Conception collaborative de ressources pour l'enseignement de l'algèbre élémentaire

DiMaGe

Sylvie Coppé

Maitresse d'enseignement et de recherche

Université de Genève, FPSE, équipe DiMaGe

UNIVERSITÉ DE GENÈVE

ifé ENS DE LYON icar

A l'origine de notre travail
Le groupe SESAMES
http://pegame.ens-lyon.fr/

- Recherche collaborative entre des chercheurs de l'UMR ICAR et des professeurs de mathématiques du secondaire

SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation)

- LEA Ampère

COLLÈGE AMPÈRE, LYON (depuis 2011)

Ressources pour les enseignants et formateurs de mathématiques sur l'enseignement de l'algèbre au collège

UMR ICAR, équipe ADIS-Sciences

Thématique(s) Ifé : Profession et professionnalité éducative, Les ressources pour apprendre et faire apprendre

Production de ressources

http://pegame.ens-lyon.fr/

PEGAME

pour les Professeurs et leurs Elèves un Guide pour l'Apprentissage des Mathématiques et leur Enseignement

icar

mardi 18 avril 2017

Ce site est consacré à l'enseignement de l'algèbre au collège et en classe de seconde.

Les documents proposés sur ce site sont le fruit de plusieurs travaux de recherche

dirigés par Sylvie COPPE Maitresse de conférences IUFM, Université LYON 1,

auxquels participent des enseignants de collège et lycée.

Enseigner **Se former**

IFÉ - Une entrée possible dans l'algèbre par les programmes de calcul

Parcours mutualisé

ifé

SESAMES Algèbre

UMR ICAR

(Université Lyon, CNRS)

IFÉ - ENS LYON

- Christophe Alves
- Olivier Arrouch
- Maud Chanudet
- Anne Sophie Cherpin
- Vincent Duval
- Stéphane Garapon
- Alexandra Goislard
- Sylvie Martin-Dametto
- Claire Piolti-Lamorthe
- Sophie Roubin
- Etienne Spaak

Type de collaboration

- Une finalité : produire des ressources, alimenter le site
- Des objectifs communs ou devenus communs (rédaction de principes au début du travail du groupe) :
  - Favoriser l'activité des élèves
  - Donner des finalités à l'enseignement de l'algèbre
  - Travailler conjointement sens et technique
- Chacun apporte son expertise (même naissante)
  - Sur la pratique (tout n'est pas possible dans la classe !)
  - Sur la diffusion (prise en compte des pratiques des autres professeurs)
  - Sur les recherches sur l'algèbre élémentaire

« Construction d'un monde commun » (Mangiante, 2013)

- *Nous retenons pour notre travail cette notion de monde pour conceptualiser le processus dialogique qui nécessairement va s'installer au cœur du dispositif entre d'une part les formateurs/chercheurs et d'autre part les enseignants. La production de ressource est vue comme la construction possible d'un monde commun, un lieu d'échanges, d'apports mutuels mais aussi de mises en tensions entre des mondes (ou points de vue) différents.* (Beguin & Cerf, 2004)
- Importance de
  - la composante collaborative au delà du travail réalisé
  - la composante analyse réflexive commune

Modèle collaboratif entre chercheurs et enseignants

Il ne s'agit donc pas seulement, pour nous, de développer des situations d'enseignement riches et pertinentes sur le plan des apprentissages, contribuant à une construction conceptuelle significative pour les élèves, ce qu'une analyse didactique peut bien sûr permettre d'éclairer, mais de produire des situations qui soient, en plus, *viables pour les enseignants* dans leur contexte. (Bednarz, 2013)

PLAN

- Historique du groupe SESAMES
  - 1 - Les premiers travaux
  - 2 - Les programmes de calcul
- Utilisation des programmes de calcul
  - Pour les équations
  - Pour les preuve
- Programmes de calcul et évaluation par les pairs

Petit historique du groupe SESAMES algèbre (2002- …)

Constats de départ

- Les élèves ont des difficultés à mobiliser les outils algébriques au collège et au lycée dans les problèmes. Ils ont du mal à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas.

- Les aspects modélisation et outil de preuve de l'algèbre sont peu mis en avant dans l'enseignement de l'algèbre.

- L'algèbre est enseignée comme un objet plutôt qu'un outil.

- Beaucoup d'erreurs dans les calculs car la distributivité n'est pas utilisée comme élément technologique des techniques de calcul (Assude et al., 2012).

Bilan de l'évolution des programmes français

- L'algèbre n'est plus un domaine des programmes du collège depuis 1971 (Chevallard, 1985)
- Après la période des mathématiques modernes (1970-1978), ré-introduction de la résolution de problèmes.
- Depuis 1985, entrée progressive dans l'algèbre au cours du collège (élèves 12-15ans) avec accent mis sur équations
- A partir de 2005, diversification des types de tâches (plus seulement résoudre des équations) mais de façon pas toujours lisible (atomisation, Assude, Coppé & Pressiat, 2012)
- Depuis 1978 des organisations mathématiques régionales encore peu articulées
  - Équations
  - Preuve
  - Calcul littéral

Bilan (suite)

- Statuts de la lettre variable/ inconnue sont évoqués mais de façon peu lisible
- Distributivité

Sur des exemples numériques, utiliser les égalités

$k(a + b) = ka + kb$ *et* $k(a - b) = ka - kb$ *dans les deux sens.*

Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités

$k(a + b) = ka + kb$ *et* $k(a - b) = ka - kb$ *dans les deux sens.*

- La place des relatifs entre 5^e /4^e n'aide pas à développer des organisations mathématiques autres que ponctuelles ou locales

3 Utiliser la distributivité

a Développer une expression

On transforme un produit en somme ou en différence.

- $k \times (b + c) = k \times b + k \times c$ autrement dit $k\,(b + c) = kb + kc$
- $k \times (b - c) = k \times b - k \times c$ autrement dit $k\,(b - c) = kb - kc$

On dit que l'on distribue k.

Exemples

➡ $11(x + 3) = 11 \times (x + 3) = 11 \times x + 11 \times 3 = 11x + 33$

➡ $4(x - 7) = 4 \times (x - 7) = 4 \times x - 4 \times 7 = 4x - 28$

b Factoriser une expression

On transforme une somme ou une différence en produit.

- $k \times b + k \times c = k \times (b + c)$ autrement dit $kb + kc = k(b + c)$ ou encore $bk + ck = (b + c)k$
- $k \times b - k \times c = k \times (b - c)$ autrement dit $kb - kc = k(b - c)$ ou encore $bk - ck = (b - c)k$

On dit que l'on met k en facteur.

Exemples

➡ $15x - 35 = 5 \times 3x - 5 \times 7 = 5(3x - 7)$

➡ $2a + 5a = (2 + 5)a = 7a$

➡ $8a - 3a = (8 - 3)a = 5a$

Ici, on dit que l'on réduit les expressions.

Mathématiques Collection Zénius 5e, 2010

Réduire 1

3 Applications de la distributivité

a) Réduction d'une expression littérale

VOCABULAIRE **Réduire** une expression littérale revient à l'écrire avec le moins de termes possible.

EXEMPLES :

- Réduire $E = 3a - 5a$.

$E = 3 \times a - 5 \times a$

$E = (3 - 5) \times a$

$E = -2a$

- Réduire $F = 5x^2 - x + 5 - 2x^2 + 3x - 9$.

$F = 5x^2 - x + 5 - 2x^2 + 3x - 9$

$F = (5 - 2)x^2 + (-1 + 3)x + 5 - 9$

$F = 3x^2 + 2x - 4$

Remarque : On considère l'expression $7x^2 - x$.
On peut factoriser cette expression : $7x^2 - x = (7x - 1)x$.
$7x^2$ et x n'ont pas la même partie littérale, donc on ne peut pas réduire l'expression $7x^2 - x$.

Phare 4e 2011

Réduire 2

méthode 1

Réduire une expression littérale

Exercice Réduire l'expression littérale $A = 2x^2 - 7x - 10 + x^2 - 8 + x$.

Solution

$A = 2x^2 - 7x - 10 + x^2 - 8 + x$

étape 1 Je regroupe les termes en x^2, les termes en x et les **termes constants**.

$A = 2x^2 + x^2 - 7x + x - 10 - 8$

étape 2 Je me souviens que $x^2 = 1 \times x^2$ et $x = 1 \times x$.

$A = 2x^2 + 1x^2 - 7x + 1x - 10 - 8$

étape 3 Je factorise $2x^2 + x^2$ par x^2, $-7x + x$ par x.

$A = (2 + 1)x^2 + (-7 + 1)x - 10 - 8$

$A = 3x^2 + (-6)x - 18$

étape 4 Je termine la réduction.

$A = 3x^2 - 6x - 18$

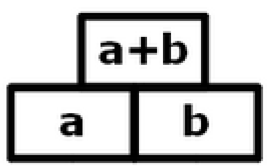
On a « compté » les termes en x^2 entre eux, les termes en x entre eux et les **termes constants** entre eux.

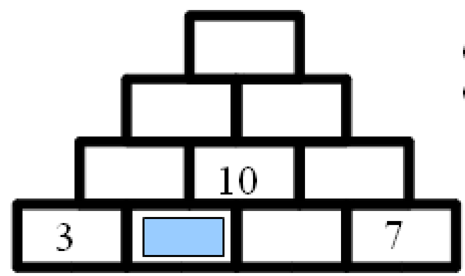
Zenius 4e 2011

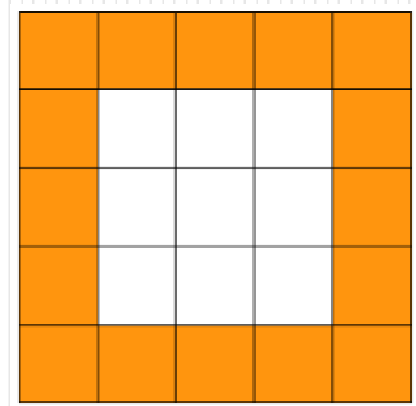
Des travaux sur l'introduction de la lettre, sur les difficultés en algèbre

- **Behr** (1980) : difficultés
- **Kieran, Schmidt** : travaux sur l'algèbre élémentaire
- **Vergnaud** (1988, 1989) : entrée dans l'algèbre, procédures arithmétiques ou algébriques
- **Chevallard** (1989, 1990) : rupture /continuité entre algèbre et arithmétique
- **Drouhard** (1992) : algèbre comme langage
- **Gascon** (1993) : l'algèbre élémentaire n'est pas une arithmétique généralisée (paramètres)
- **Bednarz et Janvier** (1996) : problèmes connectés/déconnectés
- **Combier et al.** (1996). Les débuts de l'algèbre au collège.

ÉTAPE 1 : production d'activités pour la classe

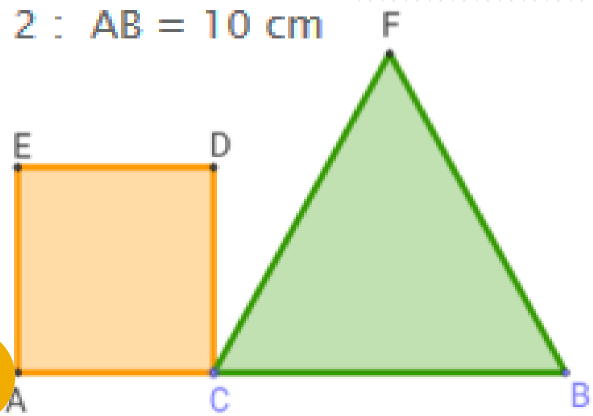


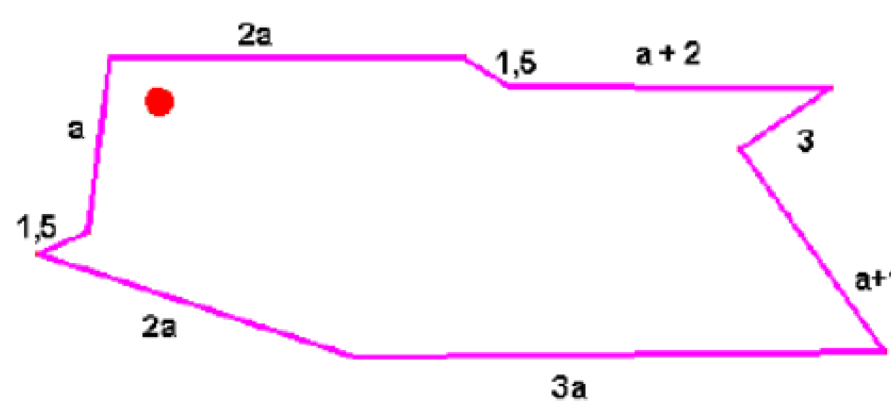




Cas 1 : AB = 21 cm

Cas 2 : AB = 10 cm





Des activités innovantes mais *isolées*

- Rendre les problèmes plus ouverts (trop d'exercices guidés dans les manuels)
- Laisser l'introduction de la lettre à la charge des élèves plutôt que de la donner
- Mettre les élèves en activité, plus autonomes vis à vis du savoir
- Justifier les techniques de calcul (place de la distributivité)

Bilan

- Forte influence de la TSD, création d'un milieu riche pour l'élève
- Mais des difficultés à trouver des activités qui nécessitent vraiment la lettre
- Nécessité d'inscrire ces activités dans une progression (avant, après) avec une articulations entre sens/technique
- Difficultés à implanter ces activités dans les classes ordinaires (Coulange & Grugeon, 2008 ; Mangiante, 2014 ; Perrin Glorian, 2014)
- Nécessité de produire des documents pour expliquer les choix (rubrique « Se former » du site)

Trois évolutions conjointes (2004…)

Les recherches sur le développement professionnel montrent plutôt que celui-ci consiste en des réorganisations successives des conceptualisations, des manières de penser sa propre activité en rapport avec la situation dans laquelle il est inséré. (Rogalski, 2005)

Trois évolutions

1. Les travaux de recherche sur les pratiques professionnelles
   - Chevallard TAD (1998…), les AER, PER
   - Travaux autour de la double approche Robert (2001…)
2. Les travaux de recherche sur l'algèbre

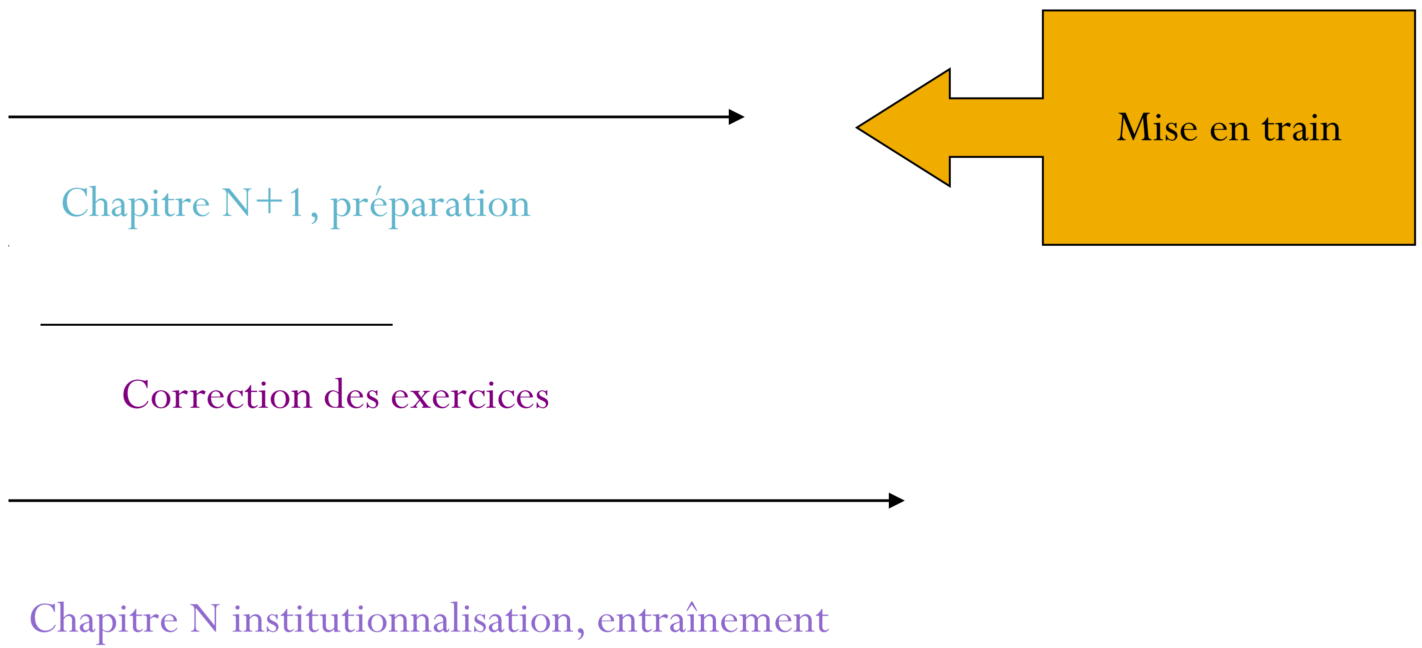
Les entrées qui donnent des finalités au calcul littéral : équations, preuve, fonctions (Grugeon,1995) ; Bosch, 2005 ; Kieran, 2007 ; Ruiz Monzon, 2010 ; Pilet, 2012)

3. Les pratiques des professeurs du groupe

La mise en TRAIN, une gestion de classe innovante

La mise en train

Changement de la structure des séances



ETAPE 2 : Les programmes de calcul

La notion de programme de calcul se construit aujourd'hui à l'école primaire et dans les premières années du collège : elle formalise l'idée de faire un calcul c'est –à-dire le fait d'opérer sur les nombres d'une manière déterminée, **selon un certain programme**

« Lorsque la notion d'expression algébrique est dûment introduite au collège comme mathématisant la notion de programme de calcul, un certain nombre de difficultés « traditionnelles » prennent un tout autre sens, quand elles ne disparaissent pas tout à fait. »

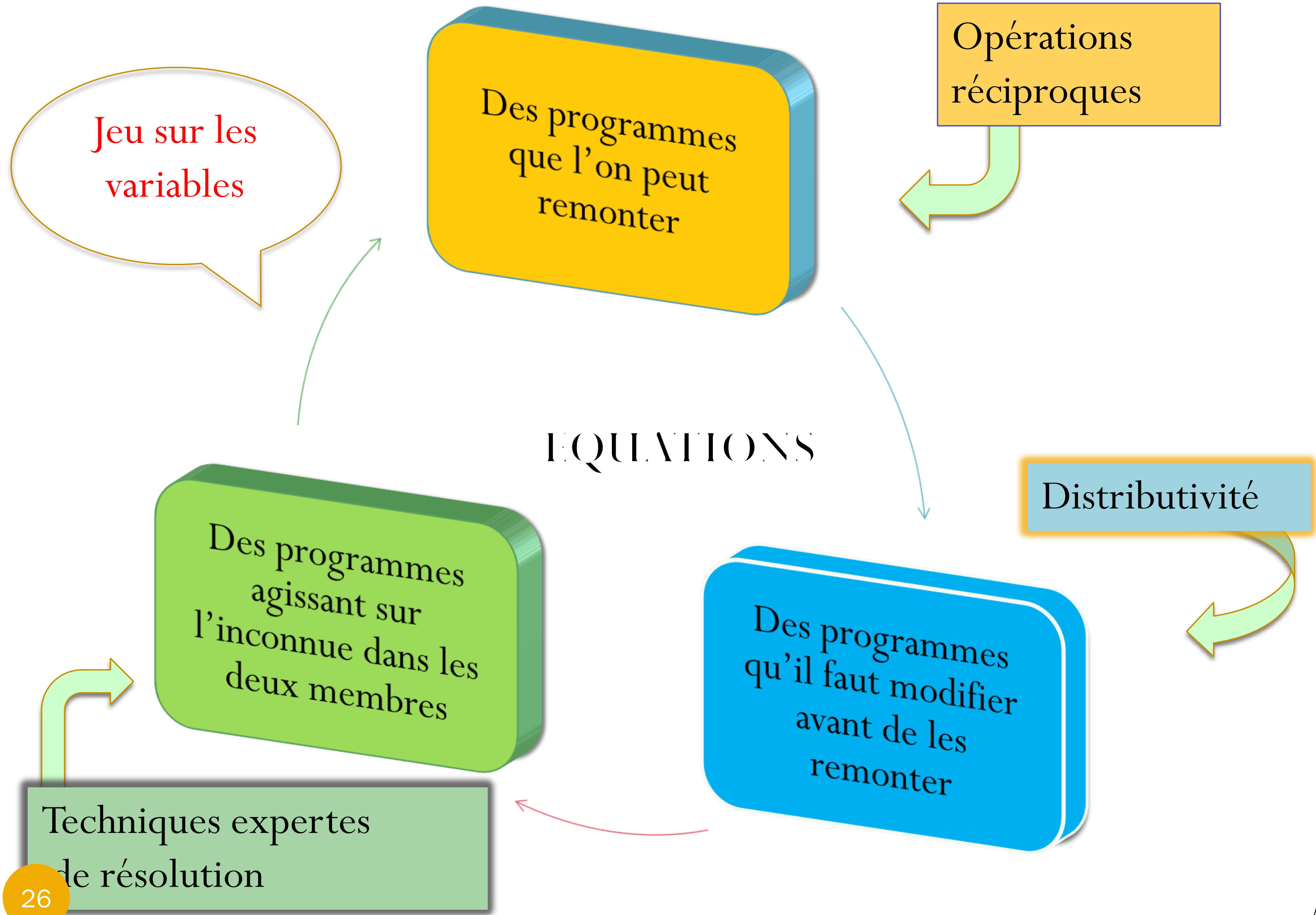
Chevallard, 2007

(cours aux professeurs stagiaires)

A quelles conditions deux programmes de calcul donnent-ils le même résultat ? *Toujours* le même résultat ?

- Pour aller vers la résolution d'équations
- Pour aller vers la preuve

Progression avec programmes de calcul sur les équations


Jeu sur les variables
Des programmes que l'on peut remonter
Opérations réciproques
EQUATIONS
Distributivité
Des programmes agissant sur l'inconnue dans les deux membres
Des programmes qu'il faut modifier avant de les remonter
Techniques expertes de résolution

Je pense à un nombre

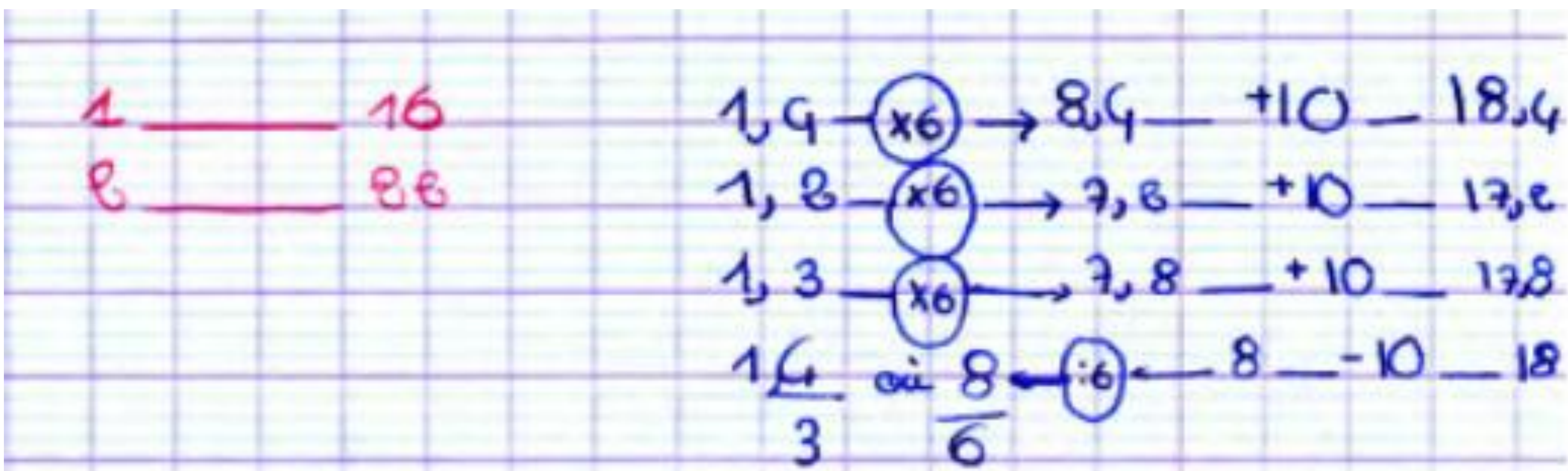
↓

Je le multiplie par 6

↓

J'ajoute 10 au résultat

Quel nombre
faut il choisir pour obtenir
18 ?



Je choisis un nombre

Je lui ajoute 3

Je multiplie le résultat par 5

J'enlève au résultat le nombre du départ

Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 25 ?

$$\ldots \xrightarrow{+3} \ldots \xrightarrow{\times 5} \ldots \xrightarrow{-\ \ldots} 25$$

$$(x+3)\times 5 - x = 5x + 15 - x = 4x + 15$$

Je choisis un nombre

Je le multiplie par 4

J'ajoute 15 au résultat

$$\ldots \xrightarrow{\times 4} \ldots \xrightarrow{+15} 25$$

Je choisis un nombre

↓

Je lui ajoute 3

↓

Je multiplie le résultat par 5

↓

J'enlève au résultat le nombre du départ

Quel nombre ai-je choisi si j'obtiens 25 ?

$$\ldots \xrightarrow{+3} \ldots \xrightarrow{\times 5} \ldots \xrightarrow{-\ \ldots} 25$$

x est n'importe quel nombre

$$(x+3)\times 5 - x$$

$$= x\times 5 + 3\times 5 - x$$

$$= x \times 5 + 15 - x$$

$$= 5x + 15 - x$$

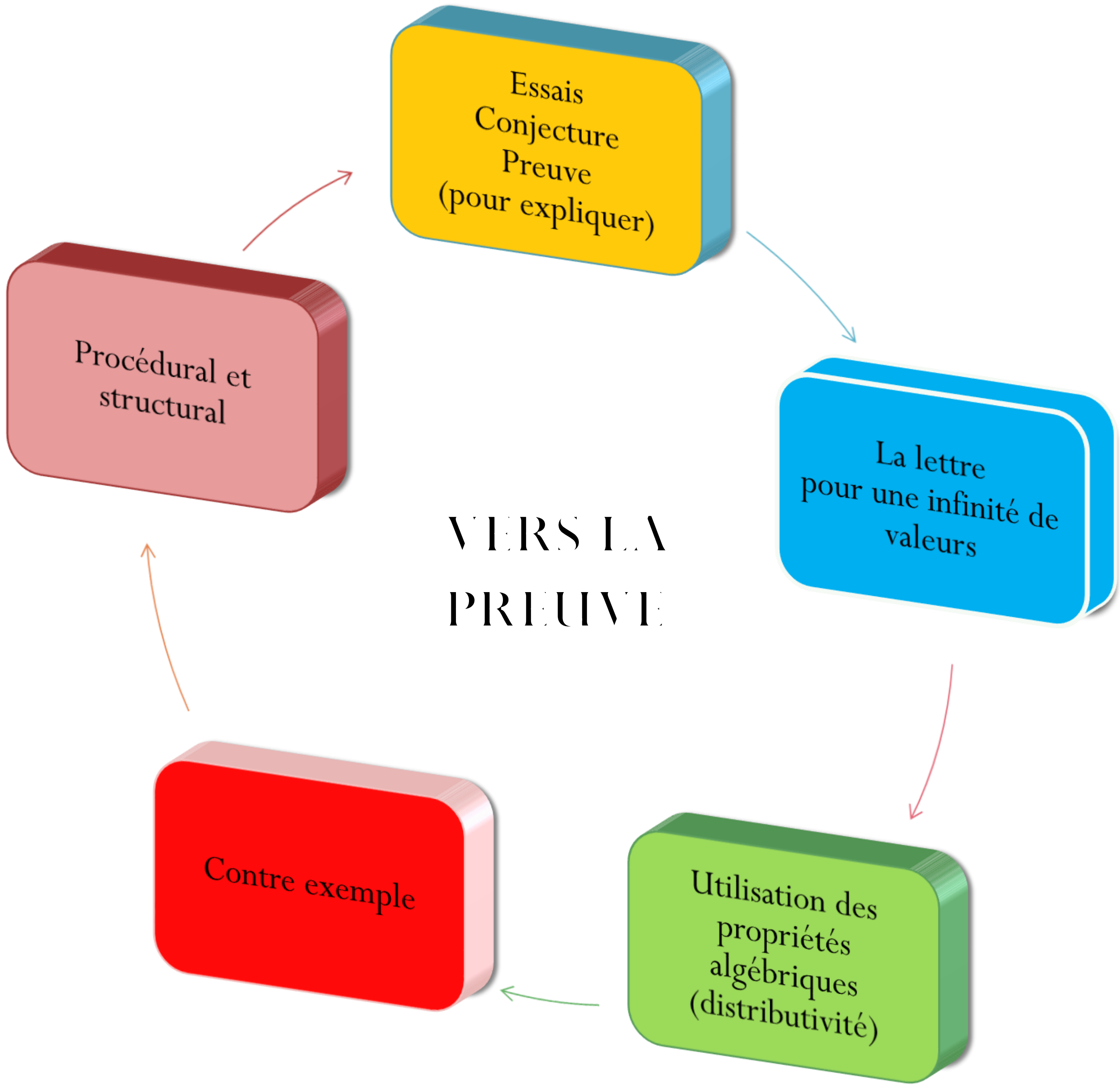
$$= 4x + 15$$

$$\ldots \xrightarrow{\times 4} \ldots \xrightarrow{+15} \ldots$$

$$25 \xrightarrow{-15} 10 \xrightarrow{:4} 2{,}5$$

$$\underline{2{,}5} \xrightarrow{+3} 5{,}5 \xrightarrow{\times 5} 27{,}5 \xrightarrow{-2{,}5} \boxed{25}$$

Programme de calcul et preuve


Essais
Conjecture
Preuve
(pour expliquer)
La lettre
pour une infinité de
valeurs
Utilisation des
propriétés
algébriques
(distributivité)
Contre exemple
Procédural et
structural
VERS LA
PREUVE

Choisir un nombre
le multiplier par 5
ajouter 6 au produit
multiplier le résultat obtenu par 2
enlever 10 fois le nombre de départ.

Je choisi 2 ;	Je choisi 3 ;	Je choisi 5
$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$5 \times 5 = 25$
$10 + 6 = 16$	$15 + 6 = 21$	$25 + 6 = 31$
$16 \times 2 = 32$	$21 \times 2 = 42$	$31 \times 2 = 62$
$32 - 20 = 12$	$42 - 30 = 12$	$62 - 50 = 12$

On constate que pour tout nombre choisi le 12 si on le fait avec ce program

x

$5x + 6 = 5x + 6$

$(5x + 6) \times 2 = 10x + 12$

$10x + 12 - 10x$

$= 12$

Ona a reussi a demontré donc le programme est justifié

Enjeu d'explication
plutôt que de conviction

Je choisis un nombre,

je lui ajoute 1,

je calcule le carré du résultat,

je retranche le carré du nombre de départ.

Pour tout entier n

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Enjeu de formulation,
du procédural vers le structural

Des formulations diverses

- J’obtiens toujours deux fois le nombre plus 1
- J’obtiens toujours la somme de ces deux nombres
- La différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est toujours un nombre impair
- Tout entier impair peut s’écrire comme la différence des carrés de deux nombres consécutifs.

Conclusions : Intérêts des PC

- Outil facile à utiliser car texte simple
- Progression dans les objectifs et la difficulté en jouant sur les variables (nombres en jeu, formes des programmes, procédures personnelles/expertes)
- Amène à penser les apprentissages des élèves en fonction des savoirs en jeu en sortant des chapitres (raisons d'être)
- Travail dans différents registres de représentation
- Travail sur les aspects structural et procédural
- Dialectique sens /technique
- Gestion de classe privilégiant les apprentissages sur la durée (dévolution/institutionnalisations/réinvestissements)

Etape 3 : Programme de calcul et évaluation par les pairs

Projet Européen ASSIST ME
ICAR Lyon, LSE Grenoble

ASSISTME

- Dégager des critères du fonctionnement et de l'utilisation de l'Evaluation Formative en classe
  - en lien avec l'Évaluation Sommative,
  - dans le cadre des démarches d'investigation en sciences et de la résolution de problèmes en mathématiques
- et ainsi pouvoir proposer (en conformité avec la culture de chaque pays et des pratiques) :
  - des méthodes d'évaluations
  - des formations aux enseignants

Site : http://assistme.ku.dk
Recommandations pour la France sur le site :
https://assistmefr2016.sciencesconf.org/ (rubrique actualités)

Évaluation par les pairs

- Allal (1989) **:** Importance pour les élèves de développer des compétences leur permettant de se positionner par rapport à leur travail ou par rapport aux réponses des autres dans un but de régulation
  - accroissement de l'autonomie de l'élève
  - meilleure adaptation au monde.
- Black et al. (2004) : Différentes organisations possibles, le principe étant que les élèves soient placés en position de réfléchir sur la validité de la production (orale ou écrite) d'au moins un de leurs camarades.

Un problème simple, dans le cadre de la progression de la classe

Question 1 : Voici un programme de calcul :

- Choisir un nombre
- Ajouter 4
- Multiplier la somme par 5
- Soustraire 8 au résultat

Quelle expression littérale décrit ce programme de calcul ?

Analyse a priori des réponses

Réponses correctes	Réponses erronées
• réponse correcte développée $5\ (x+4) - 8$	• un calcul exemple
• réponse correcte réduite $5x+12$	• plusieurs calculs exemples
	• un schéma de programme en ligne ou colonne
	• pas prise en compte des parenthèses • $5x + 4 - 8$
	• pas prise en compte des parenthèses • $5x +/- 4$
	• erreur dans la réduction $5x +/- 12$
	• expressions comportant plusieurs variables

Validation des réponses

Réponses	Validation	Invalidation
Réponse correcte développée 5 (x+4) – 8	***Externe*** Même réponse Il y a des lettres ***Interne*** Refaire le programme Il faut mettre les parenthèses	***Externe*** Pas même réponse (car pas réduite) ***Interne*** Pas terminé car pas réduite
Réponse correcte réduite 5x+12	***Externe*** Même réponse Il y a des lettres ***Interne*** Refaire le programme et le réduire Vérifier la réduction	***Externe*** Pas même réponse (car réduite) ***Interne*** Développement avec erreur de calcul

Jeu sur le contrat et le milieu

- L'exigence d'argumentation fait travailler d'autres connaissances que celles mobilisées pour résoudre (milieu)
- Une modification du contrat (argumenter sur les réponses)

Articles

- Alves, C., Coppé, S., Duval, V., Goislard, A., Kuhman, H., Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin, S. (2013). Utilisation des programmes de calcul pour introduire l'algèbre au collège. *Repères IREM*, *92* (numéro spécial Algèbre), 9-30.

- Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In L. Coulange, J.-L. Dorier, J.-P. Drouhard & A. Robert (Eds.). *Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives. Numéro spécial hors-série de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 41-62), Grenoble : la Pensée Sauvage.

- Bombrun Nigon, C. & Coppé, S. (2014). La « preuve pour comprendre », un levier pour la construction du sens de la lettre en classe de Cinquième. Repères IREM, 94, 1-25.

- Coppé, S. (2013). Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : une étude de cas d'une enseignante de mathématiques en collège. In M. Grangeat (Ed.). *Les enseignants des sciences face aux démarches d'investigation : des formations et des pratiques de classe (pp. 115-125).* Grenoble : Presses Universitaires.

- Coppé, S. Grugeon, B. & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : l'exemple du carré bordé. Petit x 102, 57-80.

- Coppé, S. & Moulin, M. (à paraître). Évaluation entre pairs et débat argumenté dans le cadre d'un problème complexe en mathématiques. Canadian journal of sciences, mathematics and technology education.

- Martin Dametto, S., Piolti Lamorthe, C. & Roubin S. (2013). TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'Initiative, Bulletin de l'APMEP, 502.

Merci de votre attention