...(n-k+1)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n*k)!}$$

Proposition 4 Triangle de Pascal :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Preuve bijective : *Parmi tous les non-ensembles de* $\{1, ..., n\}$ *à k éléments, il y a ceux qui contiennent n et ceux qui ne contiennent pas n.*

$$\binom{n}{k} =| \{\textit{sous ensemble de \{1,...,n\} à k éléments}\} | \quad := X$$

1.2 Le principe d'inclusion exclusion :

Formule du binome de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times y^{n-k}$$

Preuve : $\underbrace{(x+y)...(x+y)}_{\text{n facteur}} \quad = \quad \sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$\binom{n}{k}$ = # *de choix de facteur x+y ou on prend x et pas y*
= # *de sous ensemble de taille k dans un cas de taille n*

Corrolaire :

1. prop 2 : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
   Preuve : poser x=y =1

2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
   Preuve : poser : x=-1, y=1

Théoreme (le principe d'unclusion exclusion) : Soit $X_1, ...X_n$ des ensemble :

$$|X_1 \cup .. \cup X_n| = \sum_{\emptyset \neq J \subset 1,...,n} (-1)^{|J|-1} \times | \cap_{j \in J} X_j|$$

Preuve : *chaque éléments de :* $X_1 \cup ... \cup X_n$ *est compte une fois dans la partie gauche de l'inégalité,* Comptons à droite :

Soit $x \in X_1 \cup .. \cup X_n$ Supposons x appartient a t ensemble
$x \in X_{i2}, X_{i2}, .., X_{it}$
$1 \leq i_1, ..., i_t \leq n$

$$x \in \cap_{j \in J} \quad \text{ssi} \quad J \subset \{i_1, ..., i_t\}$$

nombre de fois que x couple dans la partie droite de l'égalité est :

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + ... - .... + (-1)^{t-1} \binom{t}{t} = *$$

Corrolaire 2 : $\Rightarrow \binom{t}{0} - \binom{t}{1} + ... + (-1)^t \binom{t}{t} = 0$
$\Rightarrow (*) = 1$ *Cela montre l'égalité du Théoreme*

Une reformulation du Théoreme : *Si S est un ensemble de cardinalité N et* $X_1, ... x_N \subset S$, *alors* $|S \backslash (X_1 \cup ... \cup X_n)| = N - N_1 + N_2 - ... + (-1)^n N_n$; ou ; $N_i = \sum_{0 \neq J \subset \{1,...,n\} j \in J} |\cap X_j|$; $|J| = i$
X_i *le sous ensemble d'élément possedat une certaine propriété* (P_i) *et alors la fomrule donne le nombre d'éléments de S ne satisfesant aucun des* (P_i)

Fonction d'Euler :

Définition : $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ $\varphi(n) := \#\{1 \leq k \leq n : \quad pgcd(n, k) = 1\}$

Remarque : $\varphi(1) = 1$
par ex

1. $\varphi(p) = p - 1$ si p est premier
2. $\varphi(6) = 2$

Théoreme 2 : $\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

Preuve : Notons : $\Phi(n) = \{1 \leq k \leq n : \quad pgcd(k, n) = 1\}$ de sorte a avoir : $\varphi(n) = |\Phi(n)|$.
Notons aussi : $S(n) := \{(d, f) : \quad d|n, f \in \Phi(d)\}$

$|S(n)| = \sum_{d|n} |\Phi(d)|$ par le principe d'addition ou par le principe de multplication modifié

Montrons : $|S(n)| = n$ en établissant une bijection :

$$\beta : \quad S(n) \to \{1, ..., n\}$$
$$(d,f) \to \frac{f \times n}{d} \in \{1, ..., n\}$$

β est bijective. Supposons $\beta(d', f') = \beta(d, f)$. Alors f/d = f'/d' $f \times d' = f' \times d$ et on a aussi Pgcd(f,d)=pgcd(f',d')=1 ; Alors d=d' et f=f' ; En effet, si pgcd(f,d)=1 $\Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{Z}$ tq :

$$x \times f + y \times d = 1$$

$d' = d' \times 1 = d'(xf + yd) = x \times d'f + yd'd = d(xf' + yd') \quad \Rightarrow \quad d|d'$
De meme, en utilisant pgcd(f',d') = 1 on conclut que $d'|d \quad \Rightarrow d = d' \Rightarrow f = f'$
β surjective. Soit k$\in \{1, ..., n\}$. On definit $d_k := \frac{n}{pgcd(n,k)}$ clairement, $d_k|n$ De plus $f_k \in \Phi(d_k)$
Donc : $(d_k, f_k) \in S(n)$ De plus : β (d_k,f_k) = k $\square$

Théoreme 3 : Soit n= $p_1^{\varepsilon 1} ... p_r^{\varepsilon r}$, pi premier $\varepsilon_i \in \mathbb{N}$
Alors $\varphi(n) = n \times (1 - \frac{1}{p_1})...(1 - \frac{1}{pr})$

Preuve : (par le principe de'inclusion exclusion :
$X_i := \{$*les entier entre 1 et n qui sont des multiple de p_i*$\} = \{i \leq m \leq n : \quad p_i|m\}$
$\varphi(n) = |\{1, ..., n\} \backslash X_1 \cup ... \cup X_r| = n - |X_2 \cup ... \cup X_r|$ voir la reformation du principe d'incl excl

$X_i = \{p_i, 2p_i, 3p_i, ..., \frac{n}{p_i} p_i\} \quad \Rightarrow \quad |X_i| = \frac{n}{p_i} \quad (i = b, ..., r)$
$X_i 1 \cap X_i 2 = \{p_{i1}p_{i2}, \ 2p_{i1}p_{i2}, \ 3p_{i1}p_{i2}, ..., \frac{n}{p_{i1}p_{i2}} \times p_{i1}p_{i2}\} \quad \Rightarrow |X_i 1 \cap X_i 2| = \frac{n}{p_{i1}p_{i2}}$
$|X_i 1 \cap .. \cap X_i 2| = \frac{n}{p_{i1} \cdots p_{i2k}}$

$$\varphi(n) = n - n(\frac{1}{p1} + ... + \frac{1}{pr}) + n(\frac{1}{p_{i1}p_{i2}} + ... - -... + (-1)^r n \times \frac{1}{p1...pr}$$

$$= n(1 - \frac{1}{p1} - ... - \frac{1}{pr} + \frac{1}{p_{i1}p_{i2}} + ... - \frac{1}{p1p2p3} - ... + ... + (-1)^r \times \frac{1}{p1...pr}) = n(1 - \frac{1}{p1}...(1 - \frac{1}{pr}) \quad \square$$

On remarque que les termes dans le developpement de $\varphi(\mathrm{n})$ *sont de la forme* $\pm\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$ *ou* $\mathrm{d}|\mathrm{n}$ *et d produit de quelque facteur premier distinct de n.*
(d produit d'un nombre pair de facteur pi, $\rightarrow +$; $\rightarrow -$; *Cela suggere la defintion suivante :*

Définition : Fonction de Mobius : $\mathrm{d}= \mathrm{p}_1^{\varepsilon 1}...\mathrm{p}_\mathrm{k}^{\varepsilon \mathrm{k}}$

$$\mathrm{M}(\mathrm{d}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathrm{d} = 1 \\ (-1)^\mathrm{k} & \text{si } \textit{d est le premier de k premier distinct} \\ 0 & \text{si } \textit{d possede un facteur premier pi avec } \varepsilon_\mathrm{i} > 1 \end{cases}$$

Corrolaire :

$$\varphi(\mathrm{n}) = \sum_{\mathrm{d}|\mathrm{n}} \mu(\mathrm{d}) \times \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$$

En effet : si $\mathrm{n} = \mathrm{p}_\mathrm{i}^{\varepsilon 1}...\mathrm{p}_\mathrm{r}^{\varepsilon \mathrm{r}}$ alors tout diviseur d|n est de la forme $\mathrm{d}=\mathrm{p1}^{\gamma 1}...\mathrm{pr}^{\gamma \mathrm{r}}$ $\quad 0 \leq \gamma_\mathrm{i} \leq \varepsilon_\mathrm{i}$

$$\varphi(\mathrm{n}) = \mathrm{n}(1 - \frac{1}{\mathrm{p1}} - ... - \frac{1}{\mathrm{pr}} + \frac{1}{\mathrm{p1p2}} + .. + (-1)^{\mathrm{r}-1} \times \frac{1}{\mathrm{p1...pr}})$$

est la somme de $\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$ *sur tout les diviseur d de n tq :* $\mu(\mathrm{d}) \neq 0$

On l'exprime comme une somme sur tous les diviseur de n, ou les autre diviseur sont coefficient $\mu(\mathrm{d}) = 0$

1.3 Fonction de Mobius. Formule d'inversion de Mobius Poset

Remarque On a montré Théoreme 3 Section 2 : $\mathrm{n} > 1 \quad \mathrm{n} = \mathrm{p}_1^{\varepsilon 1}...\mathrm{p}_\mathrm{r}^{\varepsilon \mathrm{r}} \quad \mathrm{r} \geq 1, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_\mathrm{r} \geq 1$
Alors : $\varphi(\mathrm{n}) = \mathrm{n} \cdot (1 - \frac{1}{\mathrm{p1}})(1 - \frac{1}{\mathrm{p2}})...(1 - \frac{1}{\mathrm{pr}})$; ou $\varphi(\mathrm{n}) = \#\{1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{n} : \quad \mathrm{PGCD}(\mathrm{m}, \mathrm{n})\}$
Dans la démonstration, nous somme arrivés à l'expression suivante :

$$\varphi(\mathrm{n}) = \sum (-1)^\mathrm{k} \cdot \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$$

ou la somme est prise sur tout les diviseur d de n tel que d=1 ou d=$\mathrm{p_i1}, ..., \mathrm{p_ik}$ *avec* $\{\mathrm{i1}, ..., \mathrm{ik}\} \subset \{1, ..., \mathrm{r}\}$

Cette remarque motive la définitions suivantes :

Définition : La fonction de Mobius $\mu : \mathbb{N}* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ est défini par :

$$\mu(\mathrm{d}) = \begin{cases} 1 & \text{si d} = 1 \\ (-1)^\mathrm{k} & \text{si } \textit{d est un produit de k premier distinct} \\ 0 & \text{si } \mathrm{d} = \mathrm{p}_1^{\varepsilon 1}...\mathrm{p}_\mathrm{r}^{\varepsilon \mathrm{r}} \quad \mathrm{r} \geq 1, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_\mathrm{r} \geq 1 \text{ et } \exists \mathrm{k} \in \{1, ..., \mathrm{r}\} \text{tq}\, \varepsilon^\mathrm{k} \geq 2 \end{cases}$$

Corrolaire : $\varphi(\mathrm{n}) = \sum_\mathrm{d}(\mathrm{n})\mu(\mathrm{d}) = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}$ *C'est exactement la formule (*) ecrite en terme de* μ
Le lien entre les deux formule sera éxpliquer par formule d'inversion de mobus
D'abord, on a besion de montrer :

proposition : - $\forall \mathrm{n} > 1 \quad \sum_{\mathrm{d}|\mathrm{n}} \mu(\mathrm{d}) = 0$

$$\mathrm{d}|\mathrm{n} \Rightarrow \mathrm{d} = \mathrm{p}_1^{\gamma \mathrm{i}}...\mathrm{p}_\mathrm{r}^{\gamma \mathrm{r}} \quad 0 \leq \gamma_\mathrm{i} \leq \varepsilon_\mathrm{i} \quad \forall \mathrm{i} = 1...\mathrm{r}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{cases} \mathrm{d}|\mathrm{n} \\ \mu(\mathrm{d}) \neq 0 \end{cases} & \rightarrow \mathrm{P}(\{1, ..., \mathrm{r}\}) \\ \mathrm{d} & \rightarrow \mathrm{S_d} \end{array} \quad \mathrm{S_d} = \{\mathrm{i} : \gamma_\mathrm{i} = 1\} \text{ Cette application est un bijection}$$

L'inverse est borné par : $\begin{array}{ll} P(\{1,..,r\}) & \to d|n : \mu(d) \neq 0) \\ \mathbb{S} & \to \Pi_{i\in\mathbb{S}} p_i \end{array}$

$$\sum_{d|n} = \sum_{d|n,\mu(d)=0} + \sum_{d|n,\mu(d)=0} \mu(d) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \cdot \mathrm{rk}\,(=) **$$

Théoreme : Formule d'inversion de Mobius
soit g $:\mathbb{N}* \to \mathbb{N}*$ *Une bijection* si $\forall n \geq 1$ $f(n) = \sum d|ng(d)$, alors ; $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$

Exemple : - le formule $\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$
s'obtient par l'inversion de Mobius de la formule du theoreme 2 $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
Ici $f(n) = n$: $g(n) = \varphi(n)$
On pourrait demontrer la formule du Corrolaire de cette maniere sans passer par IE

Démonstration : - En remplacant $f(\frac{n}{d})$ selon l'hypothèse on ecrit :

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|n/d} g(c) = \sum_{d,c} \mu(d) \cdot g(c)$$

Observation : $d|n$ et $c|\frac{n}{d} \Leftrightarrow \exists s : n = sd$ et ; $\exists t$ tq $s = ct$; $\Leftrightarrow \boxed{n = t \cdot c \cdot d}$; $\Leftrightarrow c|n$ et $d|\frac{n}{c}$

demo : (par observation) $= \sum_{c|n} g(c) \cdot \sum_{d|n/c} \mu(d) = \sum_{c|n, \frac{n}{c}=1} g(c) = g(n) = 0$ par prop sauf si : $\frac{n}{c} = 1 \Leftrightarrow n = c$

Remarque :
1. Formule d'inversion de Mobius est tres utile !
   En geom 1 ou en Algebre 1 vous verrez bientot Lemme de Burnside pour couple le # d'orbite dans une action d'un groupe fini
2. La fonction de Mobius est aussi très importante ! Par ex, La conjecture de Rieman peut etre refotmule en terme de croissance de $M(n) = \sum_{k=0}^{n} \mu(k)$
3. La fonction de Mobius (et la formule d'inversion) peuvzent etre définie (et démontrer dans un contexte abstrait beaucoup plus large des ensemble partiellement ordonnés

définition : Un ensemble partiellement ordonné (en anglais partially ordered set = "poset") est un ensemble muni d'un orre partiel $(P, \leq)$, c'est a dire une binaire sur P qui est
- — reflexive $[x \leq x \forall x \in P]$
- — antisymétrique $[\forall x, y \in P$ si $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y]$
- — transitive $[\forall x, y \in P :$ si $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z]$

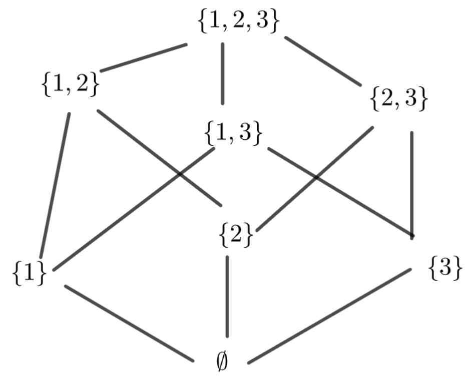
Par différence avec la notions d'ordre total vu en logique on ne demande pas ici que $\forall x, y \in P$ $x \leq y$ ou $y \leq x$
Pour $x, y \in D$, si $x \leq y$ ou $y \leq x$ alors on dit que x,y sont comparable pour $\leq$sinon , incomparable

Exemple : -
$(\mathbb{N}, \leq)$; $(\{1, ..., n\}, \leq)$; sont des ensemble totalement ordonné
2. $(P(\{1, ..., n\}) \subseteq)$ est un poset (plus généralement $\forall X, P(X), \subseteq)$
3. $h \geq 1$ $D_n := \{$les diviseur de n$\}$

$$d \leq d' \Leftrightarrow d|d' \qquad (D_n, \leq) \textit{est un poset}$$

Terminologie : Si $x,y \in P$, on dit que x couvre y si $x > y$ et $\nexists z \in P$ avec $x < y < z$
Poset $\to$ son diagramme de Hasse

Exemple : - $P(\{1,2,3\},\subseteq)$



Définition : -
Deux points P et Q sont isomorphe, $P \cong Q$ si il existe une bijection φ : $P \rightarrow Q$ entre les ensembles tq $\forall x \leq y$ dans P $\Leftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ dans Q

Exemple : -
$P(\{1,2,3\}) \cong D_{30}$

Définition : -
Un "intervalle" dans un point P est defini pour $x \leq y$ comme :

$$(x,y) = \{z \in P : \quad x < z < y\}$$

Ainsi, (x,x) $=\emptyset$ et aussi (x,y) $=\emptyset$ si y courve x

Définition : -
Pour un poset $(P, \leq)$, la fonction sur tous les intervalles ouvert de D, à valeur dans $\mathbb{Z}$, inductivemetn :
$\mu(x,x) = 1 \quad \forall x \in D$
$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq t < y} \mu(x,t) \quad \text{si}\, x,y \in D \quad x \leq y$

Théoreme : D poset fini f :$P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction
Si $g(x) = \sum_{t \leq x} f(t) \quad \forall x \in D$, alors :

$$f(x) = \sum_{t \leq x} \mu(t,x) g(t) \quad \forall x \in D$$

Voir serie 3 pour realiser les formule d'inclusion exclusion et d'inversion de Mobius classique en appliquant la formule général d'inversion des poset

Rappel : # de combinaison de K parmi n $= \binom{n}{k}$ # d'arrengement de k parmi n = N(n,k) = $k!\binom{n}{k}$

Par analogie, on introduit : la notion de combinaison avec répétition de k élément parmi n, noté $\left(\binom{n}{k}\right)$

En d'autre terme, $\left(\binom{n}{k}\right)$ compte le nombre de manière de coloner k balles identiques en n couleur différente

Exemple : -
n = 3 ensemble de couleur $\{1,2,3\}$ k=2 combinaison possible avec répétition de 2 parmi 3

$$\{1,1\},\{1,2,\},\{2,3\},\{3,3\} \quad \left(\binom{3}{2}\right) = 6$$

Défintion : - Un multiensemble (multiset) de taille k sur un ensemble S est une fonction :

$$\nu : \mathrm{S} \to \mathbb{N} \quad \textit{tel que :} \quad \sum_{\mathrm{S}\in\mathrm{S}} \nu(\mathrm{S}) = \mathrm{K}$$

Une combinaison avec répétition de K élément parmi n est un multiensemble de taille K sur $\{1,...,n\}$

proposition : - n,k $\in \mathbb{N}$

$$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$$

Preuve : - (par bijection)
Définisson une aplication

$$\left\{ \begin{array}{l} \textit{multiensemble de} \\ \textit{taille k sur} \\ \{1,...,n\} \end{array} \right\} \to \quad \mathrm{P_n}(\{1,...,n+k-1\})$$

$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq n \longrightarrow \{b_1,...,b_n\}$ *ou* $b_i = a_i + i - 1 \quad i = 1,...,k$

Cette aplication est bien défini :

$$\begin{aligned} & b_1 = a_1 \geq 1 \\ & b_2 = a_2 + 1 > a_1 = b_1 \\ & \vdots \\ & b_i - b_i - 1 = a_i + i - 1 - a_{i-1} - i + 1 + 1 \quad = a_i - a_{i+1} \ \geq 1 \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{car } a_i \geq a_{i-1} \\ & b_k = a_n + k - 1 \leq n + k - 1 \end{aligned}$$

Donc $\{b_1,...,b_k\}$ *sont tous distinct et* $\subset \{1,...,n+k-1\}$

De plus, cette aplication est bijective : son inverse est donné par :

$$\begin{array}{ll} \{b_1,...,b_k\} \subset \{1,...,n+k-1\} \longrightarrow & 1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n \\ \in \mathrm{P_k}\{1,...,n+k-1\} & \textit{ou } a_i = b_i - i + 1 \end{array}$$

on suppose sans perdre de généralité que les éléments de notre sous enemble sont cordonnés
$b_1 \leq b_2 \leq .. \leq b_k$

<u>Conclusion :</u>

$$\left(\binom{n}{k}\right) = |\mathrm{P_n}\left(\{11,...,n+k+1\}\right)| = \binom{n+k-1}{k} \quad \square$$

Remarque : -

1. On peut interpreter $\left(\binom{n}{k}\right)$ comme le nombre de manière de placer k balles non distinguable dans n boites distinguable <u>||oo|o | | ||</u> n=4, k=3 bales $\left(\binom{4}{3}\right) = \binom{6}{3} = 20$

Une explication combinatoir du calcul $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$
<u>||xxx|xxx||</u> $n+k-1$ objet =k balles et n-1 barre séparatrices

Choisir une distribution de k balles en n boites est équivalent a choisir k objet parmi ces n+k-1 et décider que ce sont les balles. Les autre n-1 sont les barres séparatrices

Il y a exactement $\binom{n+k-1}{k}$ possibilité de faire un tel choix

2. On peut également interpréter $\left(\binom{n}{k}\right)$ comme le npmbre de solution de l'équation

$$x_1 + ...x_n = k \quad \textit{en nombre non ngatif} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, ..., n$$

Si $(a_1, ..., a_n)$ est une telle solution on pense a a_i comme étant le # de balles dans la i-eme boites

Définition : - Pour n$\in \mathbb{N}$ une composition de n en k part est une suite $(a_1, ..., a_k)$ d'entier $a_i \in \mathbb{N}^*$,i=1,...,k telles que n= $a_1 + ... + a_k$

En d'autre termes, une composition de n en k part est une solition de l'equation

$$x_1 + ... + x_n = n \quad \textit{en nombre positif}$$

De plus on définit une composition faible de n en k part, si on admet $a_i \in \mathbb{N}$

Exemple : - $\left(\binom{n}{k}\right)$ compte le nombre de composition faible de k en part :

Multiensemble su S
$\nu : S \to \mathbb{N}$

$\forall s \in S, \nu(s) =$ *"le nombre de fois que l'éléments s est répété dans ce multiensemble"*

$$\boxed{\begin{matrix} \textit{taille } k \\ \Leftrightarrow \sum_{s \in S} \nu(s) = k \end{matrix}}$$

Multiensemble sur $\{1, 2, 3\}$ de taille 2

$$\{1,1\}, \quad \{1,2,\}, \quad \{2,2\}, \quad \{1,3\}, \quad \{2,3\}, \quad \{3,3\}$$

$$\nu : \begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 0 \\ 3 \to 0 \end{matrix} \qquad \nu : \begin{matrix} 1 \to 1 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 0 \end{matrix} \qquad \nu : \begin{matrix} 1 \to 0 \\ 2 \to 1 \\ 3 \to 1 \end{matrix}$$

Un multiensemble sur $\{1, ..., n\}$, c'est

$$\nu \quad \begin{matrix} \{1, ..., n\} \to & \mathbb{N} \\ 1 \to & \nu(1) \\ \vdots & \\ n \to & \nu(n) \end{matrix}$$

que l'on peut écrire :

$$\underbrace{1, ..., 1}_{\nu(1)\,\text{fois}}, \underbrace{2, ..., 2}_{\nu(2)\,\text{fois}} ...., \underbrace{n, ..., n}_{\nu(n)\,\text{fois}} \quad k\,\text{nombre}$$

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k \leq n \qquad \begin{matrix} \text{ex} : \{2, 3\} \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{matrix}$$

Exemples : - Composition de 5 en 3 part

$$\begin{aligned} 5 &= 2 + 2 + 1 \quad 5 = 1 + 3 + 1 \\ 5 &= 3 + 1 + 1 \\ 5 &= 1 + 2 + 2 \quad 5 = 1 + 1 + 3 \\ 5 &= 2 + 1 + 2 \quad \textit{6 composition} \end{aligned}$$

Proposition 2 : - $n \leq \mathbb{N}^*$

Le nombre de composition de n en k part est $\binom{n-1}{k-1}$

Corrolaire : - Le nombre de composition de n est 2^{n-1}

En effet , $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = 2^{n-1}$ Par corrolaire 1 du binome

Preuve de prop 2 : - Méthode "stars & bars"

On veut calculer le nombre de solutions de : $x_1 + ... + x_n = n$ en nombre positif qui equivaut a calculer le nombre de distribuer de n balles (non distinguable) en k boite (list) de sorte à avoir au moin une balle dans chaque boite :

||o |oo |oo |o || n=6 k=4 || o oo ooo ||

on place d'abord n balle dans une grande boite et ensuite on rajoute k-1 barre séparation

Par condition de ne pas créer une boite vide, on peut placer max 1 barre entre k-1 barres, au plus un par places

Donc le nombre de possibilité les k-1 barres pour satisfaire les conditions = le # de choix de (k-1) places parmi (n-1) = $\binom{n-1}{k-1}$ $\square$

Remarque : - On peut aussi calculer le nombre de composition de n en k part en réduisant au calcul du # de composition faible qu'on connait :

$$\{(a_1, ..., a_n) : a_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = n\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (b_1, ..., b_n), b_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{k} b_i = n - ki = 1, ..., k \end{array} \right\}$$

$$(a_1, ..., a_n) \longrightarrow (b_1, ..., b_n) \textit{ avec } b_i = a_i - 1$$

alors : $\sum_{i=1}^{k} b_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} a_i - k = n - k$ clairement bijectif : comme dans la preuve de prop I

Or, on a que $|\{(b_i, .., b_k) : \sum_{i=1}^{k} b_i = n - k, b_i \geq 0\}|$

$$= \left(\!\!\binom{k}{n-k}\!\!\right)$$

$$= \binom{k+n-k-1}{n-k}$$

$$= \binom{n-1}{n-k}$$

$$= \binom{n-1}{(n-1)-(n-k)} = \binom{n-1}{k-1}$$

NB : - On pourrait calculer le # de composition faiblepar "star & bars" (série 4)

Par analogie avec § 1, on peut aussi parler d'arrengement avec répétition de k parmi n, ce qui revient à parler de multiensemble odronné ou de distribution de k balles, distinguable dans n boites distinguables

Prosposition 3 : - le # d'arrengement avec répétition de k parmi n est n^k
En effet pour la 1ere balle, on a n possibilité de la place dans une boites

De meme pour la 2-eme, 3-eme,...,k-eme. Donc au total, par le principe de multiplication on a n^k choix
□

Coeficiant multinomiaux : -

Rappel : -
$\binom{n}{k}$:= # de sous ensemble de taille k dans un ensemble de taile n $\{1, ..., n\}$

= # de maniere de sparer $\{1, ..., n\}$ en deux sous ensemble : un de taille k et l'autre de taille (n-k)

Cette interpretation suggere une genrealisation suivante :

Définition : - $n \geq 0$, pour tout $n = a_1 + ... + a_m$ avec $a_i \geq 0$
$\binom{n}{a_1, .., a_m}$:= # de maniere de separer $\{1, ..., n\}$ en m sous ensemble de taille $a_1, ..., a_m$

Dans ces situation, on devrait ecrire : $\binom{n}{k, n-k}$ au lieu de $\binom{n}{k}$ Mais on continue a ecrire $\binom{n}{k}$ pour des binomiaux

Proposition 4 : - (Theoreme multinomial)

1) $\binom{n}{a_1, ..., a_m} = \frac{n!}{a_1!, ..., a_m!}$

2) $\binom{n}{a_1, ..., a_m}$ est le coeficiant aupies de : $x_1^a 1, ... x_m^a m$: $(x_1, .., x_m)^n =$

$$\sum_{a_1 + ... a_m = n} \binom{n}{a_1, ..., a_m} x_1^a 1, ..., x_m^a m$$

3) $$\sum_{a_1 + ... + a_n = n} \binom{n}{a_1, .., a_n} = m^n$$

Preuve : -

1) Nous choisissons d'abord a_1 ul element allant dans la 1 sous ensemble : il y a $\binom{n}{a_1}$ maniere de le faire

Ensuite nous choisissons a_2 elements parmi les n-a_1 qui restent : $\binom{n - a_1}{a_2}$ maniere de le faire

Par le principe de multiplication , $\binom{n}{a_1, ..., a_m} = \binom{n}{a_1} \binom{n - a_1}{a_2} ... \binom{n - a_1 - ... - a_{m-1}}{a_m} =$
$\frac{n!}{a_1! a_2! ... a_m!}$

Propositon : - Theoreme multinomial

2) $(x_1 + ... + x_m)^n = \underbrace{(x_1 + ... + x_m)...(x_1 + ... + x_m)}_{\text{n fois}}$

$= \sum_{a_i \geq 0} \boxed{C}\, x_1^{a1}...x_m^{am}$

le coeficient qui compte le nombre de terme avec la meme collection de puissance $(a_1, ..., a_m)$

$C_{a_1,...,a_m}$ $=$ # *de partitionner l'ensemble* $\{1, ..., n\}$ *de numeros facteur* $(x_1, ..., x_m)$*en sous ensemble de taille* $a_1, ..., a_m$. *Le sous ensemble de* a_i *facreur par contribution* x_i *au terme* : $x_1^a 1, ..., x_m^a m$

3) *on pose* :$x_1 = ... = x_m = 1$

Remarque : - Penser a interpreter les coeficiant multinomiaux en terme de balles et boite et donner une pruve combinatoir au point 3) de la proposition 4 (exo)

Exemple : -

MISSISSIPI : $n = 11; m = 4$

$a_1 = 1; a_2 = 4; a_4 = 2$

d'arrengement de ce mot $= \frac{11!}{1!4!4!2!} = \binom{1}{1, 4, 4, 2} = 34650$

1.4 Partition d'un ensemble "twelve-fold way"

Rappel : A un ensemble Une famille de sous ensemble :

$\{A_i\}_{i \in I} \subset P(A)$ *est une partition de A*

si$A_i \neq \emptyset, i \in I, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in I$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

Définition : Soit n$\in \mathbb{N}$ Notons S(n,k) := le nombre de partition d'un ensemble a n element en k partie par convention S(0,0) := 1

Ces nombre s'appellent les nombre de Stirling de seconde espece

Observation : - Une maniere de noter ces nombre $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ a ete introduit en 1935 par Karameta

2) - s'n,k) = nombre de Stirling de premier espece compte certein permutations

Propositon 1 : - n$\geq$ 1 S(n,0)=0 ; S(n,1) = S(n,n) = 1

$$2 \leq k \leq n-1 \quad S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

Demo de la proposition : (Preuve combinatoir analogue a la preuve de la prop 4section 1

soit a $\in$ *A Alors les partition de A sont de deux type :*

i) *Les parttiion de A tq que* $\{a\}$ *est une partie*

ii) *Les partie de A tq la partie q laquelle appartient a continent aussi d'autre elements*

$$\text{Partition}_k^i(A) \sqcup \text{Partition}_k^{ii}(A)$$

$\text{Partition}_k^i(A) \underbrace{\longleftrightarrow}_{\text{est en bijection}} P_{k-1}(A \backslash \{a\})$:

$$|P_{k-1}(A \backslash \{a\})| = S5n-1, k-1)$$

Pour calculer $|P_k(A))|$ mettons un ordre aleatoir sur les partie $A_1, ..., A_k$

Alors : $P_k(A) \longleftrightarrow \{1, ..., k\} \times P_k(A \backslash \{a\})$

En effet a toute partition de type (ii) de A on fait correspondre le nombre $j \in \{1, ..., k\}$ tq $a \in A_j$ et la partition : $A_1 \sqcup ... \sqcup A_j \backslash \{a\} \sqcup ... \sqcup A_k$ de l'ensemble A $\backslash\{a\}$ en k partie

Ainsi notre bijection s'ecrit comme suit :

$$P_k(A) \longrightarrow \{1, ..., k\} \times P_k(A \backslash \{a\})$$

$A = A_1 \sqcup ... \sqcup A_k \to (j \quad, A_1 \sqcup ... \sqcup A_j \backslash A_k \neq \emptyset)$ car la partition $A = A_1 \sqcup ... \sqcup A_k$ est de type (iii)

Clairement une bijection : pour l'inverse on ajpute a la j-ieme partie)

$$|P_k(A)| = |\{1, ..., k\} \times P_k(A \backslash \{a\})| \overset{\text{mult}}{=} k \cdot S(n-1, k)$$

Par le principe d'addition $S(n,k) = S(n\text{-}1,k\text{-}1) + k \cdot S(n-1, k)$ $\square$

Définition : - Le nombre total de partition d'un ensemble a n element est dit : nombre de Bell :

$B(n) = \sum_{k=1}^{n} S(n, k)$

Propostion 2 : - $n \geq 1$ $B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B(i)$

Corollaire : - Tout comme les coeficiant binomiaux, les nombre de Stirling de 2 espece forment un triangle de Pascal (exo serie 5)

Nous allons maintenant resumer les différente denombrement que nous avons vu etudier, dans un tableau, en language de balle et de boite :

Ce procede s'apelle "The Twelve-fold way" :

On fixera un ensemble B de balle de taille n et un ensemble X de boite de taille k

Une distribution des balle dans les boites s'ecrit comme une fonction :

$f : B \to X$

On peut considerer :

- toute fonction $B \to X$

- des fonction surjective $B \to X$ [distribution des balles tq toute boite a au moin une balle]

- injective $B \to X$ [distribution telle que tout boite a plus d'une balle]

De plus en comptant les distribution des balles en boite ou distribuant 4 cas de figure et B, et X, peuvent etre distinguable ou non

Ces 4 figure sont decrit par 4 relation d'equivalence a mettre sur les fonction $B \to X$

- $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = f_2$
- $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1$ soincide avec f_2 a partir de B pres. Plus exactement :

$$\exists \pi \in \sigma(B) \textit{une permutation de B tq} : f_1(b) = f_2(\pi(b)) \forall b \in B$$

La 2eme equivalence revient au cas de B non dist ; X dist

- $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists \tau \in \sigma(X)$ une permutation de X tq $f_1(b) = \tau(f_2(b)) \quad \forall b \in B$

  Si correspond B dist, X non dist

- $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow \exists \pi \in \sigma(B), \tau \in \sigma(X)$ tq $f(b) = \tau(f_2(\pi(b))) \quad \forall b \in B$
  X,B indistinguable

type f / équivalent	f arbitraire	f injecive	f surjective
B,X distinguable $f_1 \sim f_2 = f_2$	1) k^n	2) $N(k,n)$	3) $k\,!S(n,k)$
B indistinguable, X distinguable $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 \circ f_2 \circ \pi$	4) $\left(\binom{k}{n}\right)$	5) $\binom{k}{n}$	6) $\binom{n-1}{k-1}$
B dist, X indist $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = \tau \circ f_2$	7) $\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$	8) $\begin{cases} 0 & n \geq k \\ 1 & n \leq k \end{cases}$	9) $S(n,k)$
B,X indist $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = \tau \circ f_2 \circ \pi$	10) $\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$	11) $\begin{cases} 0 & n \geq k \\ 1 & n \leq k \end{cases}$	12) $p_k(n)$

correction semaine passé : $S(n,m) = m! \sum_{\substack{1 \leq a:a \leq n \\ n=a_1+...a_m}} \binom{n}{a_1, ..., a_m}$ *on etudie les f* f :B $\rightarrow$ X ou B,X deux ensemble dini tq $|B|=n$, $|X| = k$ Il y a 3 type (injective, surjective, sous-condition) et 4 relation d'equivalence : suivant si les elements de B et X sont dinstinguable ou non :

Ces relation peuvdnt etre schemeatise comme :

$$f : B \rightarrow X$$

<u>But</u> : On veut compter le nombre de classe d'equivalence de fonction dans chacun des cas :

Rappelons ce que nous avons deja calculer :

4) # de dest de n balles non dist dns k boite distinguable = # multiensemble de taille n sur k = $\left(\binom{k}{n}\right)$
Cf remarque du §4

6) # de composition de n en k part = $\binom{n-1}{k-1}$ prop 2 du §4

5) si f est injective il y a donc au plus une balle par boite. Une telle distrivution correspond a un choix de n boite parmi les k ou une balle sera place = # de combinaison de n parmi k = $\binom{k}{n}$

2) ici les balles sont distinguable. On peut proceder comme 5) mais l'ordre du choix des boites est important c'est donc egal au nombre d'arrengement de n parmi k = N(k,n)

1) Meme iddé, la difference avec 4) c'est que l'ordre importe. On a donc un arrengement avec repetition de n parmi

8) C'est l'exercice 3.5 de la serie 4 on avait montrer : $\begin{cases} 0 & n > k \\ 1 & n \leq k \end{cases}$

11) La relation d'equivalence de la 3eme ligne est plus fa que la relation de la 4 eme au sens que :
$f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_1 \sim f_2$ (cf serie 5)
on a donc que le nombre de classe d'equivalence dans la 4eme ligne est plus petit que
les nombre de classes dans la 3eme.
Or l'unique maniere de placer des bazlle de 8) si $n \leq k$ fonctionne aussi dans 11) si les balles ne sont pas distinguable $\Rightarrow$ 8) = 11)

9) Nous avons ici le nombre d'un ensemble a n elemeny en k part = S(n,k)

3) Si on distingue les boite chaque placement de 9) peut etre permute de k ! façons, ce qui nous donne 3)

7) Si on enleve la condition de surjection de 9) alors les boite peuvnt etre vide
Au sens des partition cela veut dire que l'on compte les partition au plus petit nombre de part.
Il peut y avoir entre 0 et n-1 boite vides on a donc 7) = $\sum_{i=1}^{k}(n, i)$

Pour calculer 12 puis 10 il suffit de changer 9 si les balles deviennent indistinguable soit de changer 6 si les boite deviennet indistinguable

Rappel du §4 : -
Soit $n \in \mathbb{N}$ une composition de n part est une maniere d'ecrire n comme somme ordonné de k entier strictement positif :

$$(a_1, ..., a_n) \quad a_1 + ...a_k = n$$

Définition : - Soit $n \in \mathbb{N}$ une partition de n en k part est une collection $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ de nombre tel que :
— $\lambda_i \in \mathbb{N} \quad (\lambda_i \geq 0)$
— $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k$
— $\lambda_1 + ... + \lambda_k = n$

Remarque : - Par rapport aux composition les partition ne prennent pas en compte l'ordre des termes (oronné de maniere décroissante)

- Par rapport au partition d'un ensemble B de taille n en k part on ne tient pas en compte de quel élément de B est dans quelles parties (les élements de B deviennent indistinguable)

Exemple : - Partition de 5

$$\begin{array}{lll} 5 & = 5 & \lambda(5) \\ & = 4+1 & \lambda(4,1) \\ & = 3+2 & \lambda(3,2) \\ & = 3+1+1 & \lambda(3,1,1) \\ & = 2+2+1 & \lambda(2,2,1) \\ & = 2+1+1+1 & \lambda(2,1,1,1) \\ & = 1+1+1+1+1 & \lambda(1,1,1,1,1) \end{array}$$

Parfois on écrit :$\lambda \longrightarrow$ n, "λ partition" et $\lambda = (1,1,1,1,1) \quad = [1^5] \quad \to 5$

$\lambda(2,2,1) \quad = [2^2\ 1] \quad \to 5$

Définition : - équivalente des partition :

$(\lambda_1, ..., \lambda_k) \to$ n est un multiensemble sur $\{1, ..., n\}$ de taille n

Notation : - On note $p(n) = \#$ de partition de n et $p_k(n) = \#$ de partition de n en exactement k part

par convention : $p_0(0) = p(0) = 1$ Revenons au tableau :

Théoreme : - La relation de 12) est $p_k(n)$ et 10) est : $\sum_{k=1}^{k} p_k(n)$

Question : - Est ce qu'il existe un formule pour calculer le nombre de partition ?

Pour le nombre de partition d'un ensemble on a :

Proposition 2 : -

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} \cdot (k-i)^n$$

Preuve : - Serie 6

Par contre pas de formule raisonnalbe pour p(n)
On peut représenter une partition d'un entier n par son diagramme Ferreres (parfois appelé diagrmame de Young

$$10 = 5+3+2 \longleftrightarrow \begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

$$10 = 4+3+1+1+1 \longleftrightarrow \begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

Proposition 3 : - $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$

Preuve : - analogue prop 1 voir serie 6

Remarque : -

- Les diagramme de Ferrers permettent de demontrer facilement la prop 3
- Le nombre de partition de n en au plus k part est égal au nombre de parttition de n+k en k part

En effet Si on a une partition de n+k en k part : la premier colonne est de taille k. On les fait correspondre le diagramme obtenue en supprimant la premier colone :

$$\begin{array}{llll}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array}$$

C'est une partition de n en au plus k part. Ce procede est reversible c'est donc une bijection $\Rightarrow$ $P_k(n+k) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)$ ce qui est une autre formule pour 10)

Définition : - Pour toutes partitions $\lambda \to n$ on definit la partition conjugué λ' obtenue en echangeant les lignes et les colones dans le diagtamme de Ferrers

$$\lambda[4\ 3\ 1^2] \to 9 \begin{array}{llll}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{llll}\bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & \\ \bullet & & & \end{array} = [4\ 2^2\ 1]$$

A l'aide de cette transformation on peut montrer par exemple :

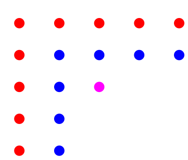
Proposition 4 : - P(n) la pzrtie la plus grande est de taille m $= P_m(n)$

Démonstration : - l'opération $\lambda \to \lambda'$ est une bijection entre les partitions de n avec la plus grande partie de taille m et les partition de n en m partie

(la premier ligne de λ contient m point $\Leftrightarrow$ la premier colone de λ est de taille m)

Théoreme 2 : - Le nombre de partition auto-adjointe ($\lambda = \lambda'$) est égale au nombre de partition de n en partie impair distinct

Démonstration : -



$$\left.\begin{array}{ll}\bullet & \text{2k-1} \\ \bullet & \text{2l-1 avec } k \neq l \\ \bullet & 1\end{array}\right\} \text{une partition de n en partie impair distinct} \quad \square$$

1.5 Fonction génératrice :

Définition : - Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre, La fonction génératrice de la suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (appelée aussi serie génératrice) est une expression formelle (on dit aussi (serie formelle) :

$$a_0 + a_1 \cdot s + a_2 \cdot s^2 + ... = \sum_{0=\infty}^{n} a_1 s^n \qquad \text{avec S variable formelle}$$

Si a partir d'un certain $N\in\mathbb{N}$ $a_N = 0 \quad \forall n > N$ on parle de polynôme générateur.

Sur l'ensemble de fonctions génératrice on definit deux operation :

$$\left.\begin{array}{ll} A(s) & = a_0 + a_1 s + ... \\ B(s) = b_0 + b_1 s + ... & \end{array}\right\} \rightsquigarrow A(s) + B(s) = \sum_{0=\infty}^{k} c_n s^k a_i \quad c_n = a_n + b_n$$

$$\left.\begin{array}{l} A(s) = \sum_n a_n s^n \\ B(s) = \sum_n b_n s^n \end{array}\right\} \rightsquigarrow A(s)B(s) = \sum i0na_i b_{n-i}$$

L'addition et la multiplication des fonctions génératrice sont associative et commutatives.
Il y a un élément neutre pour l'addition $\quad 0 = 0 + 0 \cdot s...$
Il y a une élément neutre pour la multiplication $\quad 1 = 1 + 0 \cdot s + 0 \cdot s^2...$

Remarque : -

L'ensemble des fonctions génératrice des suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est un anneau avec ces deux opération l'addition et multiplication
En particulier si A(s) est une fonction génératrice son inverse pour l'addition est :

$$\begin{aligned} -A(s) &= -a_0 + (-a_1) \cdot 1 - a_2 \cdot s^n + ... \\ &\underset{\text{ou ecrit}}{=} a_0 - a_1 \cdot s - a_2 s^2 ... \end{aligned}$$

Définition : - On peut définir aussi sur l'ensemble de fonction génératrice l'opération de substitution.

Si $\begin{array}{l} A(s) = a_0 + a_1 s + ... \text{ et} \\ B(t) = b_0 + b_1 t + ... \end{array}$ Alors on définit la substitution de B dans A

$$A(B(t)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} e_n t^n \text{ avec } e_n = \sum_{k=1}^{n} a_k f_{k,n} \qquad n \geq 1$$

ou $f_{k,n}$ c'est le coeficiant aupres de t^n dans $(B(t))^k$ $e_0 = a_0$

Observation : - La substitution n'est pas définie si $b_0 \neq c$ car dans ce cas on aurait :

$$e_0 = a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + ... = \underbrace{\sum n = 0^{\infty} a_n b_0^n}_{\text{une serie numerique qui peut ne pas etre sommable}}$$

Exemple : - Si B(t) = -t = 0+(-1)t+0t^2 + ...

Question : - Les opération de multiplications et substitutions sont-elles inversibles ?

Proposition 1 : - Soit $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n S^n$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \in \mathbb{Q}$ ou $a_n \in \mathbb{R}$. Alors $\exists B(s)$ (à coefficient dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}$) tq :

$$A(s) \cdot B(s) = 1$$

Démonstration : -

$$A(s) \cdot B(s) = \sum_{0=\infty}^{n} c_n s^n \text{ avec } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-1}$$

On veut que $A(s) \cdot B(s) = 1 + 0s + 0 \cdot s^2. + ...$

En particulier on a $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow b_0 = \frac{1}{a_0}$ car $a \neq 0$

On a trouvé b_0 on cherche b_1 qui satisfait :

$$c_1 = -\frac{a_1}{a_0^2} \quad (\text{car } a_0 \neq 0)$$

On a trouvé b_1 on passe a $c_2 = 0$ etc...

Proposition 2 : - Soit $B(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ...$; avec

$$b_0 = 0 \text{ et } b_1 \neq 0$$

Alors $\exists! A(s) = 0 + a_1 s + a_2 s^2 + ...$
$cC(n) = 0 + c_1 u + c_2 u^2 + ...$

$$\boxed{\text{tq} \quad \underbrace{A(B}_{\text{l'inverse a gauche}} \ (t)) \quad \text{et} \quad \underbrace{B(C(}_{\text{l'inverse a droite}} \ u)) = u}$$

Démo : - analogue, on ne fait pas les det ails

Exemple : -

1) serie geometrique

$G(s) = \sum_{0=\infty}^{n} s^n$ fonction génératrice de la suite $a_n = 1 \quad \forall n$

$G(s) = 1+s+S^2 + ...$

$1 \cdot G(s) = s + s^2 + s^3 + ... = G(s) - 1 \Rightarrow G(s) = \frac{1}{1-s}$

L'expression $\frac{1}{1-s}$ correspond a $1 \cdot \underbrace{(1-s)^{-1}}_{\text{l'inverse de la fonction gen}}$

2) Serie gene "généralisée"

$a_n = k^n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$G_k(s) = \sum_{0=\infty}^{n} k^n s^n \quad G_k(s) = \frac{1}{1-k \cdot s}$

2) Notons "$(e^s)'$" $:= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n!} x^n$ serie génératrice de la suite $a_n = \frac{1}{n!}$

Par substitution $e^{-s} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-s)^n}{n!} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k s^n}{n!}$

Alors $e^s \cdot e^{-s} = \sum_n \frac{s^n}{n!} \cdot \sum_n \frac{(-1)^n \cdot s^n}{n!}$

par multi serie gen $= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)}{i!(n-i)!} \right) s^n = 1$

$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les nombre de Fibonacci : -

$F_0 = 0; F_1 = 1;\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ si $n \geq 2$

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

$fib(1) = \sum_{0=\infty}^{n} F_n \cdot s^n$ fonction génératrice des nombre de fibonacci

$$Fib(s) = s + \sum_{n \geq 2} F_n \cdot s^n$$

$$\underbrace{s + \sum_{n \geq 2} F_{n-1} F_{n-1} \cdot s^n} \qquad \underbrace{+ \sum_{n \geq 2} F_{n-2} s^n}$$

$$= s \sum_{n \geq 2} F_{n-1} s^{n-1} \qquad = s^2 \cdot \sum_{n \geq 2} F_{n-2} j^{n-2}$$

$$= s \cdot \sum_{i \geq 1} F_i j^i \qquad = s^2 \cdot \sum_{i \geq 2} F_i s^i$$

$$= s \cdot Fib(s) \qquad s^2 \cdot Fib(s)$$

Donc on a trouver :

$$Fib(s) = s + s \cdot Fib(s) + s^2 \cdot Fib(s)$$

$$\begin{aligned} 1\text{-s–s}^2 &= \text{- (s–s}_1)(s-s_2) \\ &=\text{-}(s+\varphi)(s+\psi) \\ & s_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad s_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ & \text{avec } \underbrace{\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}_{\text{le nombre d'or}} \quad \psi = \tfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$\varphi \cdot \psi = -1$ et $\varphi + \psi = 1$

$$\text{Fib(s)} = \frac{-1}{(1+\varphi)(1+\psi)} = \frac{A}{1+\varphi} + \frac{B}{1+\psi}$$

avec A et B a determiner $\quad A(s+\psi) + B(s+\varphi) = \text{-s}$

Alors en posant s$= -\psi$ on trouve $B(\varphi - \psi) = \psi$

$$\Rightarrow B = \frac{\psi}{\varphi - \psi} = \frac{\psi}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Fib(s)} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\psi}{5+\psi} - \frac{\varphi}{s+\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\psi}{s+1/\psi} - \frac{1}{1-1/\varphi}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1+\varphi s} - \frac{1}{1-\psi s}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Donc Fib(s)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n s^n - \sum_{0=\infty}^{n} \psi^n s^n\right)$$

$$= \sum_{0=\infty}^{n} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)s^n$$

En egalisant les coefficiant aupres de s^npour $(\forall n \geq 0)$ on trouve :

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}(\varphi^n - (1-\varphi)^n) \quad n \geq 0} \end{aligned}$$

De plus on peut montrer que $\dfrac{F_n}{F_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (exo 5.7)

Remarque : - Plus généralement les nombre $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont une relation de récurrence linéaire ssi la fonction génératrice de cette suite est une fonction "rationnelle" cad un rapport de deux polynôme

voici un exemple d'une fonction génératrice pas rationnel. Les nombre de Catalan

Définition : - Le n-ieme nombre de Catalan $C_n :=$ # de différent placement correct de n paire de paranthèse

$c_0 = 1$ (par convention)

$c_1 = 1$ ()

$c_2 = 2$ ()() (())

$c_3 = 5$ ()()() ()(()) (())() (()()) ((()))

Les nombre de Catalan satisfont une relation de récurence

$$\underbrace{\underbrace{(.........)}_{\text{k pair}}\ \underbrace{......}_{\text{n–k paire}}}_{n+1 \text{ paire}}$$

$$\Rightarrow C_{n+1} = \sum_{0=n}^{k} c_k(n-k)$$

Une relation de récurence qui n'est pas linéaire quadratique

$C_a + (s) = \sum c_n s^n$ *fonction génératrice des nombre de Catalan*

Si on calcule $(C_a + (s))^2$ on trouve :

$$(c_a + (s))^2 = \sum_{0=\infty}^{n} d_n s^n \text{ avec } d_n = \sum_{0=k}^{i} c_n \cdot c_{n-i}$$

$$\text{Donc } (c_A t(s))^2 = \sum_{n\geq 0} c_{n+1}s^n \underset{\substack{\text{par le principe}\\ \text{de rcurence}}}{=} c_{n+1}$$

$$s \cdot (c_a + (i))^2 = \sum_{n\geq 0} c_{n+1}s^{n+1} = \sum_{n\geq 1} c_n s^n$$

$$= c_A t(i) - 1$$

$$\Rightarrow \quad s \cdot (c_A(i))^2 - c_a t(s) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s \cdot x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{a deux racines}$$

$$\text{donc on a : } \begin{array}{l} \cancel{c_a t(s) = \frac{1+\sqrt{1-45}}{2s}} \\ c_a t(s) = \frac{1-\sqrt{1-4s}}{2s} \end{array}$$

Or on sait que $c_a t(0) = 1$

$$\frac{1-\sqrt{1-45}}{2s} = \frac{4s}{2s(1+\sqrt{1-45})} = \frac{2}{1+\sqrt{1-45}}$$

On conclut : $\text{lat}(s) = \frac{1-\sqrt{1-45}}{2s}$

Par le binome de Newton généralisé on a l'expension en série de Taylor pour $\sqrt{1+x}$ ce qui permet de trouver, en égalisant les coéficiant la formule pour C_n

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$$

1.6 Fonction génératrice des nombre de partition et identité d'Euler

Rappel : - $\lambda \longrightarrow n$ une partition de n, $n \in \mathbb{N}$ est une manière d'écrire n en somme d'netier strictement positif, sa tenir compte de l'ordre des termes :

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k \qquad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$$

Une partition en k partie, et par convention on écrit :

$$\sum_{1=k}^{i} \lambda_i = n \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq 1$$

Notons : $\underline{P}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)s^n$ la fonction génératrice de la suite $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, ou $p(n) = \#$ de partition de n

Par convention, p(0)=1

Theoreme 1 : - (Euler)

$$\underline{P}(1) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-jk)^{-1}$$

Preuve : - $\underline{P}^{(1)}(s)$ = la fonction génératrice des nombres de partition de n tq toute partie est égale a 1 :

$$\begin{aligned}\underline{P}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(1)}(n)s^n \quad &= 1 + p^{(1)}(1)\cdot s + p^{(1)}(2)\cdot s^2 + ...\\ &= 1 + 1\cdot s + 1\cdot s^2 + 1\cdot s^3 + ...\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

$p^{(2)}(s) :=$ ......# partie égale a 2

$$p^{(2)}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n est impaire} \\ 1 & \text{si n est pair}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&= 1 + 1\cdot s^2 + 1\cdot s^4 + ... = 1 + s^2 + s^4 + ...\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \quad \text{ou } t = s^2\\ &= \frac{1}{1-t} = \frac{1}{1-s^2}\end{aligned}$$

Plus généralement, $\underline{P}^{(k)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{kn} = \frac{1}{1-s^k}$

fonction génératrice des nombre de partition de n ou toute partie est égale a k :

$$\underline{P}^{(k)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(k)}(n)s^n \quad \text{et } p^{(k)}(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \nmid n \\ 1 & \text{si } k \mid n\end{cases}$$

$$\begin{aligned}P^{(1,2)}(n) &:= \#\text{ de partition de n avec partie égales a 1 ou a 2}\\ &= \#\text{ de partition den avec partie} \leq 2\\ &= p^{(\leq 2)}(n) \qquad n = \underbrace{1+1+...+1}_{k} + \underbrace{2+2+...+2}_{n-k}\end{aligned}$$

$$p^{(1,2)}(n) \quad = \sum_{k=0}^{n} p^{(n)}(k)p^{(2)}(n-k)$$

d'après la formule de multiplication des f,g §6 :

$$\boxed{\underline{P}^{(1,2)}(s) = \underline{P}^{(1)}(s)\cdot P^{(2)}(1)}$$

Noter que $\forall i, j \quad \underline{P}^{(i,j)}(n) = \frac{1}{(1-s^i)(1-s')}$ avec le meme argument que pour i=1, j=2

$\underline{P}^{(\leq 3)}(s) =?$
$P^{(\leq 3)}(n) = p^{(1,2,3)}(n) = \#$ de partir en n partie égales a 1,2 ou 3

$$n = \underbrace{1+...+1+2+....+2}_{k} + \underbrace{3+...+3}_{n-k}$$

$$p^{(1,2,3)}(n) = \sum_{k=0}^{n} p^{(1,2)}(k)\cdot p^{(3)}(n-k)$$

De nouveau, par formule de multiplic ation, on conclut :

$$\underline{P}^{(\leq 3)}(s) = \underline{P}^{(1,2)}(s) \cdot \underline{P}^{(3)}(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)(1-s^3)}$$

De meme maniere, par induction :

$$\begin{aligned}\forall m, \underline{P}^{(\leq m)}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p^{(\leq n)}(n)s^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty} p^{(\leq n1-1)}(k)p^{(m)}(n-k))s^n \\ &= \underline{P}^{(\leq n-1)}(s) \cdot \underline{P}^{(m)}(s) = \frac{1}{(1-s)...(1-s^m)}\end{aligned}$$

(fonction génératrice des nombre de partition avec partie $\in \{1, ..., m\}$)

Pour pouvoir écrire la fonction génératrice $\underline{P}(s)$ *comme produit infini* $\prod_{k=1}^{\infty}(1-s^k)^{-1}$ *Nous avons besoin d'interpreter k produit comme une série formelle. Pour toutes partition de n, les aprties de la partition ne peuvent pas prendre des valeurs >*

Donc $p(n) = p^{(\leq n)}(n)$

Donc dans $\underline{P}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)s^n$ le coeff aupres de s^n est le meme que dans :

$$\underline{P}^{(\leq n)}(n) = \frac{1}{(1-s)...(1-s^n)}$$

Donc pour calculer p(n) on a besoin que du produit fini $\prod_{k=1}^{n} (1–s^k)^{-1}$

C'est dans ce sens la qu'on comrpend $\prod_{k=1}^{\infty}(1-s^k)^{-1} = \underline{P}(s)$

Theroeme : - # de partition de n enn partie distinct =# de partitionde n en partie impaire

Preuve : - (par fonction génératrice. Il y a aussi des preuves bijectives)

$\underline{P}^{(odd)}(s) = \frac{1}{(1-s)(1-s^2)...}$ la meme preuve mais en utilisant que les valeurs impair des parties

$\underline{P}^{(dist)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{(dist)}(n)s^n =?$

ou : $p^{(dist)}(s) =$ # de partition de n tq toutes les partie sont distincts

Dans la fonction génératrices $\underline{P}(s)$ les partition en parties de valeur i sont comptés par le fateurs :

$$\frac{1}{1-s^i} = \sum_{n=0}^{\infty} s^{in}$$

$\underline{P}(s) = (\sum_{n=0}^{\infty} s^n)(\sum_{n=0}^{\infty} s^{in})...(\sum_{n=0}^{\infty} s^{in})...$

Si on demande que $\forall$i, la partie i n'apparait pas plus que k fois, on aura :

$$(1 + s + ... + s^k)(1 + s^2 + ... + s^{2k})...(1 + s^i + ... + s^{ik})$$

=fonction génératrice des # de partition ou toute partie est répéter au plus k fois

Dans ses termes, la fonction génératrice des # de partition en partie distincts correspond a k=1 et donc on obtient :

$$\underline{P}^{(\text{dist})}(s) = (1+s)(1+s^2)... = \prod_{k=1}^{\infty}(1+s^k)$$

Notons que : 1+s $= \dfrac{1-s^2}{1-s}, \quad 1+s^2 = \dfrac{1-s^4}{1-s^2}$

Donc $\underline{P}^{(\text{dist})}(1) = \dfrac{1-\cancel{s^2}}{1-s} \cdot \dfrac{\cancel{1-s^4}}{\cancel{1-s^4}} \cdot \dfrac{\cancel{1-s^6}}{1-s^3} \cdot \dfrac{\cancel{1-s^3}}{\cancel{1-s^4}} .... = \dfrac{1}{(1-s)(1-s^3)(1-S^5)...}$

Remarque : - $\underline{P}^{(\text{dist})}(s) = \sum p^{(\text{dist})}(n)s^n = (1+s)(1+s^2)(1+s^3)...$ et l'on ecrit en série infinie alors, le coeficient aupres de s^n dans cette série sera égale a :

$$P^{\text{dist}}_{\text{even}}(n) - P^{(\text{dist})}_{\text{odd}}(n), \text{ ou}$$

$P^{(\text{dist})}_{\text{odd}}(n)(n)$ # de partition de n en un nombre pair de partie distinctes.

D'autre part, on remaruqe que $\prod_{k=1}^{\infty}(1-s^k) = (\underline{P}(1))^{-1}$ Cette observation donne lieu a des identité interressantes observé par Euler

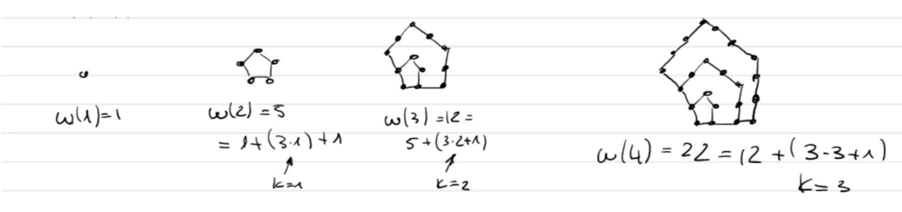
Euler a dabord calculé $(\underline{P}(s))^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-s^k)$
$=1-s-s^2+5^5+5^7-S^{12}-5^{15}+5^{22}+5^{26}-s^{35}-5^{40}+...$

Theroeme 3 (Euler) : -

$n \geq 1$ $p^{(\text{dist})}_{\text{even}}(n) = p^{(\text{dist})}_{\text{odd}}(n)$ sauf si n=ou $\begin{cases} \omega(m) := \dfrac{3m^2-m}{2} \\ \omega(-m) := \frac{3m^2+m}{2} \end{cases}$

Pour ces valeurs, $p^{(\text{dist})}_{\text{even}}(n) - P^{(\text{dist})}_{\text{odd}}(n) = (-1)^m$ Les nombre $\omega(m)$ s'appellent les nombre pentagononaux :

$$\omega(m) = \sum^{m-1} k = 0(3k+1)$$



Corollaire 1 : - (identité d'Euler)

$$\boxed{\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \quad (x^{\omega(m)} + x^{\omega(-m)}}$$

Corolaire 2 : - Pour n$\geq$ 1

$$P(n) = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}[p(n-\omega(m)) + p(n-\omega(-m))]$$

En réalité la somme est finie car seulement les termes avec (n-k)$\geq$ 0 sont $\neq$ 0

Pour montrer Cor.2 rapelons nous que $\prod_{k=1}^{\infty}(1-s^k) = \underline{P}(s)^{-1}$ et donc

$$\underbrace{\underline{P}(s) \cdot \prod_{k=1}^{\infty}(1-s^k) = 1}_{\text{serie generatrice}}$$

$=1+0\cdot + 0 \cdot^2 + \ldots$ ou égalise les coeff

Preuve du thm 3 (preuve bij)

$\boxed{\text{si } b \leq q}$

$\lambda \longmapsto n$

pente de taille q.

base de taille b

partie dist

On coupe la base et on colle à droite de la pente

partie dist.

On a enlevé une partie $\Rightarrow$ la parité du nombre de parties à changé.

$\boxed{\text{si } b > q}$

parties dist

parties dist.

On coupe la pente et on la colle en dessous de la base la parité du # de parties a changé.

Cela établit une bijection entre partition en partie distinctes avec # part de parties et partition en parties distcinctes avec # impair de parties ce qui montre Theoreme 3, sauf que ça ne marche pas dans deux cas :

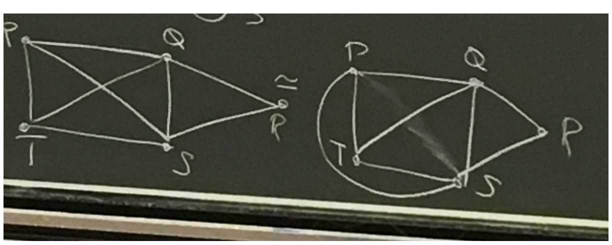
Si la base et la pente ont un carré en commun et b=p ou b=1+p

Dans ce cas de figure n $= b+(b+1)+\ldots(b+ \underbrace{(b-1)}_{\text{vu que } b=q}) =$

$\omega(b)$

de meme dans le 2 cas exceptionnel (b=p+1) Var noter sur le site pour la fin de l'argument $\square$

1.7 Graphes : définition exemple



définition : - Un graphe G est un ensemble non-vide "sommet" V(G) et un ensemble E(g) d'"arrete" ou une arrete est un paire non-ordonné de sommet.

Dans la version la plus simple de la définition d'un graphe on pose $E(G) \subset V(G) \times V(G) \backslash Diag = \{(v,w) : v,w \in V(G), \quad w \neq v\}$

Cela définit un graphe "simple" cad que $\forall u,w \in V(G)$ il y a au plus une arrète entre v et w (pas d'arrète multiple) et $\forall e \in E(G)$ e relie deux sommets distincts (pas de lacet)

Terminologie : - On dit un "lacet" pour une arrète dont les deux éxtrémité sont un même sommet $v \in V(G)$

Plus généralemetn on définit E(G) comme un multiensemble sur l'ensemble $V(G) \times V(G)$

Définition : - Deux graphes G_1, G_2 sont isomorphe $G_1 \cong G_2$ s'il existe une bijection sur l'ensemble des sommets $f : V(G_1) \to V(G_2)$ tq $\forall u,v \in V(G)$ # d'arrete entre u et v égale au nombre d'arrete entre f(u) et f(v) dans G_2

Si G_1 et G_2 simple alors la condition s'écrit comme $(u,v) \in E(G_1) \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E(G_2)$

Clairement : $G_1 \cong G_2 \implies |V(G_1)| = |V(G_2)|, \ |E(G_1)| = |E(G_2)|$

Il y a des triplets de sommets qui sont tous liée entre eux (des triplets) dans G_1 mais pas dans G_2 or :

$$\begin{array}{llll} \text{bijection} & a \to a & b \to b & c \to c \\ & x \to x & y \to y & z \to z \end{array}$$

Définition : un graphe est fini si $|V(G)| < \infty$ et $|E(G)| < \infty$

Sinon le graphe est infini : pour des graphes infini on peut dans le plan distinguer entre dénombrable ou non-dénombrables

Exemple de quelque graphes infinis :

$$V(G) = \mathbb{Z} \quad E(G) = \{(i, i+1), \ i \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{array}{ll} V(G) = & \mathbb{Z}^2 \\ E(G) = & \{((i,j),(i,j+1)) \mid i,j \in \mathbb{Z}\} \cup \{(i,j),(i,i+1)) \mid i,j \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

Ce sont des exemple de graphes de Cayley des groupes

Quelque mots sur les graphes orienté :

On peut modifier la définition de graphe en définisant une arrète comme une paire ordonné de sommets

De toute graphe orienté on obtient un graphe sou-jacent non orienté en "oubliant" les direction. On peut ainsi avoir en général plusieur graphe orienté sur le meme graphe non-orienté sous-jacent

Définition : - Un graphe est connexe s'il n'existe pas de position VL(G)$= \bigsqcup_{i \in I} V_i$ telle que $E(G) = \bigsqcup_{i \in I} E_i$ avec E_i constant d'arrete entre les sommets V_i

Si G n'est pas connexe on a alors G$= \bigsqcup_{i \in I} G_i \ G_i(V_i, E_i)$

On dit alors que $\{G_i\}_{i \in I}$ sont les composant connexe de G.

Remarque : - Rappel $V = \bigsqcup_{i \in I} V_i$ une partition si $V_i \subset V \ \forall i$ sous-ensemble non-vide

$V = \bigcup_{i \in I} V_i \quad V_i \cap V_j = \emptyset \forall i \neq j$

Dans la definition de graphe connexe on parle de partition de V (donc en particulier $V_i \neq \emptyset$)

Par contre on ne demande pas que $E_i \neq \emptyset \ \forall i$

Terminologie : - On dit que les deux sommets de G sont adjacents s'il existe une arrête dans G puis les relier

Si un segment est une extrémité d'une arrète e dans G alors on dit que e est incident a v ou v est incident a e Les relation d'adjacence et l'incidence sont notées par des matrices :

$$\mathrm{A(G)} = (\mathrm{a_{v,w}}), \quad \text{ou } \mathrm{a_{v,w}} \textit{ est le nombre d'arrete entre v et w}$$

matrice d'adjacence Si G est non-orienté A(G) est symétrique : $\mathrm{a_{vw}} = \mathrm{a_{wv}}$

Si G est simple alors $\mathrm{a_{vw}} \in \{0, 1\}$ et $\mathrm{a_{vw}} = 0\ \forall$i

Et si $|\mathrm{V(G)}| = \mathrm{n}$ alors A(G) est une matrice n×n

par convention s'il a un lacet sur v, alors $\mathrm{a_{vw}} = 2$

La matrice d'incidence $\mathrm{D(G)} = (\mathrm{d_{ve}})_{\substack{\mathrm{v \in V(G)} \\ \mathrm{e \in E(G)}}}$ avec $\mathrm{d_{ve}} = \begin{cases} 1 & \text{si v est incident a e} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ Si $|\mathrm{V(G)}| = \mathrm{n}$ $|\mathrm{E(G)}| = \mathrm{m}$ alors D(G) est n×m

Définition : - Pour tout v∈ V(G) le degré deg(v) c'est le nombre d'arrète dans G incident avec v

Par convention un lacet en v contribue 2 au deg(v)
G est dit régulier (d-régulier, régulier de dep d) si tous les sommet de G est le même degré (égale a d)

exemple : - 1. Un sommet de degré 0 est dit "isolé"

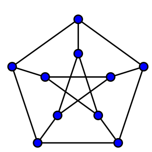
2. Un sommet de degré 1 est dit "une feuille"

3. Un graphe connexe 2 régulier sue n sommets s'appelle un cycle $\mathrm{C_n}$ de longueur n, $\mathrm{n} \geq 2$

4. Si on efface une arrête dans $\mathrm{C_n}$ on obtient un "chemin" de longueur n, $\mathrm{P_n}$
Donc $\mathrm{P_n}$ a toujours 2 feuilles et n-2 sommets de deg 2

5. Si on relie tous les sommets de $\mathrm{C_n}$ a un sommet supplementaire on obtient une "roue" $\mathrm{W_{n+1}}$ sur n+1 sommets
$\mathrm{W_6}$ On a un sommet de deg n et n sommet de deg 3

6. En général il y a beaucoup de graphe 3-régulier non-isomorphe avec le même nombre de sommets. Voici un exemple d'un graphe 3-régulier :



7. Une série importante d'exemple $\forall \mathrm{n} \geq 1$ $\mathrm{K_n}$ = le graphe complet sur n sommets est le graphe simple ou $\forall \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{V(K_n)}$ $\mathrm{v} \neq \mathrm{w}$ (v,w)∈ $\mathrm{E(K_n)}$
• $\mathrm{K_1}$
Tout grapahe orienté dont le graphe sous-jacent est $\mathrm{K_n}$ s'appelle un tournament : on représente par les flêche des résultats des matchs dans un tournois avec n participant sans match nul tq : chaque joue avec chacun

Théoreme : - (Hand shake Lemme)

Dans tout graphe fini, la somme des degré de tous les sommets est un nombre pair

Corrolaire : - Il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair

Preuve du corolaire : - $\sum_{v\in V} = \sum_{v\in V} \deg(v') + \sum_{v\in V} \deg(v)$

$\Rightarrow \sum_{v\in V} \deg(v)$ est pair $\Rightarrow$ donc cette somme on a un nombre pair de termes $\square$

Preuve du Théoreme ; - $\sum_{v\in V(G)} = 2\cdot|E(G)|$.

parce que chaque arrète apporte exactement +1 dans le degré de chacune de ses éxtrémité $\square$

Remaruqe : - Pour les graphes orienté on a définie pour $v \in V(G)$

in-deg(v) le nombre d' arrète qui se termine en v

out-deg(v) nombre d'arrète qui partent de v

alors le théoreme analogue a "Handshake Lemme" est e suivant :

$$\sum_{v\in V(G)} \mathrm{in}-\deg(v) \quad = \quad \sum_{v\in V(g)} \mathrm{out}-\deg(v)$$

Rappel : - Un graphe G est un ensemble non vide de sommet

Dans les version la plus simple de cette définition on pense a E(G) comme un sous-ensemble de l'ensemble pairs non-ordonné de sommets de G

De plus on demande $E(G) \subset \{(v,w) : \text{ paire non} - \text{ordonne tq } v \neq w\}$

en général E(G) est un multi-ensemble sur l'ensemble des pairs non-ordonné de sommets

1.8 Chemin cycle et autre sous-graphes

définition : - Un sous-graphe d'un graphe G c'est un graphe H tq $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$

Par exemple si e$\in$ E(G) on. peut considérer G-e

$$V(G-e) = V(G) \quad E(G-e) = E(G)\backslash\{e\}$$

G-e est le graphe qu'on obitnet en effacant e

G-v sous-graphe de G obtenu en effacant v et toutes les arrête incidente a v

Terminologie : - On dit un "chemin" dans G pour un sous-graphe de G isomorphe a P_n n$\geq$ 1 (P_n vu dans les exemple au §8)

On dit "un cycle" dans G pour un sous-graphe de G Isomorphe a C_n $n \geq 1$

Remarque : - Souvent on dit un chemin pour une séquence de sommets $v_p..v_n$ dans G

tq $v_i \neq v_j$ sauf peut-etre v_0 et v_n qui peuvent être égaux ce qui donne "chemin ferme" = un cycle

Prfois l'on dit "un chemin" pour une séquence de sommets adjacents qui ne sont pas néscéssairement tous différents

Proposition : - Un graphe G est connexe si $\forall u, w \in V(G)$ $\exists$ un chemin dans G reliant v à w.

Preuve : -

$\Longleftarrow$: Si G n'est pas connexe alors $V(G) = V_1 \sqcup V_2$ tq $\nexists$ d'arrête entre V_1 V_2 $V_1 V_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists v \in V_1,\ w \in V_2$ tq pas de chemin entre v et w

$\Longrightarrow$: Supposons qu'on trouve dans G (connexe) $v,w \in V(G)$ pas lié par un chemin

Définissons $\begin{cases} V_1 := \{u \in V(G) \text{ tq } \textit{ u et v sont liée par un chemin}\} \ni u \\ V_2 := \{u \in V(G) \text{ tq } \textit{ u et w sont liée par un chemin } \} \ni w \end{cases}$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ En effet si $\exists z \in V_1 \cap V_2$ alors z est liée par $\underline{P}$ a v et par $\underline{P}$ a w

Alors le chemin P, $\underline{P}$ reliant v a w ce qui n'est pas possible

de plus il n'y a pas d'arrête dans G entre V_1 V_2 car si e(x,y) était un telle arrête alors $x,y \in V(G)$ $x \in V_1$ $y \in V_2$

$\underline{P}$, P serait un chemin v et et w ou $\underline{P}$ est un chelin entre v et x et $\underline{P}$ un chemin entre w et y

Si $V(G) \supsetneq V_1 \sqcup V_2$ alors cela veut dire qu'il existe dans G des correspondante qui ne sont pas connecté ni à V_1 V_2 par les meme arguments

Ainsi G continet au moins deux composantes connes , ce qui contredit la connexité de G $\square$

Proposition : - Si G est connexe et $|V(G)| = n$ alors $|E(G)| \geq n-1$

Remarque On peut supposer G simple car sinon $|E(G)|$ ne pourra pas augmenter

Prenons $v \in V(G)$ $\begin{cases} V_1 := \{\textit{tous les sommets incidents avec G} \\ V_2 := \{\textit{tous les sommets de } F \backslash (V_0 \sqcup V_1)\textit{) incident avec } V_1\} \end{cases}$

De la meme manière on définit V_3..etc jusqu'a ce qu'on ait liisté tous les sommets. Tous les sommets seront listé car G est connexe :

Donc $|E(G)| \geq |V_1| + |V_2| + ..|V_k| = |V(G) \backslash \{v_0\}| = n-1$ $\square$

Remarque il peut y avoir bien plus d'arrête entre les sommets des V_i)

Définition : - Un graphe est biparti si l'ensemble de sommets peut-être partitionner $V(G) = V_0 \sqcup V_1$

$(V_0 V_1 \neq \emptyset)$ tq toute arrête de G relie un sommet de V_0 a un sommet de V_1 On pense souvent a une telle partition comme a un coloriage des sommets en 2 couleurs

Exemple : - $\forall m, n \geq 1$ on définit le graphe complet biparti $K_{m,n} \cong K_{n,m}$ en mettant :

$V(K_{m,n}) = V_0 \sqcup V_1$ avec $|V_0| = m$ $|V_1| = n$ et tel que tout sommet de V_0 est liée a tout sommet de V_1 par une arrête et il n'y a pas d'autre arrête

$$|V(K_{mn})| = m + n \quad |E(K_{mn})| = m \cdot n$$

Cas particulier n=1

$K_{n,n}$ = étoiles a n branche"

Proposition : - G est biparti ssi tout cycles dans G est de longueur pair $\Longrightarrow$ G parti $V(G) = V_0 \sqcup V_1$ et $\forall e \in E(G)$ relie V_b a V_1

Soit $({}_0, v_1, ..v_{n-1}, v_n = v_0)$ un cycle Alors on aura :

Si $v_0 \in V_0$:

$$\begin{array}{cc} V_0 & v_1 \\ v_1 & v_3 \\ v_4 & v_5 \\ \vdots & \vdots \\ v_{n-2} & v_{n-1} \end{array} \quad v_0 = v_m \Rightarrow m \text{ est pair}$$

$\Longleftarrow$ Sans perdre de généralité supposons G connexe Soit v$\in$ V(G)
$\forall$w $\in$ V(G) et liée à v par un chemin car G est connexe Montrons :

$$\mathrm{V}_0 := \{\mathrm{w} \in \mathrm{V(G)}\ \mathrm{tq}\textit{les chemin le plus court entre w et v est de longueur pair}$$

$V_1 = V(G) \backslash V_0$ A montrer : $\forall$e $\in$ E(G) relie un sommet de V_1 avec un sommet de V_2

Donc autrement dit on doit montrer qu'il n'y a pas d'arrête reliant deux sommets de V_0 ou deux sommets de V_1
En effets montront pour V_0 s'il existe e = (x,y) $\in$ E(G) avec x,y $\in$ V_0 alors on aurait un cycle de longueur impair P, e, P car P chemin entre v et x P chemin entre v et y sont de longueur pair $\Box$

Un cas particulier très important

Définition : - Un graphe connexe sans cycle s'appelle un arbre

Théoreme : - Si b est un graphe sur n sommets alors les propriété suivantes sont équivalentes :

(i) G est un arbre

(ii) $\forall \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{V(G)}\ \exists!$ chemin entre v et w

(iii) G est connexe et |E(G)| = n-1

Preuve : - (i) $\Leftrightarrow$ (ii)

1) O a deja vu e prop 1 que G connex $\Leftrightarrow \forall \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{V(G)}\ \exists$ chemin entre v et w
2) $\exists$ deux chemin entre v et w $\Leftrightarrow \exists$ un cycle dans G
Donc, etre un arbre $\Leftrightarrow$ être connexe + unicité de chemin entre v et w $\forall \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{V(G)}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Par recurrence sur n
n=1 tout est vrai initialement
On suppose qu'on a montre i) $\Rightarrow$ iii) pour tout graphe avec $\leq \mathrm{n} - 1$ et prend G avec n sommets
Soit e $\in$ E(G) G-e n'est pas connexe

En effet Si g-e était connexe alors $\exists$ dans G-e un chemin
Mais alors ce chemin complété par e serait un cycle dans G

G-e a deux comopsant connexes avec # de sommets. $\leq$ 1 n-1

On applirque l'hypothèse de récurrence a ce composantes connexes et on compte

$$|\mathrm{E(G)}| = 1 + \underbrace{|\mathrm{E}(\mathrm{G}_1)|}_{=|\mathrm{V}(\mathrm{G}_1)|-1} + \underbrace{|\mathrm{E}(\mathrm{G}_2)|}_{=|\mathrm{V}(\mathrm{G}_2)|-1} \quad \mathrm{ou} \mathrm{G}_1\ \mathrm{G}_2 = \textit{composant connexe}$$

$=|\mathrm{V}(\mathrm{G}_1)| + |\mathrm{V}(\mathrm{G}_2)| - 1 = \mathrm{n} - 1$

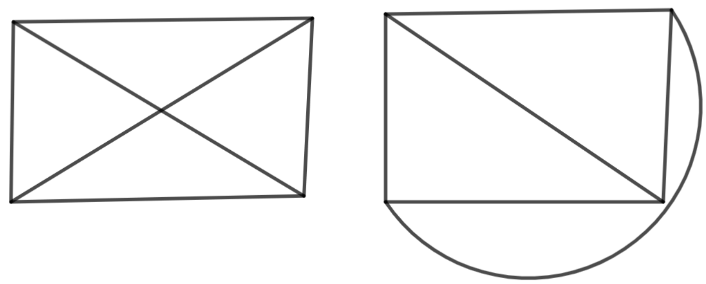
$*$ On peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux composant connexe G_1 G_2 car si G n'a pas de cylces alors G-e n'as pas de cylce

iii) $\Rightarrow$ i) Voir la série d'exercice

1.9 Graphe planaire

Définition : - Un graphe est planaire si on peut le dessiner dans le plan (avec point représentant les sommets est des courbe lisses représentant les arrêtes) sans intersection d'arrête sauf aux sommets auxquelles elle sont incidentes

Un tel dessin d'un graphe G s'appelle un plongement planaire (En anglais planar graphe $\rightarrow$ plane graphe)



G graphe planaire 2) est un plongement planaire de G

Remarque : - Il a été démontré que pour tout graphe planaire simple possède un plongement planaire ou toutes les arrête sont des segments

Théoreme : - Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaire

La preuve qu'on voit au cours est basé sur une formule d'Euler

Soit $G \subset \mathbb{R}^2$ un plongement planaire. c'est a dire un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ consistant de tous les points représentant les sommets et les points appartenant aux courbre représentant les arrêtes

un plongement planaire : $G \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 \backslash G$ est partagé en un certain nombre de région qu'on appelle "des faces" dont une infini

Si G est un plongement planaire avec faces $f_1..f_k$ et f_1 est une face infinie alors $\exists$ des plongements du même graphe planaire ou f_i devient face infinie pour $\forall i = 1..k$

On peut ale voir en vérifiant que un graphe est planaire ssi il peut être dessiné sous-intersection d'arrête sur une sphère S^2 (argument : passer par l projection stéréographique) Laquelle des faces est infinie après la projection $S^2 \to \mathbb{R}^2$ dépend seulement du choix du pôle nord et ne dépend pas du graph

Théoreme : - (formule d'Euler) Soit G un plongement planaire d'un graphe planaire connexe, et

soient $\begin{cases} s = \textit{ nombre de sommets} \\ a = \textit{nombre d'arrete} \\ f = \textit{ nombre de faces de G} \end{cases}$ alors s-a+f =2

Corrolaire : - En particulier on vpit que le nombre de face dans un plongement est planaire d'un grpahe planaire ne dépend que du graphe

Démonstration : -

Par récurence a=0 On a supposé G connexe $\implies$ G = {v} un sommet isolé

$\mathbb{R}^3$ s=1; a=0 ; f=1 l'unique face, la face infini

Hypothèse de récurence. On suppose que le théoreme est démontré pour tout des plongement planaired connexes avcec au plus a-1 rrête et on considère un plongement avec a arrête

Si G est un arbre alors par le résultat vu au § 9

$\implies$ a = s-1 De plus f=1 car un plongement planaire d'un arbre n'a pas la face infinie

En effet une face finie dans un plongement planaire correspnd toujours a un cycle dans G et un arbre par def n'a pas de cycle

Donc pour G un arbre on a : s-a + f = s-s+1+1 = 2

Si G un plongement planaire avec faces $f_1..f_k$ et f_1 est une faces infinie alors $\exists$ des plongementn planaire du même graphe planaire ou f_1 devient face infini pour $\forall i = 1..k$

On peut le voir en vérifiant que un graphe est planaire ssi il peut etre dessiné sur intersection d'arrête sur une sphère S^2 (argument : passer par la projection stéréograpique)

Laquelle des faces est infinies après la projection $S^2 \to \mathbb{R}^2$ dépend seulement du choix du pôle nord et ne dépend pas du graphe

Remarque de récurence : - Si G n'est pas un arbre alors $\exists$ e $\in$ E(G) tq e appartient a un cycle

Alors G-e est un graphe connexe

G-e est un plongement planaire connexe avec a-1 arrête. On peut appliquer l'hypothèse de récurence a G-e

Donc G-e : s-a-1 - f-1 = 2

le nombre de faces de G-e est f-1 car en enlevant e on détruit un cycle dans G et donc on a réduit le nombre de faces

$\Longrightarrow$ s-a+f = 2 $\square$

Corrolaire : -

i) si G est un graphe simple connexe planaire avec s ≥ 3 alors a$\leq 3s-6$

ii) Si de plus G n'as pas de triangle alors a$\leq 2s-4$

Le corrolaire permet de montrer Thm 1 : Preuve du Théoreme 1 : K_5 : s=5 ; $a = \frac{5(5-1)}{2} = 10$

Si K_5 est planaire on a contradiction avec i) $\cancel{10 \leq 9}$ K_3 : s = 6; $a = 3 \cdot 3 = 9$ si $K_{3,3}$ est planaire on a une contrafiction avec corrolaire ii) : $\cancel{9 \leq 8}$ Donc $K_{3,3}$ n'est pas planaire $\square$

Remarque : - i) il ne suffit pas pour éliminer $K_{3,3}$: $9 \leq 3 \cdot 6 - 6 = 12$

Démonstration du Corollaire : -

i) soit G un plongement planaire G est simple donc toute face est borné par au moins 3 arrère En comptant les arrêtes autour de chaque face $a \geq \frac{3 \cdot f}{2}$ (on divise par 2 car cahque arrête appartient a exactemtn 2 faces)

Avec la formule d'Euler ça donne :

a=s+f - 2 et f$\leq \frac{2a}{3} \Longrightarrow a \leq s + \frac{2a}{3} - 2 \Longrightarrow a \leq 3s - 6$

ii) Si de plus on a exclu les triangle alors $\forall$ face dans G est borne par au moins 4 arrête Pareil a i) on a $a \geq \frac{4 \cdot f}{2} = 2f$

Avec la formule d'Euler on a : $a = s + f - 2$ et $f \leq \frac{a}{2} \Rightarrow a \leq s + \frac{a}{2} - 2 \Rightarrow a \leq 2s - 4$ $\square$

Définition : - Une subdivision d'un graphe G est un graphe obtenu de G en remplacant les arrête deG par des chemin de longier ≥ 1

Il est clair que tout sous-graphe d'un graphe planaire est planaire. Il est aussi clair que si yn graphe G possède un sou-graphe qui n'est pas planaire alors G n'est pas planaire En particulier en vu du Th 1 si G possede un sous-graphe isomorphe K_5 ou a $K_{3,3}$ alors G n'est pas planaire

Théoreme 3 : - Un graphe est planaire ssi il n contient pas la sous-graphe isomorphe a une solution de K_5 ou de $K_{3,3}$

NB Notez qu'une subdivision d'un graphe G est planaire ssi G est planaire

A part le passage ou sous-graphe on peut définir encor un eopération sue un graphe G : la contradition d'arrête

Si $e \in E(G)$ contracter e revent a effacer e de G et de fusionner ces deux extremité ces deux extremité en un sommets

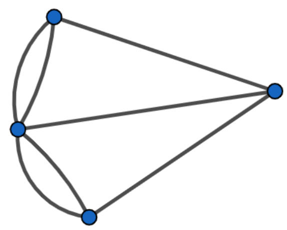
Le graphe de Peterson avec les arrête verte contracté

Théoreme : - G est planaire ssi il n'y a pas de sous-graphe qui se contractent sur K

2 graphe eulérien et hamiltonien

Le probleme de 7 pont de Konigsberg : est-il possibel de faire une promenade en ville arrivant au point de départ et passant par chaque point exactement une fois

On peut modeler le probleme sur un graphe :



$\exists$? un parcours dans G partant d'un sommet et arrivant au meme sommet (parcours fermé) qui emprunte toute arrête de G exactement une fois ?

Définition : - On dit qu'un graphe G et eulérien s'il existe dans G un parcours fermé passant par toute arrête de G exactement une fois. Un tel parcours s'appelle un circuit eulérien

Remarque : -

1) Existence d'un curcuit eulérien dans G $\iff$ a la possibilité de trac G sur une feuille sans lever le crayon
2) Le point de départ d'un parcours eulérien peut être n'importe quel sommet

Définition : - G est semi-eulérien s'il existe un parcours dans G puis passe par toute arrête de G exactement une fois

(On ne demande pas que le parcours soit fermé : le point de départ peut-etre différent du point d'arrivé)

Euler a resolu ce probleme de 7 pont en montrant une condition necessaire et suffissante pour un graphe d'être eulérien et il a vérifier que G (le graphe des ponts) ne satisfait pas cette condition

Théoreme d'Euler : - Un graphe connexe G est eulérien ssi. le degré de chaque sommet de G est pair

Lemme : - Si tout sommet d'un graphe est de degré ≥ 2 alors ce graphe contient un cycle

Reamarque : - Le lemme est seulement vrai pour des graphes finis

Preuve du Lemme : - Si G a un lacet ou des arrete multiple il a un cycle, donc on peut supposer que G est simple. Soit $v_0 \in V(G)$. G connexe $\implies$ $\exists$ une suite d'arrête incidente avec v_0 (v_0, v_1). Car $\mathrm{def}(v_1) \geq 2$. il existe une arrête différente de(v_0, v_1) incidente a v_1 (v_1, v_2) $v_2 \neq v_0, v_1$ car G est simple

Et aussi de suite : $v_0, v_1, v_2, v_3...$:

$\forall i \geq 1$ en utilisant la condition $\deg(v_i) \geq 2$ ou trouve un sommet v_{i+1} adjacent a v_i et v_{i+1} , v_{i-1} Comme G est fini on va tôt ou tard retomber sur un sommet que nous avons listé. Soit v_k le premier tel sommet k$\geq$ 3 suposons que $v_k = v_j$ avec $j < k$ alors v_j, v_{j+1}, v_k est un cycle

Preuve du Théoreme : -

$\Longrightarrow$ soitP un circuit eulérien dans G A chaque fois que L passe par un sommet ça contribue 2 au degre de ce sommet : l'arrête par laquelle on est arrivé et l'arrête par laquelle on repart. De plus un nouveau passage par le meme sommet contribue encore 2 au degre car $\underline{P}$ n'utilise $\forall$ arrete qu'une seule fois. $\underline{P}$ utilise toutes les arrête donc en faisant $\underline{P}$ on les a toutes compté et donc le degré de $\forall$sommet est pair

$\Longleftarrow$ Récurence sur $|E(G)|$

Base : Si G a 3 arrête tout ces graphes sont eulérien, hypothèse. Soit G a n arrête supposons que tout graphe avec $<$ n arrête satisfait le Théoreme

G connexe et de degre de $\forall$ sommet est pair $\Longrightarrow$ le degre de $\forall$ sommet ≥ 2 $\Longrightarrow$ par Lemme $\exists C \subset G$
Si C continet toutes les arrête de G alor Théoreme est démontré

sinon on considère le graphe H=G-C (on efface dans G les arrête que font dans C)

$|E(G)| < |E(G)|$ donc on peut appliquerl'hypothese de recurence a toute composante connexe de H. en effet L'hypothèse s'applique car en effacent des arrête d'un cycle on ne change pas le degre des sommets $\notin$ a C et on diminue le degre de $\forall$ sommet de G par $\in$ C donc le deg de $\forall$ sommet de H est encore pair

voila un circuit eulérien dans G on part d'un sommet $\in$ C si c'est un sommet isolé de H on parcourt C, jusqu'a ce qu'on arrive a une composante de H avec ≥ 2 sommets

On fait le circuit eulérien dans cette composante et on continue a retracer C Ainsi de suite jusqu'au retour du point de départ

Corrolaire : - (de la preuve) G est eulérien ssi l'enszmble de ses arrête se partitionne en cycle avec des ensemble d'arrête disjointe

Remarque : - On peut montrer de manière similaire qu'un graphe G est semi-eulérien ssi $\exists$ exactement 2 sommet de degré impair dans G

Définition : -

Un graphe est dit Hamiltionien s'il existe dans G un cycle qui passe par tout les sommets de ce graphe

(Analogie avec le graphe eulérien : un graphe est hamiltionien $\Longleftrightarrow$ il existe un parcours fermé dans G qui passe par tout sommets de G exactement 1 fois, sans compté le point de départ et d'arrivé)

W. hamilton $\rightsquigarrow$ un jeu des cycles hamiltonien dans le grphr de dodécaèdre

De manière analogue on dit que G est smi-hamiltonien s'il continet un chemin qui couvre tous les sommets de G

NB : on ne connait pas le critère pour qu'un graphe d'être hamiltonien. Il est en général difficile de déterminé si un graphe donné est Hamiltonien

Théoreme : - Soi tG est un graphe avec n sommets n$\geq$ 3 si degré de chaque sommets de G $\geq \frac{n}{2}$ alors G est hamiltonien