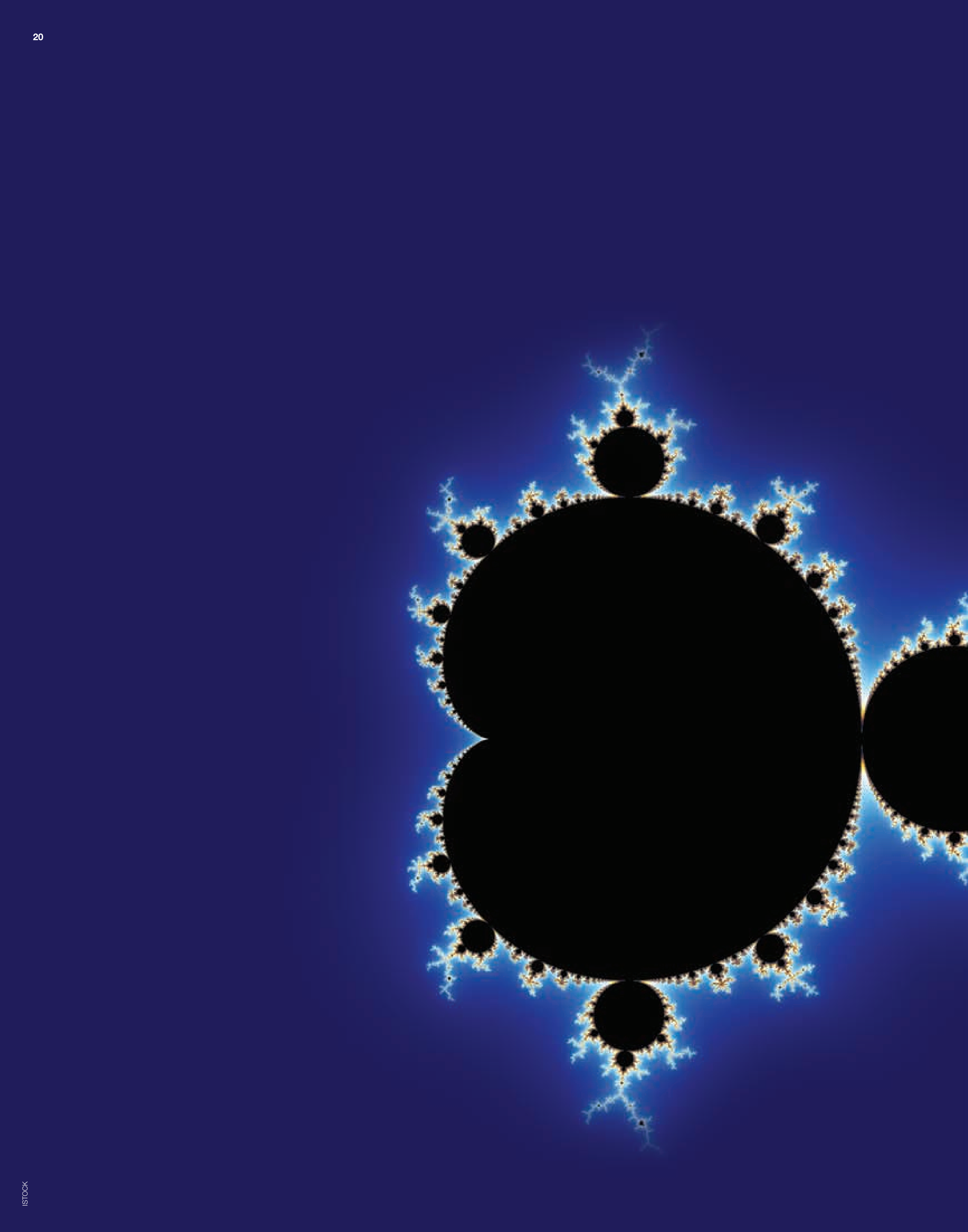
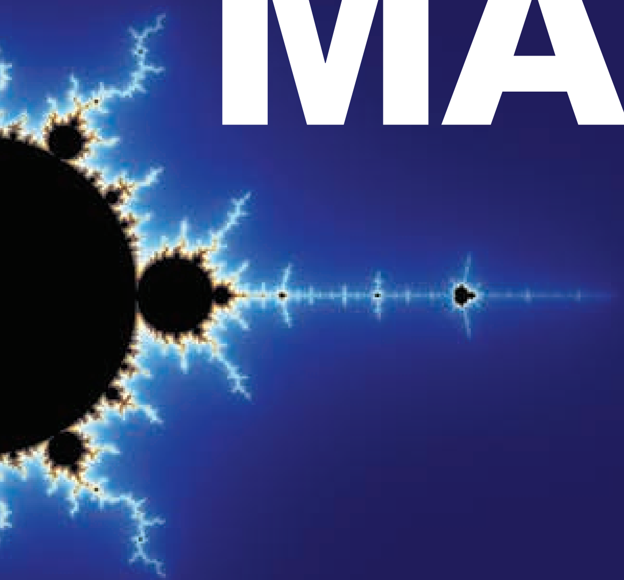


ISTOCK

PÔLE DE RECHERCHE NATIONAL

LA VRAIE NATURE DES MATHS



DISCIPLINE ARIDE POUR LES UNS, FASCINANTE POUR LES AUTRES, LES MATHÉMATIQUES CONSTITUENT LE MEILLEUR LANGAGE POUR DÉCRIRE LES LOIS DE LA NATURE. EXEMPLE AVEC LES TRAVAUX DU PÔLE SWISSMAP, DIRIGÉ PAR STANISLAV SMIRNOV, LAURÉAT DE LA MÉDAILLE FIELDS 2010 ET PROFESSEUR À LA SECTION DES MATHÉMATIQUES

Dossier réalisé par Vincent Monnet et Anton Vos

Campus : Le Pôle de recherche national (PRN) SwissMAP (Swiss Institute for Advanced Research in Mathematics and Physics) est axé sur la physique mathématique. Que recouvre cette notion ?
Stanislav Smirnov : Elle peut se comprendre aussi bien comme l'intersection que comme l'union des mathématiques et de la physique. Au départ, cette terminologie désignait une discipline tentant de décrire les phénomènes naturels avec la rigueur propre aux mathématiques. Elle s'est ensuite élargie pour regrouper l'ensemble des problèmes mathématiques soulevés par les théories physiques. Aujourd'hui, on y a ajouté des sujets purement mathématiques qui ont trouvé une utilité en physique. Les recherches de Vaughan Jones, actuellement professeur à l'Université de Vanderbilt aux Etats-Unis et qui a effectué sa thèse à Genève entre 1975 et 1979, illustrent bien ce dernier point. Le travail qui lui a valu la médaille Fields en 1990 concerne la topologie des nœuds, un sujet fondamental, très abstrait. Pourtant, certains de ses résultats – les Polynômes de Jones, notamment – ont été exploités dans un tout autre domaine, la théorie quantique des champs, qui tente d'expliquer la physique à l'échelle des particules élémentaires. Quoi qu'il en soit, la collaboration entre la physique et les mathématiques n'est pas nouvelle. Elle existe depuis les Grecs de l'Antiquité. Isaac Newton (1642-1727) l'a poussé à un degré inédit notamment dans son ouvrage majeur, *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*. SwissMAP poursuit le mouvement et tentera d'opérer la synthèse des recherches actuelles en mathématiques et en physique.

« SWISSMAP SE DISTINGUE DES AUTRES PRN PAR LE FAIT QU'IL NE POSSÈDE PAS DE COMPOSANTE EXPÉRIMENTALE »

STANISLAV SMIRNOV, DIRECTEUR DU PÔLE DE RECHERCHE NATIONAL SWISSMAP

Pourquoi est-il nécessaire de créer un Pôle dans ce domaine ?
La première idée consiste à renforcer les liens existant entre l'Université de Genève et l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich (ETHZ) qui codirige d'ailleurs le PRN. Ces deux institutions possèdent historiquement un très haut niveau en physique théorique et en mathématiques. L'EPFZ a en effet compté dans ses rangs des personnalités comme le physicien Wolfgang Pauli et les mathématiciens Heinz Hopf et Hermann Weyl. Genève a pour sa part hébergé le physicien Ernst Stückelberg et le mathématicien Georges de Rham. Aujourd'hui encore, notre Section de mathématique, qui est de taille modeste par rapport à ses concurrentes internationales, se classe parmi les 50 meilleures du monde. SwissMAP souhaite poursuivre et intensifier cette tradition de qualité et de coopération en y joignant d'autres institutions : le CERN (Organisation européenne pour la recherche nucléaire), les Universités de Berne et de Zurich ainsi que l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne. Le rôle du Pôle est de créer les conditions nécessaires pour structurer la recherche et canaliser les efforts sur un nombre restreint de sujets. On espère ainsi s'attaquer à des problèmes de très haut niveau. Nous avons défini cinq axes de recherche (géométrie, topologie et physique, théorie des champs, systèmes quantiques, mécanique statistique, théorie des cordes). Ce sont des domaines pour lesquels la Suisse dispose de très bons chercheurs et dans lesquels il existe des problèmes importants à résoudre.

Le budget de SwissMAP pour quatre ans est de 11,2 millions de francs. A quoi va-t-il servir ?
SwissMAP se distingue de tous les autres PRN par le fait qu'il est exclusivement dirigé vers la science fondamentale et ne possède pas de composante expérimentale. L'argent que nous recevons du Fonds national pour la recherche scientifique n'est donc pas destiné à monter des laboratoires ou à acheter du matériel de mesure coûteux. Il servira surtout à intensifier les interactions entre les chercheurs, à inviter les meilleurs mathématiciens et physiciens tout au long de l'année, à mettre sur pied des programmes éducatifs en direction des collégiens notamment pour assurer la relève, à organiser des *master classes*, etc.

En quoi consiste une « master class » en mathématiques ?
Il s'agit d'un programme d'études de niveau de la maîtrise universitaire qui dure un an et se déroule à Genève. Il s'adresse à des étudiants étrangers et suisses et propose des cours donnés par des spécialistes venus du monde entier. Le sujet change chaque année. La *master class* qui est actuellement en cours est consacrée à la mécanique statistique. L'année prochaine, elle se concentrera sur le thème de la géométrie, topologie et physique. Ces cours (rapportant 60 crédits) sont ouverts aux étudiants les plus prometteurs ayant atteint le niveau de maîtrise universitaire (voire du baccalauréat universitaire pour les plus doués). Cette année,

DE LÉNINGRAD À GENÈVE

Né en 1970 à Léningrad (aujourd'hui Saint-Pétersbourg), Stanislav Smirnov a été influencé par son grand-père, mathématicien de formation, qui a fait carrière en tant qu'ingénieur et professeur de mécanique. C'est lui qui, le premier, donne à Stanislav le goût des sciences. Le jeune homme se sent même tellement à l'aise dans ce domaine qu'il remporte la médaille d'or avec des scores parfaits aux Olympiades internationales de mathématiques en 1986 et 1987.

Stanislav Smirnov commence ses études à l'Université d'Etat de Saint-Pétersbourg tandis que le Rideau de fer se lézarde en Europe. C'est une période intense pour l'étudiant, particulièrement en 1991 et 1992, tandis que l'Union soviétique s'effondre et que la nouvelle Russie se crée.

« *C'était une époque pleine d'espoir et d'enthousiasme*, se rappelle Stanislav Smirnov. *Nous participions aux événements, aux manifestations. Nous pensions que le monde et la Russie étaient en train de changer pour le mieux.* »

La réalité s'avère plus rude que prévu. Du jour au lendemain, le système éducatif, gratuit sous le régime communiste, devient à la charge des étudiants. Le chaos règne dans les facultés.

En 1992, Stanislav Smirnov, qui termine alors son baccalauréat universitaire, accepte une invitation du Californian Institute of Technology pour y mener une thèse. Après quelques années passées dans l'ouest des Etats-Unis, le jeune mathématicien poursuit son parcours académique par l'Université de Yale, l'Institut Max Planck des mathématiques de Bonn, l'Institut for Advanced Studies de Princeton, l'Institut royal de technologie de Stockholm puis, enfin, en 2003, l'Université de Genève où il obtient un poste de professeur.

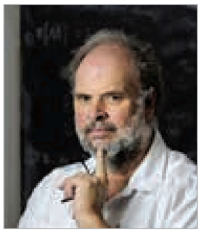
« *Je connaissais déjà l'Université*, explique-t-il. *Ma femme y avait fait sa thèse. Elle travaille d'ailleurs toujours dans la même section que moi, en tant que professeure.* »

Au cours des années, le chercheur collectionne les distinctions comme le prix Salem et le Clay Research Award en 2001, le prix Rollo Davidson en 2002 ou encore le prix de la Société mathématique européenne en 2004. Le sommet est atteint en 2010 avec la médaille Fields, la plus haute distinction en mathématiques, l'équivalent d'un prix Nobel en termes de prestige (le montant de la récompense étant toutefois nettement plus modeste).

Les pérégrinations de Stanislav Smirnov ne l'ont toutefois jamais coupé de sa patrie. Le mathématicien conserve en effet un poste partiel à l'Université de Saint-Pétersbourg où il codirige un laboratoire et aide à moderniser le système d'enseignement.

« *Aujourd'hui, il y a un trou générationnel dans la science russe*, explique Stanislav Smirnov. *Il y a de jeunes étudiants très brillants et de vieux chercheurs encore très actifs et de très haut niveau. Mais les premiers cherchent à partir et les seconds ont atteint l'âge de la retraite. Le pays manque cruellement de chercheurs entre 30 et 60 ans. Ils existent, mais il y en a beaucoup moins qu'avant. J'essaie de contribuer à résoudre ce problème. Je pense que c'est bien pour l'Europe et le monde que la science russe puisse se relever complètement et reprendre une place de premier plan.* »

Les trois Médailles Fields de l'UNIGE



DR

Vaughan Jones (1990)

Né en Nouvelle-Zélande, il a effectué sa thèse à Genève entre 1975 et 1979.

DR

Stanislav Smirnov (2010)

De nationalité russe, il est professeur à la Section de mathématiques depuis 2003.

DR

Martin Hairer (2014)

Né à Genève, il a défendu sa thèse de doctorat à l'UNIGE en 2001.

«DANS MON PAYS, ON CONSIDÈRE LEONHARD EULER COMME UN MATHÉMATICIEN RUSSE D'ORIGINE SUISSE»

il y en a une douzaine, originaire du Chili, du Brésil, des Etats-Unis, du Canada, du Royaume-Uni, de France, d'Italie, de Finlande et de Russie. Ces *master classes* sont également utiles pour les étudiants genevois puisque les cours sont ouverts à tous. Elles permettent, entre autres, d'améliorer la visibilité des mathématiques suisses à l'international et de multiplier les possibilités de contacts.

Les contacts humains jouent-ils un rôle important dans la pratique des mathématiques?
Depuis une trentaine d'années, les mathématiques deviennent une discipline d'équipe. Alors que par le passé, elles se sont spécialisées en branches distinctes, nous vivons aujourd'hui un mouvement inverse, un âge de synthèse qui exige des échanges constants. On le remarque dans la littérature scientifique. Les articles sont de plus en plus signés par deux voire trois auteurs. C'est plus amusant de travailler à plusieurs. En outre, la discipline s'est également complexifiée. Il est très profitable d'exploiter des connaissances venues de plusieurs horizons. Les résultats les plus intéressants de ces dernières décennies ont d'ailleurs été obtenus grâce à la combinaison de différents sujets.

Les mathématiques ont donc beaucoup profité de l'explosion des moyens de télécommunication…
C'est vrai. Le courrier électronique a permis depuis longtemps d'intensifier les échanges d'idées. Cela dit, ces dernières se transmettent plus efficacement par vidéoconférence, lorsqu'on se parle les yeux dans les yeux. Mais rien ne vaut une vraie rencontre en chair et en os lorsqu'il s'agit de suivre un raisonnement ou de comprendre une démonstration. Malgré l'explosion des moyens de communication qui caractérise notre époque, nous n'avons d'ailleurs pas diminué nos déplacements. Au contraire. Les mathématiciens n'ont jamais autant voyagé qu'aujourd'hui.

Les problèmes mathématiques qui vous préoccupent trouvent-ils souvent leur solution au coin d'un tableau noir lors de discussions informelles?
Notre matériel est effectivement très sommaire, il peut se résumer à du papier, un tableau noir et de quoi écrire. Du coup, un collègue peut vous ouvrir les yeux en proposant une approche à laquelle vous n'avez pas pensé et un tableau noir peut suffire pour jeter ou tester sommairement une idée. Mais les solutions nous tombent aussi dessus après avoir réfléchi longtemps à un problème puis en le laissant momentanément de côté. A cet égard, l'histoire du mathématicien français Henri Poincaré (1854-1912) est célèbre. Tandis qu'il planchait depuis un moment sur des équations différentielles, il décide de se changer les idées en partant pour une campagne de prospection géologique. Au moment du départ, alors qu'il monte dans le véhicule et que son esprit est totalement ailleurs, il voit brusquement et avec une grande clarté que son système d'équations est identique à un autre, utilisé dans un domaine très différent de mathématiques, celui de la géométrie non euclidienne. Cette vision subite lui permettra d'effectuer une percée importante dans son champ de recherche.

Existe-t-il en mathématiques des écoles de pensée différentes?
On ne peut pas généraliser, surtout à l'ère de la globalisation et d'Internet qui favorisent l'uniformisation des idées. Cela dit, on peut distinguer quelques archétypes de mathématiciens. Du côté français, la société secrète de Nicolas Bourbaki, qui s'est réunie la première fois en Auvergne à la fin des années 1930, a obtenu de nombreux résultats importants notamment en algèbre. Son mode de travail et de pensée, fondé sur l'abstraction et la généralisation, a influencé beaucoup des mathématiciens français qui ont suivi. En Russie, là d'où je viens, la démarche est peut-être plus pragmatique. On commence avec des exemples puis on généralise ensuite. On essaie d'emprunter des intuitions venues d'autres domaines, surtout de la physique.

Qu'en est-il de la Suisse?
La Suisse est placée au centre de l'Europe et a connu de ce fait de nombreux échanges et influences scientifiques, que ce soit de la France, de l'Allemagne et même de la Russie avec laquelle les échanges sont anciens. En effet, les trois premiers mathématiciens de Russie étaient suisses. A la fin du XVII^e^ et au début XVIII^e^ siècle, le tsar Pierre le Grand, désireux de moderniser son pays et de réduire le fossé scientifique qui le sépare du reste de l'Europe, tente d'attirer des savants à sa cour. C'est ainsi que, sur la recommandation du grand mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), il invite les frères bâlois Nicolas et Daniel Bernoulli à venir enseigner dans sa nouvelle Académie des sciences à Saint-Pétersbourg. Tombé malade, Nicolas meurt en 1727, huit mois seulement après son arrivée à Saint-Pétersbourg. Il est alors remplacé par un autre Suisse, Leonhard Euler. Celui-ci restera plus de trente ans en tout en Russie (il y est d'ailleurs enterré). Dans mon pays, on le considère comme un mathématicien russe d'origine suisse. Il a créé l'école de mathématique russe. Celle que j'ai suivie trois siècles plus tard.

SwissMAP

Le Pôle national de recherche en bref

Leading house: Université de Genève (Stanislav Smirnov)

Co-leading house: Ecole polytechnique fédérale de Zurich

Partenaires: CERN, Universités de Berne et de Zurich, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne

Budget: 28 millions de francs pour quatre ans (2014-2017), dont 11,2 millions de francs provenant du FNRS.

Thèmes:
- Géométrie, topologie et physique
- Théorie des champs
- Systèmes quantiques
- Mécanique statistique
- Théorie des cordes

STANISLAV SMIRNOV EN DÉMONSTRATION

Comme souvent en mathématiques, les travaux qui ont valu en 2010 la médaille Fields (la plus haute distinction de la discipline) à Stanislav Smirnov, professeur à la Section de mathématiques, se basent sur des énoncés assez simples. L'idée de départ de la « percolation », le nom donné à la théorie dont il est question ici, consiste à déterminer la probabilité de trouver, dans un matériau idéalisé ayant une certaine porosité, un chemin continu pour que de l'eau puisse le traverser de part en part.

Un peu comme dans le jeu du labyrinthe destiné aux enfants, il s'agit de trouver un trajet reliant le point A au point B. A la différence près que, dans la version « adulte » de ce passe-temps, les choses se compliquent assez rapidement. Les labyrinthes sont aléatoires et il ne suffit pas de trouver un trajet. Il faut aussi savoir calculer leur probabilité d'existence et bien d'autres choses encore.

Une manière de visualiser le problème de la percolation consiste à prendre une feuille quadrillée et à colorier les arêtes en bleu si l'eau peut s'y écouler ou en jaune dans le cas contraire. A chaque fois, la couleur est déterminée à l'aide du hasard. Si celui-ci est de 50-50, alors on peut choisir le bleu ou le jaune de chaque arête en jouant à pile ou face. Pour favoriser une couleur plutôt que l'autre, il suffit de piper la pièce de telle manière qu'elle tombe davantage sur une face plutôt que sur l'autre. Au final, une fois la feuille remplie, on peut vérifier si l'eau parvient à s'écouler ou non en jouant au labyrinthe, ou plutôt en cherchant un chemin d'arêtes bleues contiguës reliant le bord du haut à celui du bas.

Si la pièce servant à déterminer la couleur de chaque carré est fortement biaisée en faveur du bleu, il est presque certain que l'eau peut circuler. En revanche, dans le cas contraire, il est quasiment sûr que le liquide ne passe pas. Ce qui est remarquable avec ces modèles de percolation, c'est qu'entre ces deux extrêmes, la probabilité de voir l'eau s'écouler ne varie pas régulièrement. En réalité, elle passe par un seuil. En d'autres termes, l'eau sera presque sûrement bloquée tant que le pourcentage de carrés bleus reste en dessous d'une certaine valeur. Près de cette limite, la probabilité que l'eau puisse s'écouler augmente alors très rapidement. La valeur de ce seuil est appelée le point critique.

Si ces modèles intéressent tant les physiciens, c'est qu'il existe dans la nature de nombreux phénomènes présentant de tels points critiques, aussi qualifiés de transitions de phase. L'eau chaude au niveau de la mer, par exemple, se met à bouillir à 100 °C mais pas avant. Le magnétisme apparaît dans certains matériaux dès que l'on passe sous une certaine température (dite de Curie). Un feu de forêt se répand massivement si l'écart entre chaque arbre est inférieur à une certaine valeur. Idem pour la propagation d'une maladie en fonction de son degré de contagion. Un sol de glaise retient l'eau, une terre meuble la laisse passer…

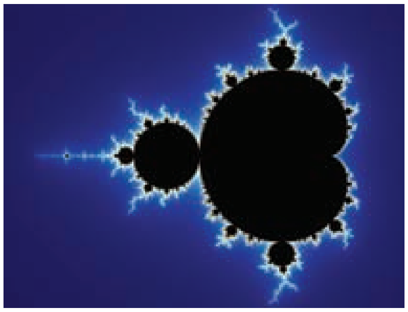
Le problème, bien sûr, c'est que la nature, en général, ne ressemble pas à un réseau de petits carrés très réguliers de 0,5 cm de côté. Tout d'abord, le comportement à notre échelle d'un système est déterminé par le comportement statistique de ses composants à l'échelle microscopique, voire atomique dans certains cas. Il convient donc d'affiner le maillage du modèle à l'extrême en espérant que les résultats obtenus tendent vers une valeur limite unique (appelée « limite d'échelle ») et ne divergent pas au cours de la miniaturisation. De plus, le réseau peut être composé de carrés mais aussi de triangles, de losanges, d'hexagones.

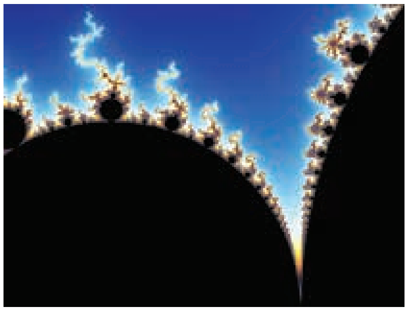
En 1992, John Cardy, physicien de l'Université d'Oxford au Royaume-Uni, en se basant sur un certain nombre d'hypothèses et d'arguments, parvient à établir une formule précise qui donne la probabilité d'écoulement de l'eau dans un matériel poreux, dans le cas de la limite d'échelle et près du point critique. C'est une prouesse, du point de vue de la physique. Le problème, c'est qu'il s'agit d'une intuition physique. Et il faut la transformer en une démonstration mathématique rigoureuse.

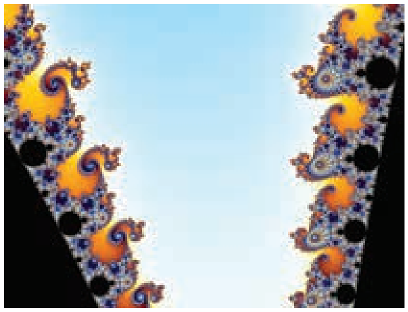
C'est là que Stanislav Smirnov entre en scène. Après avoir établi des fondations mathématiques solides de la théorie de la percolation, il montre en 2001 que cette probabilité critique, ou point critique, existe dans un réseau triangulaire en deux dimensions et dans la limite d'échelle et que sa valeur est identique à celle obtenue par la formule de Cardy. Sa preuve repose sur une approche indépendante de celle utilisée jusque-là par les physiciens.

ISTOCK

Ces derniers poussent un soupir de soulagement devant les travaux de Stanislav Smirnov. Et ce d'autant plus que le mathématicien, continuant sur sa lancée, utilise des méthodes similaires pour démontrer la validité d'un autre modèle, celui d'Ising, qui décrit des phénomènes comme le magnétisme, le mouvement des gaz, le traitement d'image ou encore l'écologie.





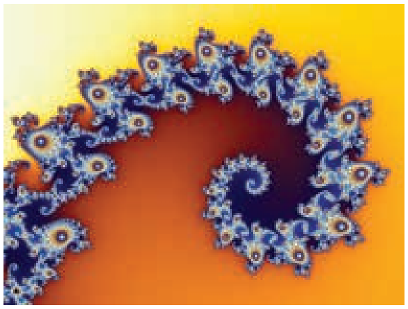


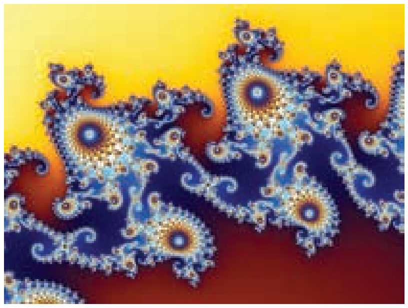
L'ENSEMBLE DE MANDELBROT DÉSIGNE UNE FIGURE FRACTALE. DU NOM DU MATHÉMATIQICIEN FRANCO-AMÉRICAIN BENOÎT MANDELBROT QUI EN OBTIENT LA PREMIÈRE REPRÉSENTATION).

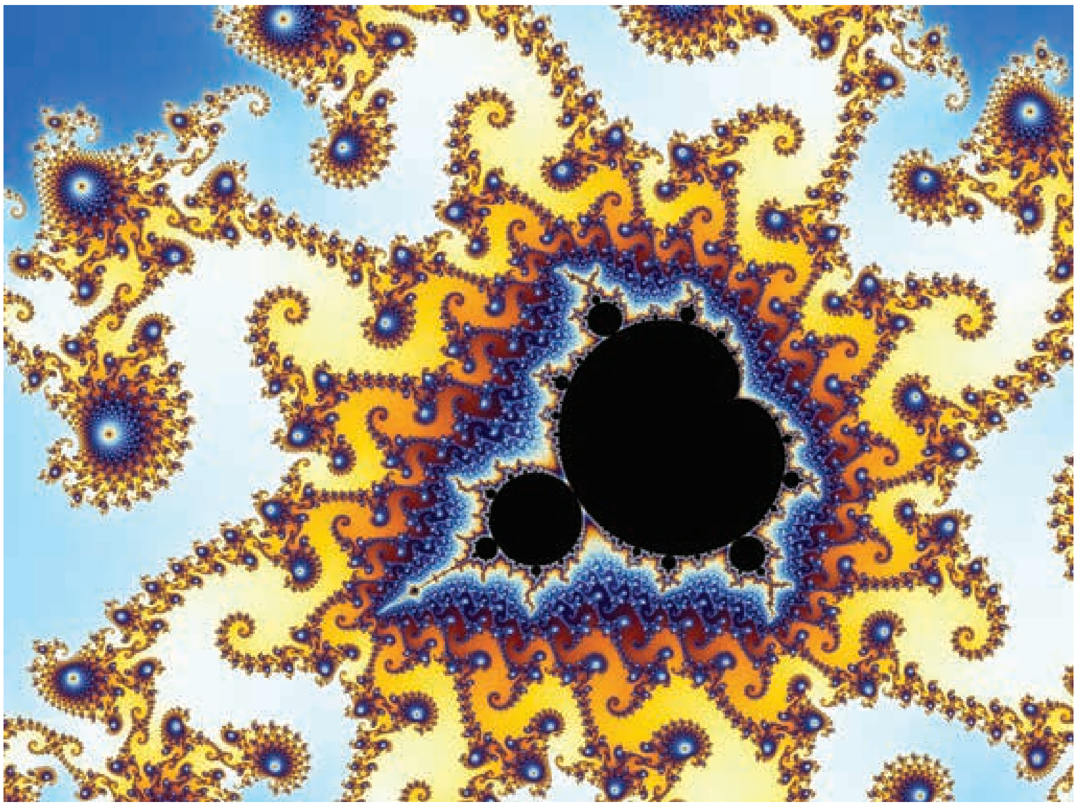
IL S'AGIT DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES RÉSULTATS D'UNE ÉQUATION MATHÉMATIQUE SUR LES NOMBRES COMPLEXES. ON Y RETROUVE LA MÊME FORME DE BASE APRÈS DES AGRANDISSEMENTS SUCCESSIFS.

LES POINTS FAISANT PARTIE DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT SONT FIGURÉS EN NOIR. LES COULEURS N'ONT AUCUNE IMPORTANCE MATHÉMATIQUE. ELLES INDIQUENT LE NOMBRE D'ITÉRATIONS (CYCLES DE CALCULS EFFECTUÉS PAR ORDINATEUR) NÉCESSAIRES POUR POUVOIR DÉCLARER LE POINT COMME FAISANT OU NON PARTIE DE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT.

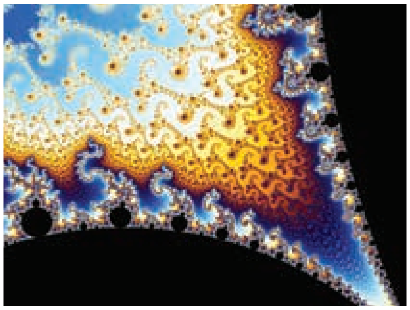
LES NOMBRES COMPLEXES SONT UNE EXTENSION DES NOMBRES RÉELS CONTENANT EN PARTICULIER LE NOMBRE i TEL QUE $i^2 = -1$.

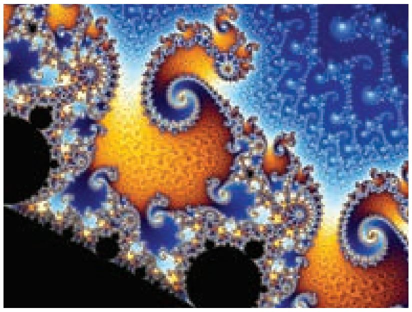






WOLFGANG BEYER





ÉMOTIONS ESTHÉTIQUES

LES MATHS, TOUT UN ART

LA PRATIQUE DES MATHÉMATIQUES DEMANDE UNE BONNE DOSE DE CRÉATIVITÉ ET D'INTUITION. POUR HUGO DUMINIL-COPIN, PROFESSEUR À LA SECTION DE MATHÉMATIQUES, ELLE S'APPARENTE À UNE DISCIPLINE ARTISTIQUE ET PEUT S'APPRÉCIER SELON DES CRITÈRES ESTHÉTIQUES ET ÉMOTIONNELS

Campus : Pensez-vous qu'il existe une forme de beauté dans les mathématiques ?
Hugo Duminil-Copin : Il en existe dans la façon d'arriver à un résultat, dans les idées et les concepts développés pour le démontrer et le comprendre. Ces idées et ces concepts, je les apprécie exactement comme on peut le faire avec une œuvre d'art, un concept en philosophie ou en histoire.

Une formule, un résultat final, ne vous touche pas autant ?
Une formule retranscrite sur un tableau noir représente la dernière étape d'un processus. Le résultat lui-même n'est pas une fin en soi : je suis beaucoup plus intéressé par la démarche. Il peut y avoir des résultats très importants dont je n'aime pas les preuves, car je les trouve trop complexes, trop tarabiscotées. Je suis même plus sensible à des démonstrations alternatives de théorèmes déjà connus depuis longtemps mais qui suivent une démarche innovante, faisant appel à de nouvelles idées.

On peut donc démontrer des théorèmes de plusieurs façons ?
Oui, bien sûr. Un résultat possède de nombreuses preuves. Du point de vue mathématique, une preuve n'est pas forcément meilleure qu'une autre. Certaines sont plus simples tandis que d'autres sont plus complexes et apportent parfois un éclairage différent sur le phénomène étudié. En réalité, on sait souvent à l'avance si un énoncé est vrai ou faux. L'intérêt – et la beauté – d'une démonstration réside surtout dans le fait qu'elle est capable d'expliquer pourquoi. Et si elle est belle et simple, alors cela signifie que l'on a probablement trouvé une preuve naturelle, dans le sens qu'elle retranscrit la raison profonde pour laquelle le résultat est vrai.

La nature obéit-elle aux règles des mathématiques ?
La nature est tout autant physique, biologique ou encore chimique que mathématique. Toutes ces sciences s'entremêlent. Le chimiste et désormais même le biologiste doivent se mettre à étudier la physique pour comprendre les phénomènes auxquels ils s'intéressent. Quant à la physique, cela fait très longtemps qu'elle s'entremêle avec les mathématiques. Un grand nombre de concepts en physique ont émergé de développements réalisés en mathématiques et vice versa. Les gens ont l'impression que les mathématiques, étant plus abstraites, sont loin de la réalité. J'aurais tendance à affirmer le contraire. C'est justement parce qu'elles sont abstraites qu'elles permettent d'expliquer de nombreux phénomènes naturels. Moins une chose est appliquée, moins elle est limitée à une expérience ou un phénomène précis. Les mathématiques sont universelles et elles permettent donc d'aider d'autres sciences dans leur démarche explicative.

« LES GENS ONT L'IMPRESSION QUE LES MATHÉMATIQUES, ÉTANT PLUS ABSTRAITES, SONT LOIN DE LA RÉALITÉ. J'AURAIS TENDANCE À AFFIRMER LE CONTRAIRE »

HUGO DUMINIL-COPIN, PROFESSEUR
À LA SECTION DE MATHÉMATIQUES

Quelle est l'importance d'une preuve mathématique pour un physicien ?
Cela dépend du physicien, bien sûr. Certains estiment qu'ils n'ont pas besoin de telles preuves, que la nature s'en charge à notre place. Le physicien américain Philip Warren Anderson, qui a reçu le prix Nobel de physique en 1972, est de ceux-là. Il a découvert un phénomène de la physique de la matière condensée appelé localisation d'Anderson dont l'expression mathématique n'a jamais pu être démontrée formellement. C'en est devenu un défi majeur en physique théorique. Lors d'une grande conférence, un éminent mathématicien a rappelé cette lacune. Anderson s'est alors levé et s'est offusqué : « Comment osez-vous dire cela ? » On lui a rétorqué : « Mais alors, qui a apporté la preuve de la localisation d'Anderson ? » Et Anderson de répondre : « Moi... moi et la nature ! » Pour de nombreux autres physiciens, les mathématiciens se rendent malgré tout utiles. Il peut en effet exister pour un phénomène naturel différentes explications sur lesquelles les physiciens ne parviennent pas à se mettre d'accord. Lorsque le mathématicien apporte une preuve (s'inspirant souvent d'arguments venant de la physique), il peut du même coup désigner laquelle des hypothèses est la bonne. En plus, s'il parvient à comprendre, par une belle démonstration, le concept qui se cache derrière, il peut aider le physicien à généraliser son résultat à un ensemble de phénomènes plus étendu. Cela répond à l'objectif unificateur de la physique qui est d'expliquer la nature avec le moins de règles possible.

Les mathématiques, c'est la vérité incarnée ?
Il est important de se battre contre l'idée que les scientifiques, en général, peuvent tout expliquer. La notion de vérité en mathématiques repose sur les axiomes. Ces derniers sont des énoncés dont on estime qu'ils sont vrais sans avoir besoin de les prouver. Il en existe un petit nombre qui varie selon les théories. Certains de ces axiomes affirment des choses qui semblent évidentes à tout un chacun : ce sont les pierres de base de l'édifice mathématique. D'autres fixent les règles permettant de mener des démonstrations. A partir de ces énoncés, on peut prouver de nouveaux résultats et avancer ainsi de théorème en théorème. Par conséquent, si un mathématicien ne se trompe pas dans son raisonnement, le résultat qu'il obtient au bout de sa démonstration est toujours vrai. Il n'y a pas moyen de le contester. Sauf qu'il est vrai conditionnellement aux axiomes. Un choix d'axiomes différent mènerait potentiellement à une autre notion de vrai.

Y a-t-il un meilleur système d'axiomes qu'un autre ?
Un système d'axiomes doit répondre à quelques règles. Si le jeu d'axiomes choisi permet de montrer que quelque chose et son contraire sont vrais, alors il est incohérent. Et ça, c'est gênant pour l'ensemble de l'édifice théorique bâti sur cette base. Le système d'axiomes des mathématiques actuelles ne devrait pas poser ce genre de problèmes. Et quand bien même il serait incohérent, je ne pense pas que l'ensemble des mathématiques s'effondrerait. Il suffirait de changer un peu les axiomes pour retrouver une consistance et la majorité des preuves resterait vraie dans ce nouveau système de vérité. En effet, ce n'est pas parce que votre maison s'effondre en raison de la mauvaise qualité des matériaux que le savoir-faire du maçon est à remettre en question. Cela dit, le raisonnement sur le système d'axiome et donc la notion de vérité va plus loin. Il existe en mathématiques des énoncés dont il est impossible de prouver formellement qu'ils sont vrais ou faux. En quelque sorte, il n'existe pas de système d'axiomes parfait.

Vous voulez dire que les mathématiques ne peuvent pas tout prouver ?
Exactement. Le théorème d'incomplétude du mathématicien autrichien Kurt Gödel affirme qu'avec un système d'axiomes très restreint, par exemple celui qui contiendrait la théorie des entiers naturels (les nombres 0, 1, 2, 3, 4…), il existe des énoncés dont on ne peut pas montrer, avec des

règles mathématiques, qu'ils sont vrais ou faux. On pourrait augmenter le nombre d'axiomes pour finalement réussir la démonstration, mais cela permettrait également de formuler de nouveaux énoncés qui seraient à leur tour indémontrables. Gödel a donc apporté en 1931 la preuve que l'on ne peut pas tout prouver. Pour certains, c'est un problème. Moi, je trouve au contraire que c'est un beau symbole. Il faut avoir conscience des limites des mathématiques. Comme un peintre avec ses couleurs et ses pinceaux, nous peignons des théorèmes avec des axiomes et des règles de logique.

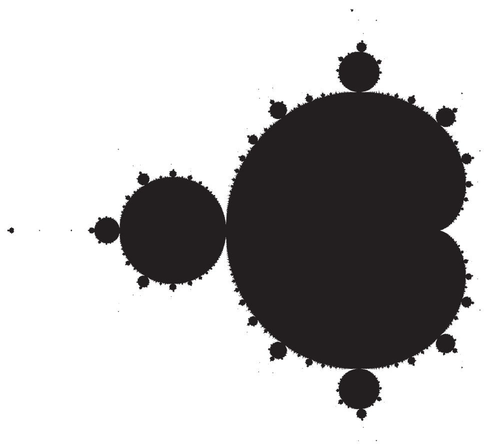
«LE MATHÉMATICIEN AUTRICHIEN KURT GÖDEL A DONC APPORTÉ EN 1931 LA PREUVE QUE L'ON NE PEUT PAS TOUT PROUVER»

La pratique des mathématiques exige-t-elle de la créativité ?
Je pense que oui, et beaucoup d'intuition. La manière de voir les mathématiques est très personnelle, ce qui fait la richesse de la discipline. La personne avec qui j'ai pu parler le plus facilement de mon travail, comme si l'on pratiquait le même métier, est un ami compositeur. Lui et moi avons la même démarche consistant parfois à laisser notre cerveau vagabonder. Il est important de lâcher prise quand un problème devient trop difficile quitte à y revenir plus tard. Le moment de la journée, de la semaine ou de l'année que l'on choisit pour s'intéresser à un problème compte beaucoup. Certains instants, dépendant de nombreux facteurs tels que la vie privée ou professionnelle, sont plus propices que d'autres pour l'inspiration sur tel ou tel sujet. Il faut que les idées arrivent. Et, en général, elles arrivent à leur rythme. Cela ne sert à rien de les forcer.

Quel est votre principal outil de travail ?
Mon outil de travail, avant tout, c'est mon cerveau. Je peux travailler n'importe où. En général, je n'ai pas besoin de papier ou de crayon. Pour être plus précis, je devrais dire mon cerveau et celui de mes collègues. C'est une discipline qui se pratique en équipe.

Vous a-t-on déjà qualifié d'artiste ?
Non. Les gens n'ont pas conscience que la pratique des mathématiques repose avant tout sur la créativité et l'imagination. Puisqu'ils gardent en tête l'image d'une discipline difficile et scolaire, une preuve mathématique leur semble bien loin d'une œuvre qu'ils pourraient apprécier. Du coup, les gens trouvent plutôt bizarre que l'on s'intéresse à cette discipline, plus encore qu'on la trouve belle.

Et entre collègues ?
Les mathématiciens sont très sensibles aux réalisations des autres. Quand je lis des preuves de collègues, je ressens des émotions. Je peux trouver des preuves surprenantes, belles, tristes parfois... Bref, cela m'évoque quelque chose. J'ai beaucoup d'admiration pour mes collègues. Je trouve qu'ils font preuve d'une créativité exceptionnelle et pour moi, ce sont effectivement des artistes.



FP

TACTIQUE DIDACTIQUE

J'AI MAL AUX MATHS, MAIS JE ME SOIGNE

RAREMENT POPULAIRES AUPRÈS DES ÉLÈVES, LES MATHÉMATIQUES NE MANQUENT POURTANT PAS D'ATTRAIT. DÉVELOPPANT LA CRÉATIVITÉ ET L'ESPRIT CRITIQUE, SOLLICITANT PEU L'APPRENTISSAGE PAR CŒUR, ELLES ONT ÉGALEMENT JOUÉ UN RÔLE ESSENTIEL DANS LE DÉVELOPPEMENT DES SOCIÉTÉS HUMAINES

Jugées arides, inutiles et trop abstraites, les mathématiques suscitent rarement l'enthousiasme auprès des jeunes. Largement partagé dans les pays occidentaux, ce désamour n'est pourtant ni universel ni inéluctable. Didacticien à la Section des sciences de l'éducation et au sein de l'Institut universitaire de formation des enseignants (IUFE), Jean-Luc Dorier analyse les raisons de ce désintérêt en soulignant à la fois les difficultés propres à cette discipline, l'importance du contexte culturel et les pistes qui pourraient être explorées par les enseignants pour redonner à leurs élèves le goût de cette discipline sans laquelle les sociétés humaines ne se seraient jamais développées.

«LES MATHS JOUENT UN RÔLE ESSENTIEL DANS L'AVENTURE HUMAINE DEPUIS AU MOINS 5000 ANS»

«*Le statut des mathématiques dans nos pays est aujourd'hui paradoxal,* constate Jean-Luc Dorier. *Au sein de l'IUFE, c'est la seule discipline pour laquelle il n'y a pas assez de candidats pour pourvoir les postes disponibles, ce qui montre bien qu'elle n'a pas vraiment la cote auprès des jeunes. Or, les maths jouent un rôle essentiel dans l'aventure humaine depuis au moins 5000 ans. Et c'est encore plus vrai depuis la révolution numérique qui s'est traduite par le développement d'outils technologiques basés sur des mathématiques de très haut niveau, comme l'ordinateur, le téléphone mobile ou le GPS, et dont nous sommes de plus en plus dépendants.*»

Se réconcilier avec la science chère à Euclide et à Archimède, ne revient pas pour autant à la regarder avec les yeux de Chimène. Mieux vaut, au contraire, être conscient des difficultés qui lui sont propres afin de pouvoir plus facilement les dépasser.

La première est d'ordre culturel. Dans la plupart des pays d'Asie, qui trustent les sept premières places du classement PISA dans le domaine (la Suisse trônant tout de même à une très honorable neuvième place mondiale), les mathématiques sont en effet très valorisées. Cela s'explique notamment par le rôle dévolu à l'école, qui n'a pas pour vocation première de permettre à l'enfant de s'épanouir selon les préceptes rousseauistes mais de définir sa place dans une société à la fois très normée et très concurrentielle. Dans un tel contexte, les maths participent très directement à la possibilité d'accéder à une élite, d'où l'explosion du recours aux leçons particulières ou aux instituts privés qui, en Corée du Sud, par exemple, prennent en charge 80% des enfants du pays le week-end.

«*A cela s'ajoute le fait que dans beaucoup de ces pays, et notamment en Chine, l'enseignement des maths est assuré dès les classes primaires par des professeurs spécialisés et non par des généralistes ou des gens qui ont souvent gardé un mauvais souvenir des maths durant leur propre scolarité, comme c'est le cas chez nous,* complète Jean-Luc Dorier. *Enfin, il y a aussi des différences liées à la relation entre le système numérique et le langage.*»

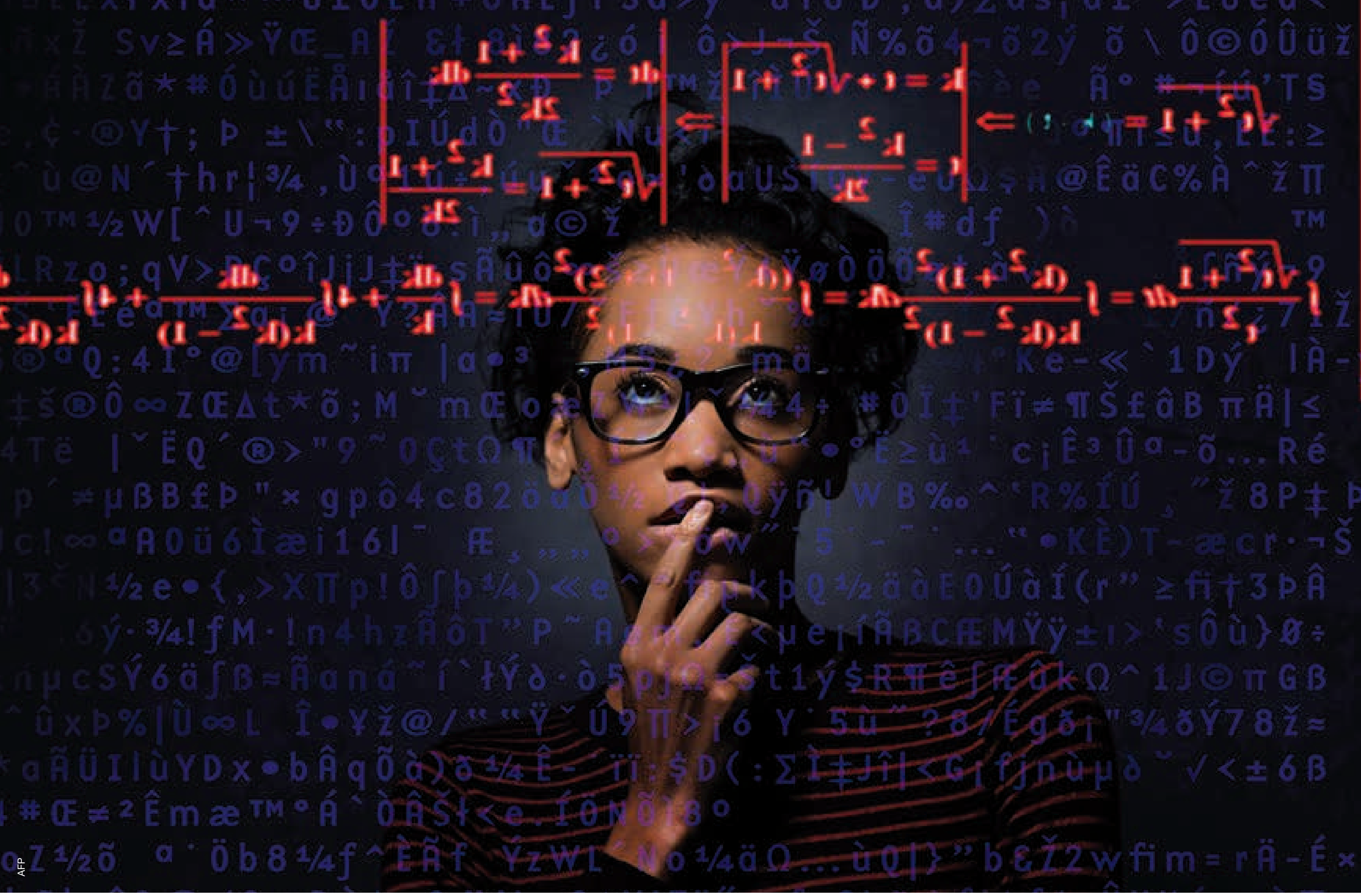
Dans la langue française – et dans une moindre mesure en allemand, en italien ou en anglais – le système écrit n'est en effet pas totalement cohérent avec le système chiffré qui s'est imposé tardivement, à partir du XVe siècle.

Après le nombre dix, un locuteur francophone dit donc onze, douze, puis treize, alors que la logique voudrait que l'on dise dix-un, dix-deux, dix-trois, comme le fait la langue chinoise qui, elle, suit exactement le système décimal de position des chiffres. Conséquence: lorsqu'un élève romand doit additionner de tête vingt et un et trente-quatre, il faut qu'il décompose le nombre vingt en deux dizaines et une unité et le nombre trente-quatre en trois dizaines et quatre unités – ce que traduisent immédiatement les écritures 21 et 34 mais moins directement les mots. Ensuite, il lui faut raisonner pour additionner séparément les dizaines et les unités, pour

enfin parvenir au résultat final, à savoir cinquante-cinq. Pour la même opération, il suffit en revanche à un enfant chinois d'additionner «deux dix un» et «trois dix quatre».
Pour couronner le tout, notre idiome dispose de mots spécifiques pour les premières dizaines «vingt» et non «deux dix» (pour deux dizaines), trente et non trois-dix (pour trois dizaines), alors qu'on dit bien deux-cents et trois cents lorsqu'on passe à l'unité supérieure.
A cette complexité formelle, qui est plus marquée chez nos voisins de l'Hexagone qu'en Suisse romande (lire encadré), s'ajoute une spécificité unique aux mathématiques et qui tient à son caractère cumulatif. «*Compte tenu des capacités intellectuelles que les maths mobilisent, il est essentiel de maintenir un niveau de compréhension constant, car il est indispensable de comprendre les étapes précédentes pour pouvoir réussir les suivantes,* confirme Jean-Luc Dorier. *Du coup, un décrochage temporaire, comme en connaissent beaucoup d'ados, peut avoir des effets plus lourds que dans d'autres disciplines où il est possible de s'en sortir après un passage à vide temporaire.*»
Ces quelques obstacles sont cependant loin d'être insurmontables, d'autant qu'en contrepartie, les maths ne manquent pas d'attrait. Cette discipline constitue en effet pratiquement le seul domaine intellectuel dans lequel la notion de vérité est absolue et où il est possible d'argumenter à partir de faits démontrés de manière certaine. Mieux, les maths font peu appel au savoir appris par cœur et requièrent un type de réflexion somme toute assez mécanique.
«*Cet aspect peut faire peur,* concède Jean-Luc Dorier. *Mais dès lors que l'on accepte de rentrer dans ce mode de pensée, on découvre une science qui peut s'avérer ludique et qui nécessite un esprit critique. Contrairement à ce que l'on pense souvent, la clé pour réussir une démonstration n'est en effet pas unique. Il s'agit donc de trouver le chemin le plus efficace pour parvenir à la solution, exercice qui exige une certaine créativité et qui peut devenir tout à fait grisant.*»
Le problème, c'est que ce savoir est aujourd'hui devenu quasiment invisible pour le commun des mortels. «*Il y a encore une trentaine d'années, l'utilité des maths était perceptible sur n'importe quel marché ou au moment de payer l'addition au restaurant,* poursuit Jean-Luc Dorier. *Depuis, avec le développement d'outils automatisant ces tâches, les maths élémentaires ont disparu de l'espace public, mais cela ne veut pas dire qu'elles sont devenues inutiles. Au contraire, nous sommes plus dépendants que jamais de technologies fonctionnant grâce à des mathématiques de très haut niveau.*»
Rien d'illogique à cela puisque, dans les faits, les mathématiques sont omniprésentes dans l'histoire de l'homme depuis des millénaires. Pour dénombrer les biens et les hommes, pour partager le temps de travail et les richesses, pour bâtir rues et villes, il fallait en effet des outils qui ont tous été fournis par les mathématiques. La très ancienne problématique du décompte du temps en est une parfaite illustration. Si l'on compte aujourd'hui les heures à partir d'une base soixante et non d'une base dix comme c'est le cas pour les distances, par exemple, c'est en effet aux Mésopotamiens qu'on le doit. Au III^{e} millénaire avant notre ère, ce sont eux qui ont développé un système numérique destiné notamment à répartir le temps de travail des ouvriers. «*Le nombre douze est plus commode que dix dans la mesure où il peut être divisé par 2, 3, 4 et 6, tandis que le nombre dix, lui, ne peut être divisé que par 2 et 5,* explique Jean-Luc Dorier. *Qui plus est, lorsqu'on le multiplie par cinq, un obtient un diviseur supplémentaire (le cinq). Du coup, on obtient une valeur entière en minutes et en secondes lorsqu'on divise une heure par 2, 3, 4, 5 et 6 et tous leurs multiples. C'est ce qui permet notamment d'obtenir des quarts d'heure sur une horloge, chose qui est impossible en base dix. Le même principe est valable pour le calcul des angles, qui sont divisés en 360 degrés, soit six fois soixante. On ne sait pas vraiment comment les Mésopotamiens ont eu l'intuition géniale d'utiliser la base 60. Cette découverte semble antérieure au partage du temps et qui repose, lui, sur les douze cycles de la lune ou les douze mois de l'année. Mais il paraît fort probable que par leur grande pratique des calculs de partage, ils aient rapidement compris l'intérêt mathématique d'une base 60.*»
Et que dire de la fameuse révolution «numérique» réalisée grâce aux ordinateurs – qui repose tout entière sur un langage binaire (fait d'une alternance de 0 et de 1) et des algorithmes – sinon que c'est sans doute le plus puissant moteur du changement qu'ait connu l'homme depuis l'apparition de la machine à vapeur.

LES FRANÇAIS COMPTENT AUSSI AVEC LEURS PIEDS

Pourquoi dit-on quatre-vingt de l'autre côté de la frontière plutôt que huitante comme c'est le cas dans la majorité des cantons romands? La réponse est à chercher du côté des populations celtes qui peuplaient le nord de la France. Ces dernières, plutôt que d'utiliser la base dix, qui correspond aux doigts de la main, calculaient en effet en base vingt, c'est-à-dire en y ajoutant les orteils. Une pratique qui a perduré jusqu'à nos jours pour les nombres situés entre «soixante-dix» et «quatre-vingt-dix-neuf» et dont on trouve également trace dans la langue bretonne, où soixante se dit tri-ugent, ce qui correspond littéralement à «trois vingts».



AFP

LES FILLES ET LA « BOSSE DES MATHS »

En étant la première femme à recevoir la médaille Fields (l'équivalent du Nobel des maths) en 2014, l'Iranienne Maryam Mirzakhani a apporté un démenti cinglant à tous ceux qui pensaient que la prédominance des hommes dans les filières scientifiques était liée à des prédispositions naturelles.

L'idée est loin d'être neuve. Elle a été formalisée au XIXe siècle par Franz Joseph Gall, l'inventeur de la « phrénologie ». Une théorie selon laquelle les reliefs du crâne signaleraient les qualités innées de l'esprit humain. Chez les individus talentueux, ces prédispositions se traduiraient par la fameuse « bosse des maths ». Un attribut qui, à en croire le neurologue autrichien, serait peu répandu au sein de la gent féminine.

Bien que très discutable sur le plan scientifique, cette thèse n'a guère suscité de protestations jusqu'au début du XXe siècle. Mieux : afin d'éviter à ces demoiselles de perdre leur temps dans une activité jugée hors de leur portée, on leur a longtemps interdit l'accès aux études mathématiques et aux sciences exactes en général. Pour contourner l'obstacle, Sophie Germain, connue pour le théorème d'arithmétique qui porte son nom, pour ses échanges avec le « prince des mathématiciens » Carl Friedrich Gauss, ainsi que pour ses travaux sur l'élasticité des corps, a été contrainte d'avancer masquée durant la plus grande partie de sa carrière, sous le pseudonyme plus masculin d'Antoine Auguste Le Blanc.

Pas de quoi faire frémir Lawrence Summers, ancien président de l'Université d'Harvard, qui affirmait il y a tout juste une dizaine d'années que l'absence de femmes parmi les grands mathématiciens était liée à des phénomènes biologiques.

Les faits tendent pourtant à démontrer que cette assertion ne correspond à aucune réalité. Pour s'en tenir à ce seul exemple, une étude menée en 2008 auprès de 7 millions d'élèves américains âgés de 7 à 17 ans n'a décelé aucune différence significative liée au genre en termes de compétence en mathématiques. Dès lors, c'est surtout le contexte social qui apparaît déterminant pour expliquer le nombre restreint de femmes parmi l'élite mathématique mondiale.

« *Les études PISA montrent que les filles éprouvent plus d'anxiété face aux mathématiques que les garçons,* relève un rapport récent de l'OCDE. *A niveau de performance égal, elles ont moins confiance dans leurs compétences et dans leur capacité à résoudre des problèmes mathématiques. Elles ont également tendance à se rendre responsables de leur échec, alors que les garçons invoquent plutôt des facteurs extérieurs. Or, diverses études montrent qu'il y a une relation étroite entre la confiance en soi et les performances scolaires.* »

Ce processus d'autodénigrement serait encore aggravé par ce que les spécialistes appellent le « double standard pédagogique ». Un concept qui désigne le fait que les professeurs de mathématiques consacreraient nettement plus d'attention aux garçons, les interrogeant plus souvent que les filles et en leur laissant plus de temps pour trouver la bonne réponse. Ces mêmes enseignants seraient par ailleurs convaincus que leurs élèves garçons sont intrinsèquement plus forts en maths que leurs élèves filles. Sans en avoir forcément conscience, ils encourageraient donc plus fortement les garçons, qui, du coup, bénéficieraient d'une plus grande confiance en eux dans les matières scientifiques.

APPROCHE LUDIQUE

«LE MATHSCOPE PERMET DE SORTIR DE LA LOGIQUE D'ÉVALUATION»

CONSTRUIT SUR LE MODÈLE DU PHYSISCOPE, DU CHIMISCOPE ET DU BIOSCOPE, LE MATHSCOPE VEUT CASSER L'IMAGE RÉBARBATIVE DES MATHÉMATIQUES EN SE TOURNANT VERS LA PRATIQUE ET L'ESPRIT DE DÉDUCTION

Approcher les sciences d'une manière ludique et interactive afin de renforcer la motivation des élèves âgés de 4 à 19 ans : c'est l'objectif du Mathscope de l'Université, une émanation conjointe du Pôle de recherche national SwissMAP et de la Section de mathématiques. Ouverte au public depuis mars 2015, cette structure dont le fonctionnement est calqué sur celui du Physiscope, du Chimiscope et du Bioscope a déjà accueilli plus de 500 élèves de la région genevoise.

Les exigences du programme scolaire limitant la marge de manœuvre des enseignants, qui n'ont souvent pas le temps de développer le matériel pédagogique permettant de donner aux mathématiques un aspect plus concret en classe, le Mathscope propose une quinzaine d'activités clés en main couvrant sept thématiques principales : algèbre, arithmétique, analyse combinatoire, géométrie, logique, probabilité et statistique, topologie. D'une durée d'une heure, chaque atelier est encadré par deux animateurs et laisse une large place à l'interactivité et au travail en groupe.

« Un des grands intérêts du Mathscope, c'est qu'il permet de sortir de la logique d'évaluation, explique Pierre-Alain Cherix, maître d'enseignement et de recherche à la Section de mathématiques et coresponsable du Mathscope. *Comme ils n'ont pas peur d'être notés sur ce qu'on leur présente, les élèves nous autorisent plus facilement à leur montrer quelque chose d'intéressant. L'approche de l'école et la nôtre sont toutefois parfaitement complémentaires dans la mesure où nous visons surtout à montrer aux élèves la finalité des outils qu'ils travaillent en classe. »*

Pour casser l'image rébarbative et un peu sèche de la discipline, pas question, pour les organisateurs du Mathscope, de multiplier les calculs savants et autres démonstrations à rallonge. Ici tout est tourné vers la pratique et l'esprit de déduction.

Pour démontrer l'utilité du théorème de Pythagore, il est ainsi demandé aux participants de comparer des aires à la manière des Grecs anciens, en se servant de différents puzzles. *« Ce type d'exercice permet, par exemple, de montrer que l'on peut ramener n'importe quel polygone à une série de triangles, puis à une série de carrés,* précise Pierre-Alain Cherix. *Grâce au théorème de Pythagore, on peut ensuite construire un carré ayant la même aire que le polygone de départ. Cela permettait aux Grecs de comparer des surfaces polygonales sans devoir en calculer l'aire. »*

CARTE DE LA VILLE DE KÖNIGSBERG ET SES SEPT PONTS EN 1809.

Selon la même logique, la théorie des graphes, aujourd'hui utilisée dans de nombreux problèmes liés à la notion de réseau, peut être expliquée à partir d'une maquette représentant la ville de Königsberg comme elle se présentait vers 1740 (aujourd'hui Kaliningrad). Cette dernière était construite autour de deux îles situées sur le fleuve Pregel qui étaient reliées entre elles par un pont. Six autres ponts reliaient les rives du cours d'eau à l'une ou l'autre des deux îles. Le problème consiste à déterminer s'il existe une promenade permettant de passer une seule fois par chaque pont en partant et en revenant du même point. *« Dans le cas présent, on parvient assez facilement à se rendre compte de façon intuitive qu'un tel chemin n'existe pas,* poursuit le mathématicien. *Tout le défi consiste à comprendre comment, à partir de ce simple cas, on peut tirer une loi qui soit valable partout et en tout temps. »*

Egalement fruit d'une collaboration entre la Section de mathématiques et le Pôle de recherche national SwissMAP, le Club des maths s'adresse, quant à lui, plus spécifiquement aux 10-16 ans. Deux fois par semaine (le mardi ou le mercredi en fin d'après-midi), il donne l'occasion à ses membres, répartis en groupes d'âge, de se retrouver pour résoudre différents problèmes avec l'aide d'accompagnants spécialisés. Le Club des maths organise également des « Olympiades de mathématiques » dont la dernière édition s'est tenue en novembre à Uni Mail.

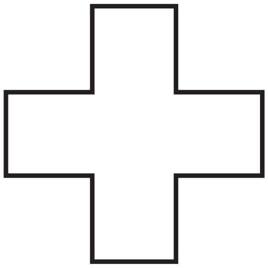
Informations : clubmath@unige.ch

LES MATHS, UN JEU D’ENFANT

LE MATHSCOPE A PLUSIEURS TOURS DANS SON SAC. VOICI QUELQUES EXEMPLES DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES QU’IL PROPOSE. SOLUTIONS EN PAGE 55.

1. DEUX COUPS DE CISEAU

En deux coups de ciseau, pouvez-vous découper la croix ci-dessous de telle sorte qu’avec les pièces obtenues vous puissiez former un carré ?



2. COMMENT TROUVER UN VIZIR INTELLIGENT

Son altesse le Sultan doit remplacer son Vizir. Trois candidats se présentent. Comme le nouveau Vizir doit être un homme intelligent, le Sultan trouve une astuce pour départager les prétendants. Il les aligne les uns derrière les autres de telle manière que le troisième voit la tête des deux candidats devant lui, le deuxième voit celle du premier et le premier ne voit rien. Le Sultan montre alors aux trois candidats cinq chapeaux : 3 noirs et 2 blancs, puis il leur met un bandeau sur les yeux.
Il prend trois chapeaux et en met un sur chaque tête. Il enlève les bandeaux et demande aux candidats quelle est la couleur de leur chapeau.
Quelques secondes de silence passent puis le dernier de la file répond :
« Je ne sais pas ! »
Le deuxième répond : « Moi non plus ! »
Alors, le premier de la file dit : « Je sais ! La couleur de mon chapeau est… »
Comment a-t-il fait et quelle est la couleur de son chapeau ?

3. TOMBERA OU NE TOMBERA PAS ?

Quatre verres à cocktail sont posés sur une planche horizontale. Cette planche est placée sur trois « cylindres » dont les sections sont illustrées sur le dessin. Le rose est à section circulaire (c’est donc un vrai cylindre) tandis que les sections des deux autres sont des figures constituées d’arcs de cercle. Pour l’instant, tout est en équilibre ; mais que va-t-il se passer si les trois « cylindres » commencent à tourner ? La planche restera-t-elle horizontale ou les trois verres vont-ils tomber ?

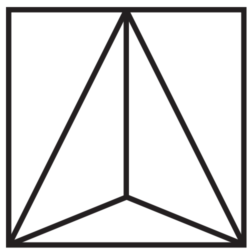
TIRÉ DE : IVAN MOSCOVICH, THE PUZZLE UNIVERSE, LANNOO PUBLISHERS,TIELT, BELGIQUE, 2015.

4. LES CHAUSSETTES DE LA LICORNE

Une licorne veut mettre 4 chaussettes et 4 chaussures. Les chaussures sont identiques, de même que les chaussettes. Combien de possibilités a-t-elle pour enfiler ses habits, sachant que pour chaque pied, elle doit mettre la chaussette avant la chaussure ?

5. SANS LEVER LE CRAYON

Pouvez-vous reproduire le dessin ci-dessous sans lever le crayon ?



6. EN UN SEUL COUP DE CISEAU

On dessine un triangle sur une feuille de papier. Comment doit-on plier la feuille de telle manière à pouvoir le découper en un seul coup de ciseau rectiligne ?

ANALYSE NUMÉRIQUE

LA NATURE MISE EN ÉQUATIONS

L'ANALYSE NUMÉRIQUE S'INTÉRESSE AUX FONDEMENTS MATHÉMATIQUES ET À LA MISE AU POINT DE MÉTHODES PERMETTANT DE RÉSOUDRE LES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE QUI DÉCRIVENT LA NATURE. L'UNIVERSITÉ DE GENÈVE DISPOSE D'UNE SOLIDE TRADITION EN LA MATIÈRE. PRÉSENTATION

Si Martin Gander a choisi Genève en 2004, c'est avant tout pour suivre les traces de ses illustres prédécesseurs Gerhard Wanner et Ernst Hairer, deux mathématiciens dont la renommée dépasse les frontières. « *Ce sont des stars mondiales de l'analyse numérique*, s'exclame l'actuel professeur à la Section de mathématiques. *On connaissait déjà l'existence des deux numériciens de Genève lorsque je faisais mes études à Zurich, dans les années 1980. Mais ils sont surtout devenus célèbres grâce à la publication d'une monographie qui figure parmi les meilleures et les plus citées de ma discipline.* »

D'origine autrichienne, Gerhard Wanner a dirigé la thèse d'Ernst Hairer à Innsbruck avant de venir en Suisse et de se voir offrir un poste de professeur à l'Université de Genève. Son ancien étudiant l'a suivi quelques années plus tard, après avoir accédé lui aussi au statut professoral. Leur collaboration dans la cité de Calvin a duré plusieurs décennies. Ils sont aujourd'hui tous les deux à la retraite. Ernst Hairer est, par ailleurs, le père de Martin Hairer, lauréat de la médaille Fields en 2014, la plus haute distinction internationale en mathématiques.

« *Après plusieurs années passées en France, aux Etats-Unis et au Canada, j'ai trouvé le temps il y a une douzaine d'années d'effectuer une année sabbatique à Genève*, poursuit Martin Gander. *J'ai pu voir ce remarquable duo à l'œuvre. Ils sont impressionnants. Ils forment une équipe très efficace. Et ce n'est pas fini. Gerhard Wanner et Ernst Hairer ont présenté des résultats très récents. Même à la retraite, ils sont toujours au top niveau, tant du point de vue technique que des idées, chose qui n'est pas évidente dans une discipline comme les mathématiques.* »

« MÊME À LA RETRAITE, ILS SONT TOUJOURS AU TOP NIVEAU, TANT DU POINT DE VUE TECHNIQUE QUE DES IDÉES, CHOSE QUI N'EST PAS ÉVIDENTE DANS UNE DISCIPLINE COMME LES MATHÉMATIQUES »

La monographie, parue en trois volumes (en 1987, 1991 et 2002 respectivement), avec laquelle les deux Genevois se sont illustrés traite de la Résolution des équations différentielles ordinaires. Ces dernières sont des équations qui permettent, par exemple, de décrire l'évolution d'une population de prédateurs poursuivant et attrapant des proies qui, de leur côté, tentent de leur échapper.

Si ces ouvrages ont connu un tel succès, c'est que les équations différentielles dans leur ensemble (à une ou plusieurs variables), que l'on peut comprendre comme le « taux de changement » d'une grandeur physique (pression, température…), sont les seules à même de décrire la nature. « *Presque toutes les lois de physique qui ont été découvertes lient des dérivées de quelque chose à des dérivées d'autre chose*, explique Marin Gander. *Je ne sais pas pourquoi, mais le monde est ainsi fait. Et c'est formidable. Car les équations en question sont assez simples.* »

Et, de fait, les formules qui décrivent la propagation des ondes sonores ou électromagnétiques, la diffusion de la chaleur, l'écoulement d'un fluide, l'évolution d'un état quantique ou encore la déformation d'un solide sont bien connues des physiciens et des mathématiciens. Le problème, c'est de résoudre ces équations, ne serait-ce que pour comprendre ce qui se passe lorsqu'un son traverse une pièce par exemple. Les solutions pour chaque cas particulier sont, en réalité, impossibles à trouver de manière analytique, c'est-à-dire en utilisant exclusivement des méthodes mathématiques. Pour s'en sortir, la seule façon de faire consiste à s'approcher le plus possible du résultat théorique en développant des méthodes numériques, qui

ISTOCH

LA MÉTÉO A LE MAL DES MONTAGNES

Chacun a un avis sur la qualité des prévisions météorologiques. Comme beaucoup d'autres, Sandie Moody estime que le modèle de prévision numérique du temps utilisé par l'Office fédéral de météorologie et climatologie (Météosuisse) peut être amélioré. La différence entre elle et Monsieur Tout-le-monde, c'est que non seulement elle sait comment il faudrait s'y prendre mais, qu'en plus, elle a déjà commencé à y travailler. Il faut dire que cela fait un an qu'elle a entamé une thèse sur le sujet sous la direction de Martin Gander, professeur à la Section de mathématiques (Faculté des sciences).

Le modèle de simulation de Météosuisse est basé sur la méthode dite des volumes finis. Elle consiste en un découpage de l'atmosphère en cellules de 2,2 km sur 2,2 et d'une dizaine de mètres de hauteur. Pour l'instant, car en 2016 devrait être introduite une nouvelle version de l'algorithme (COSMO-1) avec une grille de 1,1 km de côté.

Pour chacune des cellules ainsi définie, le modèle permet à des ordinateurs de grande puissance de calculer pour un moment donné des paramètres comme la température, la pression ou encore les flux en se basant sur des équations de physique et des données fournies par les stations météorologiques. Pour connaître les conditions futures, l'ordinateur recommence le processus avec de nouvelles données initiales obtenues par le cycle de calcul précédent. Et ainsi de suite jusqu'à une durée d'environ cinq jours.

Un tel modèle fonctionne en général très bien, on peut le constater chaque jour en vérifiant la pertinence du bulletin météo de la veille. Mais il peut faire mieux.

Parmi les problèmes inévitables survenant dans ces algorithmes de simulation figurent les montagnes. Dans le modèle de Météosuisse, comme chez toutes les autres agences météorologiques du monde, l'axe horizontal de la grille épouse le relief du terrain. Quand la topographie est plane, ce n'est pas grave. Mais si une pente apparaît, les calculs effectués par le modèle commencent à poser des problèmes. Si le terrain (vu à travers une grille de 2,2 km de côté, il ne faut pas l'oublier) fait un angle raisonnable, c'est gérable. En revanche, lorsque l'inclinaison dépasse un certain seuil, les résultats deviennent franchement instables.

« Un modèle instable, c'est pire qu'un modèle faux, estime Sandie Moody. Les erreurs calculées explosent et l'on obtient des valeurs absurdes. C'est pourquoi, pour certains points du territoire suisse, essentiellement dans les Alpes, les météorologues préfèrent annuler certains paramètres plutôt que de retenir une valeur très fausse calculée par le modèle. Du coup, les prévisions locales mais aussi générales perdent en précision. Mon travail consiste à développer un outil qui pourrait combler ces lacunes. »

Pour y parvenir, Sandie Moody, sur les conseils de Martin Gander, décide de s'attaquer au problème avec la méthode dite des Discrete duality finite volumes, un nouveau champ de recherche en plein essor. A coups de théorèmes et de lemmes, la mathématicienne avance, avec succès pour l'instant puisque l'algorithme qu'elle est en train de développer a déjà passé avec succès des premiers tests de stabilité et de convergence, des critères indispensables pour aller plus loin.

LE RELIEF ACCENTUÉ DES ALPES SUISSES POSE DES DIFFICULTÉS AU MODÈLE DE PRÉVISION NUMÉRIQUE DU TEMPS. LES MATHÉMATIQUES PEUVENT CONTRIBUER À RÉSOUDRE LE PROBLÈME.

sont des approximations mais qui permettent de recourir à la puissance de calcul des ordinateurs.

Les deux premiers volumes de la monographie de Gerhard Wanner et Ernst Hairer posent les bases théoriques de ces méthodes numériques. Dans le troisième, les deux compères présentent des techniques qui permettent de préserver les propriétés inhérentes aux équations que l'on veut résoudre. En effet, il faut à tout prix que la solution que l'on trouve par approximation conserve tout son sens physique. Si l'on obtient un résultat tel qu'une pression négative (ce qui est impossible), alors la méthode n'a aucun intérêt.

«*Notre travail consiste à développer, pour chaque problème qui nous est soumis, des méthodes qui donnent des résultats corrects et qui, en plus, ne soient pas trop gourmands en temps de calcul*, souligne Martin Gander. *Aujourd'hui, tous les algorithmes que nous concevons fonctionnement par itération. Cela signifie que l'on commence avec une première approximation grossière puis on répète un cycle de calcul qui permet de s'approcher de la solution. Au bout d'un certain nombre d'itérations, on obtient une précision suffisante. Certains algorithmes sont devenus tellement efficaces que la précision atteint le 1‰ (10^{-3}) en seulement 4 cycles et 10^{-16} après 25.*»

«MA VIE PROFESSIONNELLE ALTERNE SANS CESSE ENTRE LE MONDE CONTINU ET LE MONDE DISCRET»

Au final, les chercheurs se retrouvent non pas avec la solution exacte, une courbe continue et lisse par exemple, mais avec un grand nombre de points situés extrêmement proches de cette fonction théorique dont ils ne connaîtront jamais la formulation. Et s'il faut trouver des valeurs entre deux points, il est toujours possible d'interpoler ou de recommencer toute la procédure avec un maillage plus serré. «*Ma vie professionnelle alterne sans cesse entre le monde continu et le monde discret*», commente Martin Gander.

L'analyse numérique – qui désigne ce champ de recherche – est utilisée dans un nombre gigantesque d'applications. Toutes les simulations par ordinateur y ont recours: modèles climatiques, géologiques, astronomiques, écologiques, hydrodynamiques…

Martin Gander, dont le travail est en partie fondamental, se consacre également à des cas très concrets. Une doctorante travaille notamment sous sa direction sur l'amélioration du modèle de prévision numérique du temps utilisé par Météosuisse (lire ci-contre). Par le passé, le professeur a également développé un algorithme permettant de simuler par ordinateur le fonctionnement d'un four à micro-ondes en train de cuire un poulet. En faisant l'expérience en conditions réelles, il a ainsi montré que ses prédictions étaient exactes: le four ne chauffe qu'une couche de 3 cm d'épaisseur tout autour de la volaille. Et ce n'est que quand cette couche est devenue totalement sèche par évaporation de l'eau que les ondes peuvent pénétrer plus profondément dans la chair du poulet.

«*En fait, cette étude servait à montrer qu'il est possible de modéliser la progression des micro-ondes dans des tissus organiques*, précise Martin Gander. *Par la suite, une autre équipe a utilisé notre méthode pour l'appliquer, avec succès, au cas du téléphone portable. La longueur d'onde du rayonnement émis par les deux objets est similaire. Ce qui varie beaucoup c'est l'intensité. Mais les mobiles, on le sait, induisent un réchauffement local du cerveau, près de l'oreille.*»

Autre exemple: lorsqu'il était encore aux Etats-Unis, il a collaboré à une étude mandatée par une compagnie proche du Département de la défense. Il s'agissait de créer un espace ouvert dans lequel on peut s'entendre facilement, au milieu d'un brouhaha ambiant assez fort. Un petit espace où le son extérieur ne pénètre pas ou, plutôt, est annihilé. Les scientifiques ont accompli leur mission du point de vue mathématique et l'ont mis en œuvre avec des haut-parleurs produisant exactement le même son que celui du bruit extérieur mais décalé d'une demi-longueur d'onde dans le temps, ce qui permet, en les additionnant, de les réduire tous les deux au silence. Même s'il n'a jamais su quelle suite a été donnée à son travail, Martin Gander a vite compris que la vraie motivation des militaires était de trouver un moyen permettant aux conducteurs des gros véhicules tout-terrain tels que les Hummer de continuer à communiquer alors même que la guerre fait rage tout autour d'eux. L'idée a néanmoins trouvé son chemin dans la vie civile puisqu'on trouve aujourd'hui des casques audio munis d'un tel dispositif visant à éliminer les nuisances sonores pouvant interférer avec l'écoute de la musique.