UNIVERSITÉ DE GENÈVE

FACULTÉ DE PSYCHOLOGIE ET DES SCIENCES DE L'ÉDUCATION

Une étude du travail de recherche des élèves en résolution de problèmes

Caractérisation de démarches et gestion des erreurs

Canevas de thèse de doctorat en didactique des mathématiques en Sciences de l'éducation

Proposé par Stéphane FAVIER

Décembre 2018

Commission de thèse :

Directeurs : Jean-Luc DORIER, FPSE, Université de Genève

Sylvie COPPE, FPSE, Université de Genève

Membres : Emmanuel SANDER, FPSE, Université de Genève

Magali HERSANT, Université de Nantes

J'approuve le projet par rapport aux aspects éthiques.

Nombre de caractères : 49'147

Table des matières

1 INTRODUCTION

La résolution de problèmes comme méthode pour développer les apprentissages des élèves est mise en avant par les différents acteurs du système éducatif qu'ils soient chercheurs ou responsables institutionnels et ce, dans de nombreux pays et à différents niveaux scolaires (Dorier & Garcia, 2013). En Suisse Romande, elle est au cœur du Plan d'études romand (PER). En effet, dès le début des commentaires généraux du domaine *Mathématiques et Sciences de la Nature*, une des visées prioritaires est de « se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature » (CIIP, 2010, p. 5).

Durant notre parcours professionnel, nous avons eu la chance d'enseigner à des élèves du primaire et du secondaire. Nous étions toujours surpris de voir que, dans ces deux contextes scolaires, la résolution de problèmes déclenchait chez les élèves des réactions très contrastées entre enthousiasme et hostilité. Certains élèves montraient beaucoup de persévérance, trouvaient des solutions très inattendues là où d'autres manifestaient de l'opposition voire abandonnaient rapidement après la lecture de l'énoncé. En tant qu'enseignant, ces constats sont déstabilisants, dans la mesure où ces comportements ne coïncident pas forcément avec le niveau en mathématiques des élèves. Ainsi, certains élèves pourtant très en difficulté en mathématiques parviennent à résoudre certains problèmes sur lesquels d'autres élèves habituellement plus en réussite bloquent ou à l'inverse, des élèves ayant de bonnes notes en mathématiques rechignent à rentrer dans la résolution de problèmes. Du point de vue des enseignants, on retrouve aussi une certaine dichotomie entre militantisme affiché et litanie de difficultés insurmontables. Outre la perpétuelle question du temps, les enseignants sont souvent démunis, ne sachant pas comment aider ni trop ni trop peu les élèves durant leur recherche, ou comment organiser et gérer les mises en commun à la suite de la recherche des élèves d'autant plus si les productions présentent des écarts significatifs, entre autres.

Notre travail de thèse part de ces différents constats qui remontent du terrain. Il s'inscrit dans le cadre d'un projet FNS[1] qui met en lien différents travaux des membres de l'équipe de Didactique des Mathématiques à Genève (DiMaGe) afin de mieux comprendre ce que font et apprennent les élèves lorsque la résolution de problèmes est soit le moyen principal d'enseignement sur des thèmes mathématiques précis, soit quand elle constitue elle-même l'objet d'enseignement. Le parti pris fort qui caractérise ce projet est de se centrer sur les élèves.

Dans ce contexte, les questions qui guident le début de notre réflexion sont les suivantes : Comment les élèves avancent-ils dans leur recherche ? Comment s'élabore leur raisonnement ? Comment repèrent-ils et corrigent-ils leurs erreurs ? Quel(s) rôle(s) la gestion des erreurs joue-t-elle dans le processus de recherche ? Qu'est-ce qui fait que certains élèves réussissent et d'autres échouent ? Un des objectifs principaux de notre travail est donc de chercher à mettre à

[1] Ce projet s'intitule : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes ». Co-requérants Jean-Luc Dorier et Sylvie Coppé, Subside n° 100019_173105 /1.

jour les démarches des élèves en résolution de problèmes et de tenter de les caractériser, voire d'en dégager des catégories.

A plus long terme, les résultats produits pourraient déboucher sur l'élaboration d'outils d'aide aux élèves durant leur travail de recherche, et ainsi permettre aux enseignants d'intégrer plus facilement la résolution de problèmes dans leur enseignement.

Nous avons fait le choix d'axer notre travail sur la résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'essayer de couvrir les trois cycles de la scolarité obligatoire dans le canton de Genève (de la 1 e primaire à la 11e du cycle d'orientation).

Dans la présentation de ce canevas, nous commençons par faire un état de la question. Puis, nous présentons les cadres théoriques qui nous permettent de spécifier nos différentes questions de recherche et les éléments d'ordre méthodologique que nous envisageons de mettre en œuvre pour pouvoir y répondre.

2 ETAT DE LA QUESTION

Les recherches qui concernent la résolution de problèmes comme un objet d'enseignement se sont principalement attachées à développer des ingénieries et à étudier les pratiques des enseignants. De façon générale toutefois, ces travaux semblent admettre comme présupposé les bienfaits évidents de la résolution de problèmes pour l'apprentissage des élèves. Une des raisons est que l'activité des élèves semble se rapprocher du « vrai » travail mathématique. De fait, très peu de travaux interrogent les apports de la résolution de problèmes du point de vue des apprentissages des élèves. Il en est de même des prescriptions institutionnelles.

2.1 La résolution de problèmes comme objet d'apprentissage

2.1.1 Cadrage institutionnel

Les moyens d'enseignement romands (MER) de mathématiques sont constitués d'un recueil de problèmes permettant d'aborder l'ensemble des notions prescrites par le PER, et, pour une part plus restreinte, de problèmes pour chercher, donc de problèmes envisagés comme un objet d'enseignement à part entière. Les nouveaux moyens pour l'école primaire, dont la parution a commencé en septembre 2018, présentent deux nouveautés. D'une part, on y trouve une entrée « Recherche et stratégies » dès la première année, à l'image de ce qui avait été introduit avec les moyens 9-10-11 parus entre 2011 et 2013. Elle vise « à développer, chez l'élève, des stratégies de recherche, telles que la démarche scientifique, l'étude exhaustive de cas, les essais successifs » (CIIP, 2018b, p. 8). D'autre part, une nouvelle partie d'aide à la résolution de problèmes voit le jour pour les élèves à partir de la 3P. Elle « postule la capacité des élèves à acquérir des compétences dans la résolution de problèmes, en s'appuyant notamment sur la démarche réflexive » (p. 9). L'institution propose ainsi différents outils qui devraient aider les enseignants du primaire à faire apprendre à leurs élèves, à résoudre des problèmes, et ce, dès le plus jeune âge.

Dans le canton de Genève, cet objectif est également affirmé au niveau du cycle d'orientation. Il est proposé en 10e et 11e année de la section Littéraire-Scientifique (LS) pour les élèves en section S une période hebdomadaire de *Démarches Mathématiques et Scientifiques* (DMS). L'objectif est de travailler spécifiquement ces démarches : « le cours est centré sur l'étude de la démarche mathématique et vise au développement des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes mathématiques » (DIP, 2017).

Ces documents officiels mettent en avant la résolution de problèmes dans sa dimension objet d'enseignement et d'apprentissage. Ils postulent que résoudre des problèmes s'apprend, en résolvant des problèmes, et soutiennent que c'est ainsi que l'on fait de bonnes mathématiques. Nous allons voir que, du point de vue de la recherche, la question des apports en termes d'apprentissage ou d'identification de savoirs en résolution de problèmes n'est pas encore réglée.

2.1.2 Quels apprentissages/savoirs en résolution de problèmes ?

Dans le champ de la didactique des mathématiques, la résolution de problèmes est rattachée à différentes approches comme les problèmes ouverts (Arsac, Germain, & Mante, 1991), les situations de recherche pour la classe, (Grenier & Payan, 2002), le débat scientifique (Legrand & ADIREM, 2003), MATh-En-JEANS (Audin & Duchet, 1991), etc. Ces différents dispositifs s'appuient tous sur des hypothèses voisines : mettre en œuvre de manière adaptée un dispositif, dont certaines caractéristiques se veulent proches du travail des chercheurs en mathématiques, est bénéfique pour les apprentissages mathématiques des élèves. Sur la base de ces présupposés, ces recherches se sont essentiellement concentrées sur l'ingénierie de tels dispositifs et les conditions de mise en place par les enseignants dans les classes, mais peu sur les apports effectifs aux élèves. Par exemple, lorsque Arsac et Mante (2007) évoquent les effets de la pratique du problème ouvert sur les élèves, ils affirment : « Précisons tout de suite que ce qui suit est subjectif dans la mesure où ce sont des impressions qui ne s'appuient pas sur un travail d'observation systématique d'élèves. » (p. 61).

Or, justement, dans les MER, la référence à la résolution de problèmes est essentiellement celle des « problèmes ouverts » quel que soit le cycle. Ils sont présentés comme ayant pour objectifs d'apprendre la démarche scientifique (essayer, conjecturer, tester, prouver) et les règles du débat. A ce sujet, Hersant (2010a) pointe un paradoxe :

> La démarche scientifique est désignée comme un objectif d'apprentissage en mathématiques mais il n'y a pas d'explicitation des savoirs mathématiques précis en jeu dans cette démarche puisque le quadruplet - essayer, conjecturer, tester, prouver - qui définit la démarche ne peut être considéré comme un savoir mathématique (p. 19).

Dans sa critique, Hersant met en avant le flou qui accompagne les objectifs d'apprentissage qui sont ainsi difficiles à isoler et à expliciter, ainsi que l'absence d'identification des savoirs mathématiques en jeu dans la démarche scientifique. Concernant le premier point, Houdement (2009) avance quatre objectifs d'apprentissage pour les activités de type « problèmes pour chercher » (comme ils étaient appelés dans les programmes scolaires français de l'époque) :

- le réinvestissement de savoirs mathématiques,
- l'apprentissage des modes de raisonnement,
- l'apprentissage des modes de validation,
- l'apprentissage de la modélisation.

Ces potentialités d'apprentissages sont théoriques dans la mesure où elles ont été identifiées à partir de l'analyse d'une liste de problèmes extraits d'ouvrages pédagogiques de fin de primaire.

Concernant la deuxième partie de sa critique, Hersant (2010a) formule des propositions de savoirs à travailler qui concernent :

- la place de l'expérience,
- le positionnement en plausible, possible, pas possible
- l'établissement du vrai et du faux en mathématiques.

Le terme « savoirs » est utilisé pour qualifier « ces connaissances associées à la pratique mathématique et à la façon d'établir le vrai en mathématiques » (p. 38). Elle indique à ce sujet que « les savoirs ne sont pas forcément des notions mathématiques ou des théorèmes étudiés classiquement à l'école obligatoire » et précise que « ce point de vue ne fait peut-être pas consensus, cela demande peut-être d'être débattu» (Ibid). Ces précautions montrent donc que dégager des savoirs généraux relatifs à la résolution de problèmes reste encore une question non résolue.

Cependant, certaines recherches nous éclairent sur ce que semblent faire les élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes.

2.1.3 Activité des élèves en résolution de problèmes

Les travaux de Julo (1995, 2002) font référence en didactique des mathématiques pour l'activité de résolution de problèmes du point de vue de l'élève. Selon lui, lorsque les élèves résolvent des problèmes, ils mettent en œuvre des processus spécifiques avec un versant opératoire et un versant représentationnel. Julo émet l'hypothèse que ce versant représentationnel est lié aux *schémas de problèmes* (p. 35) dont il distingue trois sortes :

- Les *schémas de type « cas »* (p. 36): à l'image du joueur d'échec qui a en mémoire de nombreuses configurations de jeu qui lui permettent de déployer une stratégie adaptée, les élèves se doteraient d'une bibliothèque de problèmes dont certains occuperaient des places particulières vis-à-vis de certains concepts mathématiques ;
- Les *schémas de type « regroupements »* (p. 36): ces regroupements peuvent se faire sur des traits de surface (par exemple : les habillages des problèmes) ou sur des aspects plus structurels, donc plus abstraits ;
- Les *schémas de type « catégories abstraites »* (p. 37): ils correspondent aux structures plus profondes qui ont été identifiées pour certains problèmes (par exemple : les problèmes additifs), mais aussi aux outils de modélisation ou à des procédures de résolution.

Julo s'appuie sur une autre hypothèse : « les connaissances qui interviendraient de manière décisive dans l'activité de représentation sont les schémas de problèmes » (p. 42). Et inversement, ce serait la résolution de problèmes qui permettrait de développer des représentations qui elles-mêmes s'organiseraient en schémas de problèmes. C'est pourquoi il suggère d'aider les élèves à se représenter les problèmes (plutôt que les aider à les résoudre) afin qu'ils puissent avoir une véritable activité mathématique c'est-à-dire une démarche d'invention. Il propose même une démarche : la *multiprésentation* (p. 45).

Si ces travaux sont riches, ils présentent toutefois certaines limites. D'une part, la partie expérimentale s'appuie sur des problèmes liés à une seule notion mathématique (la proportionnalité). La question du transfert de ces résultats aux problèmes pour apprendre à chercher reste donc posée. D'autre part, les différentes hypothèses qu'il formule et les processus qu'il explicite n'ont pas donné lieu à des travaux expérimentaux qui auraient permis de les valider ou de les consolider pour en apprendre plus au niveau des démarches de recherche mises en œuvre effectivement par les élèves. Ceci étant, la place importante qu'occupent les essais, les erreurs, et d'une manière plus globale les stratégies heuristiques dans la phase de recherche est une piste bien documentée qu'il nous semble intéressant de poursuivre.

2.2 Essais, erreurs, stratégies heuristiques

Dans la résolution de problèmes, l'erreur et sa gestion sont les bases d'une stratégie souvent appelée « essais-erreurs ». Il faut remonter au début du XXe siècle pour retrouver les origines de cette stratégie qui, au départ, était plutôt une forme d'apprentissage. Elle est illustrée entre autres par l'expérience du chat dans la boîte (Thorndike, 1898). Si cette méthode explique certaines acquisitions, elle est cependant l'objet de critiques. En particulier, elle ne tient pas compte de la compréhension du sujet, qui ne serait pas un sujet intelligent, qui comprend. Ceci constitue un obstacle si on cherche à faire le transfert à l'homme. Peut-on parler vraiment d'apprentissage s'il n'y a pas de lien explicite effectué par le sujet entre son comportement et le résultat obtenu ?

De son côté, Freinet (1965) identifie une forme d'apprentissage, pour des élèves du primaire, qu'il nomme « tâtonnement expérimental ». La principale différence avec la méthode « essais-erreurs » au sens béhavioriste est que ce n'est plus le hasard qui guide, il y a un processus de régulation mis en œuvre par l'individu apprenant qui émet une hypothèse qui va être testée. L'utilisation de ce feedback lui permet alors de valider ou de rejeter l'hypothèse.

Dans le domaine mathématique, Pólya (1989) puis Lakatos (1984) font, quant à eux, référence au rôle des « essais-erreurs » comme une phase de la découverte. Dans son livre, Lakatos met en scène des élèves imaginaires (particulièrement doués !) et un maître qui échangent et cherchent à savoir comment émerge une 'conjecture naïve'[2] au sujet de la formule d'Euler. Un des élèves affirme qu'elle est obtenue par induction, que ce sont des cas particuliers qui l'ont suggérée dans un premier temps, puis que d'autres cas l'ont confirmée. Le maître pense au contraire qu'une conjecture naïve n'est pas une conjecture inductive. Elle est obtenue après une phase d'essais et d'erreurs c'est-à-dire « par une suite de conjectures et de réfutations » (p. 94).

Au niveau scolaire, cette stratégie, appelée « trial-and-error » ou « guess and check » dans la littérature internationale, est une des stratégies heuristiques les plus documentées. Le terme d'heuristique est à prendre dans le sens donné par Verschaffel et al. (1999), c'est-à-dire des stratégies de résolution souvent informelles. Ces auteurs suggèrent que lorsque des élèves sont confrontés à des problèmes complexes et peu familiers, nombreux sont ceux qui n'appliquent pas de manière spontanée des stratégies heuristiques utiles telles que faire un croquis ou un dessin du problème, décomposer le problème en parties, ou deviner et vérifier.

De son côté, Schoenfeld (1985) s'intéresse aux stratégies de recherche mises en œuvre par des étudiants et montre que la complexité et la subtilité de ces stratégies de recherche sont fortement sous-estimées. Un premier argument est que la plupart de ces stratégies de recherche sont définies de manière très générale, voire trop, pour que cette définition puisse servir de guide dans la mise en œuvre de la stratégie. De plus, Schoenfeld avance que ce qui peut apparaître comme une stratégie est plutôt une collection de sous-stratégies plus ou moins liées. De fait,

[2] Pour Lakatos, une 'conjecture naïve' est l'énoncé d'une conjecture qu'il faut améliorer et même parfaire pour qu'elle puisse devenir un authentique théorème. (p. 52)

ces stratégies heuristiques sont difficiles à utiliser parce qu'elles doivent rentrer en jeu quand l'élève n'a pas d'idée sur ce qu'il doit faire après.

Le travail de Schoenfeld aborde la question des stratégies heuristiques à un niveau global. En ce qui nous concerne, pour des raisons de faisabilité, nous avons choisi de concentrer notre travail sur la démarche par essais-erreurs, non seulement car elle est bien documentée, mais aussi parce que c'est une des stratégies heuristiques que l'on retrouve en tant que telle au niveau institutionnel. A titre d'exemple, citons une unité des évaluations internationales PISA 2012 libérée avec codification (OECD, 2013, p. 41). Elle révèle qu'une bonne réponse est codée différemment selon qu'elle est obtenue par une résolution algébrique (code 21), arithmétique (code 22), par une « méthode d'essais-erreurs (code 23) » (p. 42) ou sans démarche de travail (code 24). Cependant, l'ordre utilisé dans le codage nous amène à penser que la démarche par essais-erreurs est considérée comme de moins bonne qualité qu'une démarche plus rigoureuse de type algébrique ou arithmétique.

A un autre niveau toutefois, certains éléments extraits des documents officiels de Suisse romande montrent un jugement plus positif. En effet, le PER évoque « une attitude de recherche par essai-erreur, généralisation, conjecture et validation » (CIIP, 2010) et le document *Recherche et Stratégies* (CIIP, 2018a) paru récemment donne une place légitime à cette stratégie sous le nom d' « ajustements d'essais successifs », « tâtonnement réfléchi » ou « essai-erreur ».

Cette connotation positive se retrouve dans certaines recherches. Ainsi Elia *et al*. (2009) montrent que la stratégie d'essais-erreurs est la plus efficace des différentes stratégies heuristiques pour résoudre des problèmes non-routiniers. Selon ces auteurs, cette stratégie est facile à utiliser, même si elle n'a pas été enseignée, car elle ne nécessite pas un haut niveau cognitif. De plus, comme elle est largement utilisée dans des situations de la vie courante, les élèves deviennent assez experts. Paradoxalement, Vlassis *et al*. (2014) notent que « les heuristiques (dessin ou tâtonnement) sont les démarches les moins plébiscitées par les enseignants tous niveaux confondus. Le tâtonnement, en particulier, est l'heuristique la moins appréciée. » (p. 168).

Stacey (1991) précise que pour ce qui concerne les problèmes simples, les essai-erreurs sont une stratégie intuitive utilisable par tous. Par contre, seuls les élèves qui ont suivi un enseignement spécifique de cette stratégie se montrent plus à même de l'utiliser avec succès pour résoudre un problème plus complexe. En particulier, ils manifestent davantage la volonté d'explorer le problème, plutôt que d'essayer de manipuler les nombres donnés dans la question pour obtenir une réponse rapide.

Nous retenons deux idées principales. Premièrement, cette stratégie peut recouvrir différentes fonctions. Elle peut permettre de résoudre directement certains problèmes. Mais elle peut aussi être utilisée de manière informelle pour explorer un problème, mieux le comprendre pour ensuite trouver un raisonnement à mettre en œuvre. Enfin, elle peut constituer également une étape d'une démarche plus large (appelée expérimentale ou scientifique selon les auteurs). Cette étape va permettre d'aboutir à la formulation d'une conjecture qu'il s'agira ensuite de tester voire de prouver.

Deuxièmement, ces différentes études qui ont porté spécifiquement sur la démarche par essais-erreurs nous éclairent sur l'utilisation ou non de cette stratégie par les élèves et sur l'efficacité au regard d'autres stratégies heuristiques. Cependant, elles n'apportent pas d'éléments sur la démarche en tant que telle c'est-à-dire sur comment les élèves avancent dans leur résolution et comment ils contrôlent leurs essais.

2.3 Synthèse

Notre recherche s'intéresse à la résolution de problèmes dans sa dimension objet d'enseignement et d'apprentissage. L'étude des effets de la résolution de problèmes sur les élèves est une question encore peu abordée en tant que telle par la recherche, même si certains auteurs ont dégagé des savoirs généraux relatifs à la résolution de problèmes. Les résultats qui concernent les processus mis en œuvre par les élèves pour résoudre des problèmes s'appuient sur de nombreuses hypothèses qui n'ont pas toujours été validées par suffisamment d'expérimentations. Dans cet ensemble encore à construire, nous choisissons de nous intéresser plus particulièrement à la résolution de problèmes sous l'angle des essais, des erreurs et de l'heuristique de recherche des essais-erreurs.

Nous allons analyser cette démarche en nous interrogeant sur les interactions des élèves avec le milieu et en particulier aux rétroactions, qui vont permettre aux élèves de gérer leurs erreurs et leurs ajustements. Nous nous appuierons donc sur les outils théoriques de la théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau (1998), en particulier, le duo milieu-contrat didactique (Perrin-Glorian & Hersant, 2003).

Par ailleurs, du point de vue méthodologique, il est clair que la difficulté ici consiste à pouvoir avoir accès au travail de recherche des élèves. Comment faire pour pouvoir analyser le travail effectif des élèves lorsqu'ils résolvent des problèmes ? Nous devons recueillir des données au plus proche de ce que l'élève fait. C'est pourquoi nous avons fait le choix d'utiliser des caméras embarquées sur la tête des élèves lors de leur travail individuel ou de groupe. Cela nous permet d'avoir accès à des données vidéos au plus proche de la vision de l'élève et donc englobant une dimension subjective. Pour pouvoir rendre compte de cette dimension des observations, nous avons été amené à introduire de façon complémentaire aux outils de la TSD, le cadre de la structure de l'attention de Mason (2008).

Nous allons à présent expliciter ces différents points et comment ils nous permettent de préciser nos questions, de les mettre à l'épreuve des analyses d'observation.

3 CADRE THÉORIQUE

Notre objectif est de caractériser le travail de recherche des élèves. Pour cela, pour chaque problème ayant fait l'objet d'une observation, nous mènerons une analyse *a priori* que nous confronterons à une analyse *a posteriori.* Comme nous l'avons dit plus haut, nous nous appuierons ici classiquement, dans le cadre de la TSD, sur les concepts de milieu et de contrat didactique. De plus, le cadre de la résolution de problèmes nous conduit à enrichir notre analyse *a priori* d'un outil spécifique, permettant de caractériser chaque problème en fonction de différents potentiels selon une méthodologie empruntée à Georget (2009). Enfin, nous expliciterons en quoi le cadre théorique de la structure de l'attention de Mason (2008) nous permet d'exploiter une dimension nouvelle liée aux particularités du recueil de données avec une caméra embarquée.

3.1 La dualité contrat didactique / milieu dans les démarches de recherche des élèves

Nous ne reprenons pas ici les travaux fondateurs sur le concept de milieu de Brousseau (1998) ou de Margolinas (1995), pour nous concentrer sur les aspects propres à notre recherche. Dans notre projet de caractériser le travail des élèves, ce qui nous intéresse de façon primordiale touche à la dimension du milieu en tant que vecteur d'une bonne dévolution du problème. A ce sujet, Hersant (2010b) explicite trois propriétés favorisantes du milieu. Le « caractère rétroactif » (p. 43) désigne sa capacité à fournir des rétroactions aux élèves qui leur donnent la possibilité de valider ou d'invalider leur travail. La « propriété proactive » (Ibid) correspond au fait que les élèves disposent des connaissances qui sont nécessaires pour résoudre le problème, c'est-à-dire qu'ils sont en mesure d'agir dans cette situation. Enfin, le « caractère contraignant » (p. 44) du milieu désigne sa capacité à favoriser l'apparition de la connaissance souhaitée ; les contraintes qui pèsent alors sur l'activité des élèves évitent une dispersion des connaissances susceptibles d'être mises en jeu.

Toutefois, même en présence d'un milieu ayant une bonne propriété proactive, Perrin-Glorian (1998 ; 1999) souligne que certains élèves n'ont pas forcément un rapport personnel idoine aux connaissances ou aux savoirs institutionnels placés dans le milieu, qui peuvent du coup ne pas entraîner les rétroactions prévues par l'enseignant. L'apprentissage prévu par la situation ne pourra pas, dans ce cas, avoir lieu. Pour permettre de prendre en compte cette dimension dans l'analyse, cette auteure propose un raffinement du concept de milieu. Elle définit le *milieu cognitif* comme « les connaissances auxquelles le sujet a besoin de faire appel de lui-même » (1999 ; p. 294). Elle le distingue de la *partie matérielle du milieu* qui correspond aux « contraintes objectives ou des connaissances qui sont fournies avec le texte du problème » (Ibid). Enfin, une dernière composante dite *sociale* est constituée des autres acteurs susceptibles de prendre part, d'une manière ou d'une autre, à la résolution du problème.

De plus, Perrin-Glorian discerne le *milieu cognitif potentiel* et le *milieu cognitif activé*. Le premier correspond aux connaissances qui sont disponibles chez l'élève et qu'il est en capacité de mobiliser seul pour résoudre un problème. Le second correspond aux connaissances qu'il a effectivement activées au cours de sa résolution. Ce *milieu cognitif activé* nous semble être un outil intéressant lors de l'analyse *a posteriori* du travail des élèves car il nous offre une manière de caractériser les différences observées entre élèves en termes de connaissances effectivement mobilisées.

Dans le cas où la dévolution ne s'opère pas de manière convenable, l'enseignant peut être amené à renégocier le contrat didactique avec le ou les élèves concernés. Pour analyser ces négociations, nous utiliserons les développements proposés par Hersant (2010b). Celle-ci décline en effet le contrat didactique en quatre composantes interdépendantes :

- Le *domaine mathématique* : placer un problème dans un certain domaine (arithmétique, algèbre,…) permet d'accéder de manière privilégiée à certaines techniques propres au domaine considéré au détriment d'autres ;

- Le *statut didactique du savoir* : il désigne le degré de familiarité de l'élève vis-à-vis du savoir en jeu. Dans notre recherche, il s'agira d'un savoir ancien ou éventuellement d'un savoir institutionnalisé à consolider ;

- Le *partage de responsabilités* : il correspond à la charge laissée à l'élève et celle restant au professeur du point de vue du savoir. Notre objectif est que l'élève ait une responsabilité maximale. Toutefois, nous avons bien conscience que sa part de responsabilité sera différente selon que l'élève travaille seul ou en groupe ;

- Les *caractéristiques mésogénétiques de la situation didactique* : elles correspondent aux caractéristiques du milieu en termes de potentialités adidactiques. Hersant propose d'inclure cette dimension comme une composante du contrat didactique car elle précise que même si une situation présente un réel potentiel adidactique, l'enseignant peut décider de ne pas l'exploiter.

Analyser les négociations de contrat à la lumière de ces composantes doit nous permettre d'identifier des besoins exprimés des élèves, de caractériser les aides apportées par l'enseignant et d'évaluer leurs effets.

Afin de pouvoir utiliser au mieux les outils que nous venons d'expliciter, il nous faut établir les moyens de mesurer le potentiel qu'offre le problème soumis aux élèves en partant de critères qui mettent à distance les partis pris idéologiques qui, nous l'avons vu (voir section 2.1.2), sous-tendent de nombreuses recherches.

3.2 Une caractérisation des problèmes

Comme nous l'avons évoqué précédemment il existe de nombreux dispositifs de recherche de problèmes. Georget (2009) propose de les regrouper sous l'appellation d'*Activités de Recherche et de Preuve entre Pairs (RPP)*. Cette expression désigne « les activités dont l'objectif principal est d'entraîner les élèves à la démarche de recherche en mathématiques et aux échanges entre pairs à la manière des mathématiciens professionnels » (p. 77).

Il propose alors de caractériser chaque activité RPP à l'aide de cinq *potentiels* (pp. 78-80) :

- Le *potentiel de recherche* : il représente les différents éléments qui vont faire que l'élève va pouvoir développer sa capacité à chercher un nouveau problème ;
- Le *potentiel de résistance* : il incarne la nécessaire résistance que doivent proposer les problèmes pour permettre une véritable recherche. Cependant, cette résistance peut ne pas être très bien équilibrée comme dans l'exemple des problèmes à astuces où elle est très forte au départ et que rien ne vient l'atténuer. Ainsi, il est intéressant d'affiner ce potentiel en regardant comment la résistance évolue au cours de la recherche du problème. Georget définit pour cela le potentiel de résistance dynamique ;
- Le *potentiel de résistance dynamique* : un problème présente un bon potentiel de résistance dynamique si, tout au long de sa recherche, l'élève bénéficie de rétroactions qu'il peut exploiter pour aller vers la solution, ou qui le soutiennent dans son effort;
- Le *potentiel de débat* : il incarne toutes les potentialités susceptibles de favoriser des débats de nature mathématique ;
- Le *potentiel didactique* : il correspond à tous les éléments que l'élève va pouvoir apprendre par la résolution de ce problème.

Dans notre travail, nous allons tenter d'utiliser cette caractérisation selon cinq curseurs pour donner une sorte de « carte d'identité » des différents problèmes dont nous allons analyser la réalisation en classe. Cela nous permettra de pouvoir mener notre analyse en terme de milieu et de contrat didactique de façon plus pertinente.

3.3 La structure de l'attention

Comme nous l'avons dit plus haut, pour recueillir des données qui permettent d'observer au plus près le travail des élèves, nous avons équipé certains élèves d'une caméra embarquée fixée sur leur tête. Lors de premières analyses, nous avons réalisé que nous disposions d'une dimension d'observation que nous ne pouvions avoir avec une caméra fixe. En effet, nous avons ainsi accès à toute une dynamique de mouvements du regard des élèves avec un point de vue subjectif sur le travail dans l'activité. Or, nos outils d'analyse issus de la TSD, ne nous ont pas permis de rendre compte de cette richesse. Aussi, nous sommes-nous tourné vers le cadre théorique de la structure de l'attention pour tenter d'enrichir nos analyses d'une nouvelle dimension soulignée par Boavida *et al*. (2012). Ces auteurs ont mis en évidence le lien entre le raisonnement mathématique et les formes particulières de l'attention notamment en résolution de problèmes.

Mason (2008) définit l'*attention* comme la manifestation de la volonté, de l'intention. L'attention ne peut pas être observée directement mais nous pouvons inférer des éléments sur l'attention portée par un sujet à travers l'observation de ses actions. Il affirme que le raisonnement mathématique demande l'activation de formes particulières de l'attention. Notamment, cet auteur s'intéresse à l'analyse des éléments sur lesquels porte le focus de l'attention d'un sujet au sein de la résolution de problèmes de mathématiques. Pour lui, il ne s'agit pas seulement d'identifier sur quoi porte l'attention d'un sujet mais de chercher *comment* il la porte. Pour cela, Mason (2008) décline cinq formes différentes de l'attention : *regarder l'ensemble* (« gazing at the whole ») ; *discerner les détails* (« discerning details ») ; *reconnaître des relations* (« recognising relationships ») ; *percevoir des propriétés* (« perceiving properties ») ; *raisonner sur la base de propriétés spécifiques* (« reasoning on the basis of specified properties »).

- Regarder l'ensemble revient à « observer » dans la globalité sans se focaliser sur quelque chose en particulier ;
- Discerner les détails se réfère à l'acte de distinguer des détails qui peuvent être considérés et traités comme des entités à part entière ;
- Reconnaître des relations correspond à la recherche et à l'identification de relations à partir des détails discernés. Ces relations sont caractérisées par le fait d'être ancrées dans le particulier ;
- Percevoir des propriétés : lorsqu'un sujet est conscient d'une possible relation et qu'il cherche des éléments pour la renforcer/confirmer, il perçoit une propriété. Les relations particulières sont considérées, donc, comme des exemples de propriétés générales ; autrement dit, les relations particulières sont des instanciations de propriétés ;
- Raisonner sur la base de propriétés spécifiques se réfère à l'utilisation des axiomes, des théorèmes, des définitions ou des propriétés perçues pour la construction du raisonnement mathématique.

Présentées et illustrées ainsi, on peut imaginer que les différentes formes de l'attention interviennent selon un ordre stable. Mason considère au contraire qu'elles se succèdent rapidement et sans ordre particulier.

4 QUESTIONS DE RECHERCHE

Dans notre tentative de caractérisation des démarches de recherche des élèves, nous faisons l'hypothèse que le rôle des rétroactions que l'élève reçoit du milieu est central en particulier pour expliquer les différences entre les élèves qui réussissent et ceux qui ne réussissent pas. C'est ce qui nous conduit à énoncer les questions suivantes :

- Quels sont les éléments, pertinents pour l'élève, qui vont enrichir le milieu : les connaissances des élèves (et si oui lesquelles ?), les références à d'autres problèmes, les expériences passées en résolution de problèmes, la nature des essais, leur interprétation, les interventions de l'enseignant ?
- Comment les élèves repèrent-ils et interprètent-ils les rétroactions du milieu ? En particulier, comment se rendent-ils compte de leurs erreurs, de l'insuffisance de leurs premiers essais ? Comment exploitent-ils ces rétroactions ? Que font-ils de ces informations pour mettre en place de nouveaux essais ?
- Les questions des élèves et les interventions de l'enseignant portent-elles sur les réponses, les stratégies ou les connaissances des élèves ? Peut-on établir des critères en termes d'efficacité ?
- Quelles formes de l'attention sont mobilisées par les élèves au cours de leur recherche ? Observe-t-on des différences significatives entre élèves ? Peut-on établir un lien entre les formes de l'attention mobilisées et la réussite ou l'échec à un problème ?

5 MÉTHODOLOGIE

5.1 Recueil de données

Nous avons évoqué plus haut qu'une difficulté importante de notre recherche est l'accès au travail des élèves. Pour mener des analyses pertinentes, nous devons recueillir des données qui permettent d'observer les démarches des élèves avec un point de vue qui s'approche au maximum de celui de l'élève. Nous avons ainsi fait le choix de filmer avec une caméra embarquée fixée sur la tête des élèves. Selon Morieux (2016), les caractéristiques techniques de la caméra embarquée en font « un outil intéressant pour la capture d'image dans des conditions difficiles » (p. 128). Si ce mode de recueil de données est encore original en didactique des mathématiques, il est régulièrement utilisée en Éducation Physique et Sportive, où il permet des « prises de vue originales et l'accès à des images d'un grand intérêt didactique, pédagogique » (p. 68). Andrieu et Burel (2014) parlent de perception en *première personne* lorsque la caméra est embarquée sur le corps de l'acteur. Ils précisent qu'elle « fournit des informations supplémentaires par l'effet d'embarquement à même son corps dans la production d'images non volontairement filmées » (p. 51).

Dans le contexte scolaire qui nous occupe, la caméra embarquée doit nous permettre d'accéder à l'espace de travail de l'élève avec son propre point de vue. Nous pouvons ainsi voir :

- tout ce que l'élève pointe ou désigne ;
- des éléments de son champ de vision ;
- tous les gestes qu'il fait dans son champ de vision ;
- toutes les manipulations réalisées avec du matériel (auxquelles il est habituellement très difficile d'avoir accès, à moins d'observer finement un élève) ;
- tout ce qu'il écrit, même s'il efface ensuite.

Nous pouvons aussi enregistrer tout ce qu'il dit et tout ce qu'il entend. Ces différents ingrédients sont nécessaires pour inférer des éléments sur la manière dont les élèves portent leur attention.

Cet enregistrement en première personne nous livre aussi la chronologie complète et réelle des différentes étapes qui constituent la recherche de l'élève. Nous devrions ainsi avoir accès au « travail privé » (Coppé, 1993) de l'élève, entre autres à tous les essais et toutes les erreurs produits par l'élève et non pas seulement aux « traces publiques » (Ibid) de son travail qu'il veut bien montrer.

Une différence importante avec un mode de recueil plus classique[3] réside dans le fait que ce n'est pas le chercheur qui contrôle la caméra. Nous avons accès au champ de vision de l'élève sans toutefois savoir ce qu'il regarde précisément (sauf peut-être dans le cas où il fait des gestes de pointage).

L'enseignant quant à lui sera équipé d'un micro et ses interventions auprès des élèves seront filmées par une caméra, contrôlée par le chercheur, qui le suivra dans ses déplacements.

Les données vidéos (transcrites) seront traitées et analysées à l'aide du logiciel Transana.

En complément de ces données audiovisuelles, nous pensons recueillir des données écrites. Pour cela, nous conserverons une copie des énoncés sur lesquels ont travaillé les élèves et de tous les supports utilisés par les élèves au cours de leur travail : brouillons, production finale.

5.2 Terrain d'observation

Nous prévoyons de mener cette recherche sur les trois cycles de la scolarité obligatoire dans le canton de Genève. Nous faisons l'hypothèse que varier les niveaux scolaires peut potentiellement favoriser l'apparition de démarches diverses. Nous souhaitons en outre tirer parti de la spécificité du contexte genevois en nous intéressant au cours de *Démarches Mathématiques et Scientifiques* développé en 10e LS pour les élèves du profil S. Nous projetons d'expérimenter trois problèmes pour chaque cycle de l'école obligatoire.

La première caractéristique de ces problèmes est que, pour les résoudre, il est nécessaire de mettre en œuvre une démarche par essais-erreurs seule ou intégrée dans une démarche expérimentale. Ces problèmes doivent présenter, à la fois, un bon potentiel de recherche et de résistance dynamique afin de laisser aux élèves la plus grande part de responsabilité possible au niveau de la résolution et de favoriser les rétroactions du milieu. Ils devront aussi assurer une certaine part de manipulation de manière à faciliter le recueil d'observables qui nous seront nécessaires pour inférer la manière dont les élèves portent leur attention.

Les modalités de travail que nous proposerons sont assez classiques et seront stables d'un problème à l'autre. Le travail commence par une recherche individuelle de quelques minutes. Ensuite, les élèves continuent leur recherche par groupe de deux, trois ou quatre selon les effectifs et les conditions matérielles. Nous veillerons à ce qu'un élève équipé de caméra soit présent dans chaque groupe constitué. Le travail en groupe a pour principal objectif de favoriser les verbalisations entre élèves qui sont des éléments précieux pour reconstituer les raisonnements produits par les élèves. Chaque groupe rédigera sa solution sur une feuille à part.

---

[3] Nous pensons à une caméra fixe sur pied ou dans les mains du chercheur.

Cela doit conduire les élèves à se mettre d'accord entre eux sur une solution et donc à argumenter en cas de désaccord. L'idée est aussi de centrer tous les élèves du groupe autour du même support écrit afin de capter un maximum d'observables et d'augmenter la qualité de l'enregistrement audio. Les élèves seront autorisés à écrire sur l'énoncé ou sur une feuille de brouillon dès la phase de recherche individuelle. Il sera demandé aux élèves de travailler avec un stylo qui ne s'efface pas pour garder une trace des différents éléments de leur recherche.

Nous limiterons la durée de chaque recherche à une période de quarante-cinq minutes afin de recueillir une quantité de données raisonnable.

Enfin, nous inviterons les enseignants à n'intervenir, dans la mesure du possible, qu'à la demande des élèves de manière à révéler leurs besoins.

6 CALENDRIER DE LA RECHERCHE

Septembre 2017- Décembre 2018	Premières explorations et rédaction du canevas
Janvier 2019- Janvier 2020	Recueil de données
Janvier 2019 – Septembre 2020	Analyse des données
Septembre 2020- Août 2021	Rédaction de la thèse

7 RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Andrieu, B., & Burel, N. (2014). La communication directe du corps vivant. Une émersiologie en première personne. *Hermès, La Revue*, *1*, 46-52.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

Arsac, G., & Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon: Scéren édition.

Audin, P., & Duchet, P. (1991). La recherche à l'école: Math. en. Jeans. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, *121*, 77-101.

Boavida, A. M., Oliveira, H., & Mason, J. (2012). Reasoning reasonably in mathematics. *Quadrante*, *21*, 165-195.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin. (2010). Commentaires généraux du domaine Mathématiques et Sciences de la nature (premier cycle). In *Plan d'études romand* (p. 5-11). Neuchâtel: CIIP. Consulté à l'adresse http://www.plandetudes.ch/documents/10273/36537/PER_print_MSN_CG.pdf

Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin. (2018a). Recherche et Stratégies de 1re à 8e. Consulté à l'adresse http://www.ciip-esper.ch/#/discipline/5/1/objectif/1000

Conférence intercantonale de l'instruction publique de la Suisse romande et du Tessin. (2018b). Mathématiques 1 - 4 Présentation de la collection. CIIP.

Coppé, S. (1993). *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de l'Université Claude Bernard. Lyon I.

Département de l'Instruction Publique, de la culture et du sport. (2017). Compléments cantonaux - Démarches mathématique et scientifiques (DMS) 10e-11e S.

Dorier, J.-L., & Garcia, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM the international journal on mathematics education*, *45*(6), 837-849.

Elia, I., Den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 605-618.

Freinet, C. (1965). *Le tâtonnement expérimental.* Ed. de l'Ecole moderne.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* (Didactique des mathématiques). Paris.

Grenier, D., & Payan, C. (2002). Situation de recherches « en classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand Guerrier & C. Tisseron (Éd.), *Actes du séminaire* *national de didactique des mathématiques* (p. 189-205).

Hersant, M. (2010a). *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*. Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches, Université de Nantes.

Hersant, M. (2010b). Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques: de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires. Note de synthèse HDR, Université de Nantes, Nantes.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *14*, 31-59.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques: un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Julo, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31-52.

Lakatos, I. (1984). *Preuves et réfutations.* (trad. Balacheff & Laborde). Paris: Hermann.

Legrand, M., & ADIREM. (2003). À la recherche d'une cohérence pour une véritable activité mathématique en classe. In *Faire des maths en classe ? Didactique et analyse de pratiques enseignantes*. Paris: INRP.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners. *The mathematics teacher educator as a developing professional*, 31-55.

Morieux, M. (2016). *Dispositifs technologiques en EPS et convergence numérique: quel corps dans une pédagogie augmentée depuis 1985?: Intégration des TIC (Technologies de l'Information et de la Communication) dans l'enseignement de l'EPS.* Université Sorbonne Paris Cité.

OECD. (2013). PISA 2012 Unités Libérées - Mathématiques. Consulté à l'adresse https://pisa.educa.ch/sites/default/files/20161124/exercices_mathematiques_2012_avec_codification.pdf

Perrin Glorian, M. J. (1999). Problèmes d'articulation de cadres théoriques ; l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(3), 279-321.

Perrin-Glorian, M. J. (1998). Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu: structuration du milieu pour le maître et pour l'élève. In R. Noirfalise (Éd.), *Actes de l'université d'été de la Rochelle.* (p. 17-38). IREM de Clermont-Ferrand.

Perrin-Glorian, M. J., & Hersant, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(2), 217-276.

Pólya, G. (1989). *Comment poser et résoudre un problème (Traduit de: How to solve it)*. Sceaux: J. Gabay.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press Inc.

Stacey, K. (1991). The effects on students' problem solving behaviour of long-term teaching through a problem solving approach. In F. Furinghetti (Éd.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, p. 278-285). Assisi: PME.

Thorndike, E. L. (1898). *Animal intelligence: An experimental study of the associative processes in animals.* Columbia.

Verschaffel, L., De Corte, E., Lasure, S., Van Vaerenbergh, G., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1999). Learning to Solve Mathematical Application Problems: A Design Experiment With Fifth Graders. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(3), 195-229.

Vlassis, J., Mancuso, G., & Poncelet, D. (2014). Le rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques: analyse des croyances d'enseignants du primaire. *Cahiers des Sciences de l'Education*, *36*, 143–175.