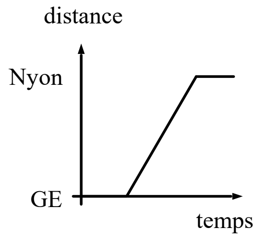
NOTION DE FONCTION

§ 1. INTRODUCTION

1. **Au cinéma** (*Cf.* fiche en annexe)

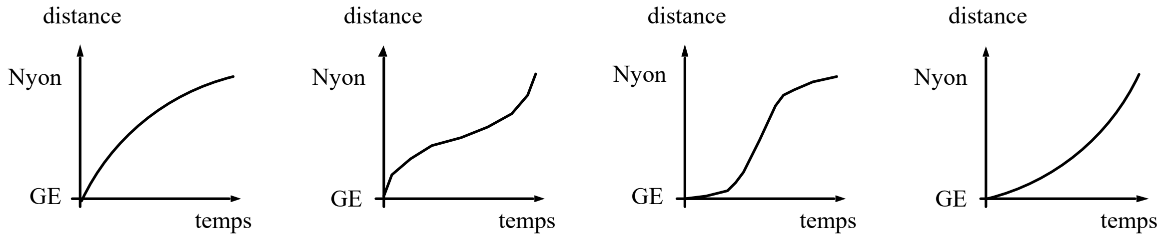
2. **En train**



La figure ci-contre décrit le trajet d'un train entre Genève et Nyon.

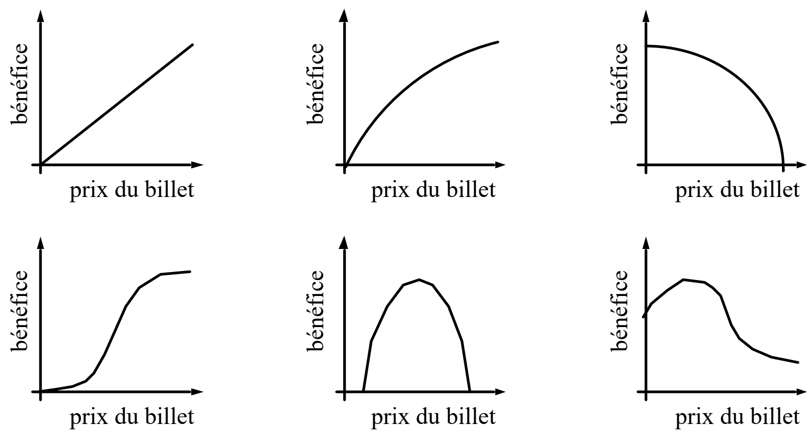
a) Expliquer pourquoi peu d'usagers du chemin de fer survivraient à un tel voyage si ce diagramme représentait le vrai mouvement du train.

b) Quel est celui des diagrammes ci-dessous qui est le plus proche de la réalité ? Justifier



3. **Au cinéma (2^{e} épisode)**

Le directeur du cinéma aimerait savoir quel impact aura un changement du prix du billet sur son bénéfice.
Quel est le graphique le plus vraisemblable ? Pourquoi ?
Si aucun des graphiques ne vous semble convenable, dessiner votre propre version !



4. **Les vases** (*Cf.* fiche en annexe)

Dans de nombreux problèmes, on s'intéresse à des relations entre des quantités qui varient.
Par exemple,

- le budget dépensé pour la publicité d'un produit et l'augmentation des ventes qui en résulte ;
- l'éloignement de l'écran et l'angle de vue qui en résulte ;
- la distance parcourue par un train et la durée de ce parcours ;
- le prix du ticket de cinéma et le bénéfice réalisé par le cinéma ;
- la taille d'une personne et son âge ;
- etc.

Les situations qui vont nous intéresser ici sont celles pour lesquelles **l'une des grandeurs variables dépend de l'autre**, et nous dirons que cette grandeur est **fonction** de l'autre.
Ainsi, l'angle de vue de l'écran de cinéma est fonction de l'éloignement de l'écran, même si d'autres paramètres entrent en ligne de compte (dimensions de l'écran, hauteur).
Nous appellerons donc fonction une relation entre deux grandeurs variables dont l'une dépend de l'autre. (Ceci n'est pas encore une définition mathématique !)

On peut donner une fonction de différentes manières :

1) *Un tableau de valeurs* :

Nous avons vu un premier exemple de tableau de valeurs dans l'activité « Au cinéma » où les deux grandeurs variables étaient la distance horizontale et l'angle de vision.

Voici un autre exemple de tableau de valeurs donnant la taille de Julie en fonction de son âge.

Âge (en années)	10	11	12	13	14	15	16	17
Taille (en cm)	140	143	147	153	160	166	169	171

Dans cet exemple, les variables jouent des rôles différents. À mesure que le temps a passé, Julie est devenue plus grande. La taille de Julie est donc dépendante du temps. On dira que la taille est la **variable dépendante**, alors que le temps est la **variable indépendante** : le temps continue de passer même si Julie arrête de grandir. La plupart des situations que nous aurons à traiter seront de ce type : l'une des variables est indépendante tandis que les valeurs de l'autre dépendent directement de la première.

2) *Un graphique* :

La convention graphique utilisée est alors la suivante : sur l'axe horizontal, on place la variable indépendante ; sur l'axe vertical, on place la variable dépendante.

De cette manière, en construisant le graphique de la taille de Julie en fonction de son âge, on voit vraiment se dérouler la croissance de Julie au cours du temps, puisque les points du graphique sont d'autant plus hauts que Julie est grande !

À titre d'exercice, essayer d'imaginer ce que pourrait être le graphique représentant la taille d'une personne en fonction de son âge, tout au long de sa vie. Quel problème risquerions-nous de rencontrer si nous voulions donner le tableau donnant l'âge de cette personne en fonction de sa taille ?

Remarque : dans certains cas, le choix de la variable indépendante est arbitraire. Par exemple, dans le cas d'un tableau donnant la taille et le poids de Julie, rien ne permet de choisir une des grandeurs comme variable indépendante plutôt que l'autre.

Activités

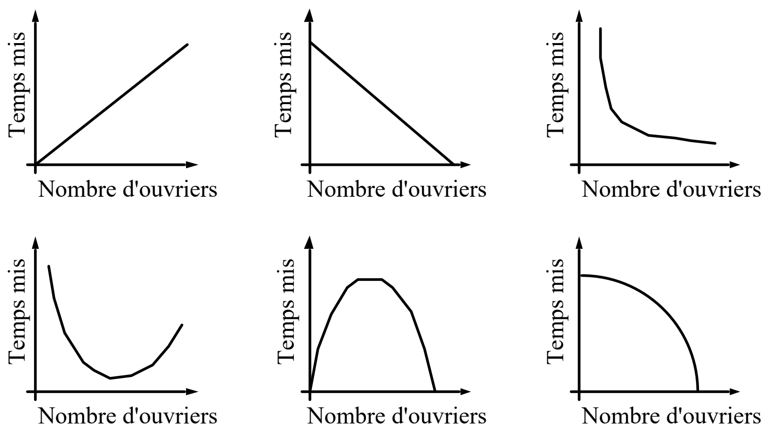
1. Un enfant débouche subitement dans la rue devant une voiture. Le conducteur pourra-t-il s'arrêter à temps ? Cela dépend bien sûr de sa vitesse, car la distance de freinage est fonction de la vitesse.

   Le tableau ci-dessous donne des distances de freinage à différentes vitesses, pour une route sèche et horizontale.

Vitesse (km/h)	0	20	40	60	80	100	120
Distance de freinage (m)	0	9	24	45	72	105	144

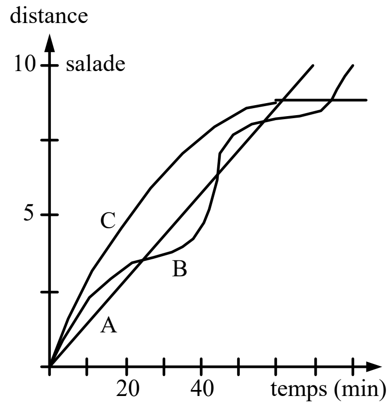
   a) Dans cette situation, quelle est la variable indépendante et quelle est la variable dépendante ?
   b) Représenter graphiquement cette fonction.
   c) Peut-on relier les points ? Pourquoi ?
   d) "La distance de freinage est proportionnelle à la vitesse." Vrai ou faux ?
   e) Estimer la distance de freinage d'une voiture roulant à 30 km/h, 50 km/h, 140 km/h, 200 km/h. Quelle est la précision de votre estimation dans chaque cas ?

2. Un groupe d'ouvriers municipaux doit effectuer une grande quantité de plantations. Parmi ces graphiques, quel est celui ou ceux qui modélisent le mieux la relation entre le nombre d'ouvriers et le temps nécessaire pour accomplir la tâche ?
   Expliquer votre choix.



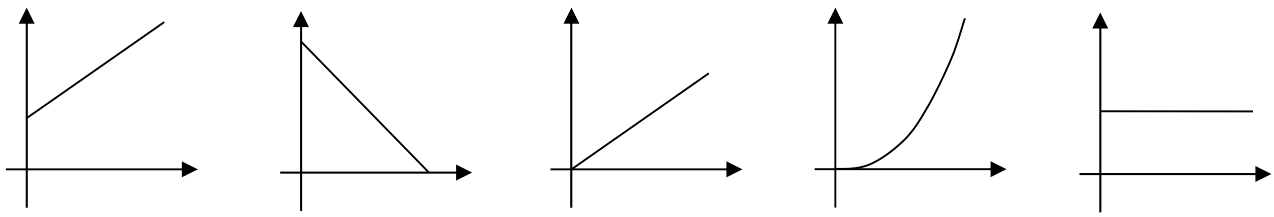
3. Examiner les vases de la première partie de la situation d'introduction.
   a) Après 1 minute et 30 secondes de remplissage, quels vases sont remplis à la moitié de leur contenance ?
   b) Après 1 minute et 30 secondes de remplissage, quels vases sont remplis à la moitié de leur hauteur ?

4. Trois escargots A, B et C rampent ventre à terre pour atteindre une salade située à 10 m du point de départ. Leurs trajets respectifs sont représentés ci-dessous.



   a) Après 20 minutes, on ouvre les paris.
      Sur quel escargot pariez-vous ?
   b) Quel escargot mangera en premier la salade ?
   c) Vrai ou faux ?
      1. L'escargot A est toujours devant B et C.
      2. L'escargot B zigzague pour atteindre la salade.
      3. Les escargots doivent monter pour atteindre la salade.
      4. C n'atteindra jamais la salade.
      5. A avance à vitesse constante.

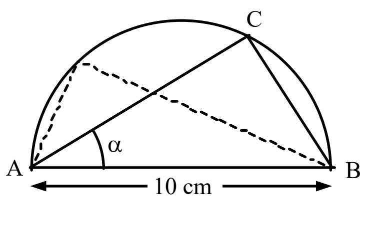
5. Voici les représentations graphiques de 5 fonctions.



   Trois d'entre elles correspondent à un fragment de texte ci-dessous.
   Retrouvez pour chaque fragment la représentation graphique qui convient en donnant deux arguments qui justifient votre choix.

   a) … Le rayon varie. L'aire du disque varie. …
   b) … Le nombre de kilomètres varie et le prix de la course de taxi varie. …
   c) … Le périmètre est constant. Les côtés du rectangle varient. …

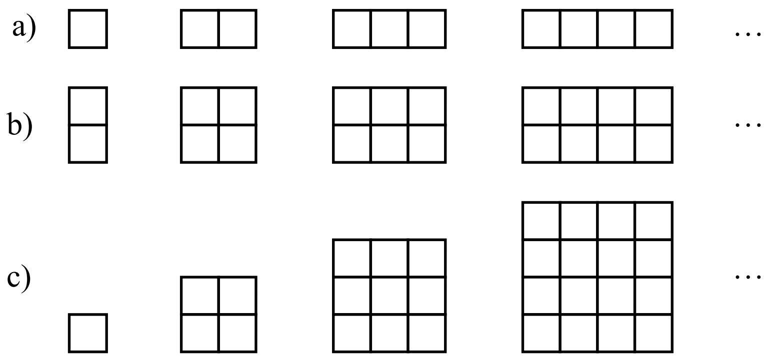
6. On considère une famille de triangles rectangles ayant même hypoténuse. Chaque triangle de la famille est caractérisé par son angle en A, de mesure α (en °).



   a) Représenter graphiquement comment le périmètre de ces triangles dépend de α.
   b) Représenter graphiquement comment l'aire de ces triangles dépend de α.
   c) Quel est le maximum de l'aire d'un rectangle inscrit dans un demi-cercle de 10 cm de rayon ?
   d) Quel est le maximum du périmètre d'un rectangle inscrit dans un demi-cercle de 10 cm de rayon ?

7. Une fille a 20 ans de moins que sa mère. Représenter graphiquement, en fonction de l'âge de la fille :
   a) le rapport de l'âge de la fille à celui de la mère ;
   b) le rapport de l'âge de la mère à celui de la fille.

8. Avec des allumettes, on constitue une suite de figures régulières.
Quel est le nombre d'allumettes nécessaires pour la n^e figure ?



Utiliser l'algèbre pour définir des fonctions

Les exercices précédents montrent qu'il existe une troisième façon de donner une fonction :
une expression algébrique de la variable dépendante, expression dans laquelle apparaît la variable indépendante. Par exemple, si n est le rang et m est le nombre d'allumettes nécessaires pour créer la figure de rang n de l'exercice 8c, on a vu que $m = 2n(n+1)$. Cette égalité, qui montre comment m dépend de n, a l'avantage de permettre de construire le tableau de correspondance entre m et n, ou de tracer le graphique illustrant les variations de m en fonction de n. L'opération inverse est parfois plus délicate …

Le plus intéressant sera de pouvoir penser la formule comme l'expression de la relation qui existe entre toutes les valeurs possibles de la variable indépendante et les valeurs correspondantes de la variable dépendante, au lieu de substituer une seule valeur dans la variable de la formule et de calculer une seule valeur correspondante pour l'autre. Par exemple, dans les activités 8a et 8b, on s'aperçoit que le nombre d'allumettes augmente régulièrement, puisque ce nombre est toujours multiplié par le même coefficient dans la formule. Ce n'est pas le cas pour la situation 8c.

Notation pour les fonctions

Si l'on veut exprimer qu'il existe une relation entre la variable indépendante x et la variable dépendante y, on écrit : $y = f(x)$ ou $f : x \mapsto y$
où la lettre f est simplement le nom que l'on donne à la fonction.
On utilise souvent les lettres f, g, h pour les fonctions, x pour la variable indépendante et y pour la variable dépendante.

Par exemple, si nous nommons f la fonction de l'exercice 7a, nous écrirons :

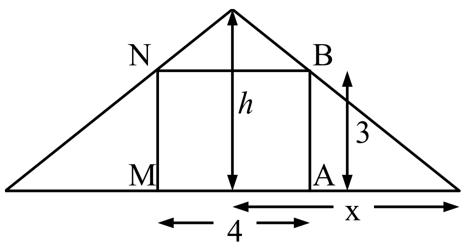
$$f(x) = \frac{x}{x+20} \qquad \text{ou} \qquad f : x \mapsto \frac{x}{x+20}$$

Et $f(x)$ est appelé l'**image** de x par f.

Par exemple, pour cette fonction, l'image de 10 est $\frac{1}{3}$: $f(10) = \frac{1}{3}$.

Activités

9. On considère une famille de rectangles ayant même périmètre (20 cm).
   a) Déterminer une expression algébrique qui indique comment la largeur y de ces rectangles dépend de leur longueur x. (on dira ensuite : exprimer la largeur y en fonction de la longueur x)
   b) Déterminer une expression algébrique qui indique comment l'aire A de ces rectangles dépend de leur longueur x. (on dira ensuite : exprimer l'aire A en fonction de la longueur x)
   c) Pour quelle valeur de x l'aire est-elle maximale ? Combien mesure-t-elle ?
10. On considère une famille de rectangles ayant même aire (12 cm^2).
    Quelles sont les dimensions du rectangle de cette famille dont le périmètre est minimal ?
11. ABC est un triangle rectangle en A tel que $\overline{AC} = 3$ cm et $\overline{AB} = 4$ cm.
    M est un point variable du segment [BC].
    H et K sont tels que AHMK est un rectangle.
    a) Où se trouve le point M si le périmètre du rectangle AHMK vaut 7 cm ?
    c) Existe-t-il une position de M telle que AHMK soit un carré ? Préciser !
12. Un toit en pente s'appuie sur les murs MN et AB, comme sur la figure. Ceux-ci sont hauts de 3 m et écartés l'un de l'autre de 4 m. Le toit peut être plus ou moins incliné.



    a) Comment varie la hauteur h du faîte lorsque la distance x s'approche de 2 m ?
    b) Comment varie h lorsque x devient de plus en plus grand ?
    c) Comment se traduisent sur le graphique de h en fonction de x les observations précédentes ?
13. On établit, en physique, qu'un objet en chute libre, lâché sans vitesse initiale, a parcouru au bout de t secondes une distance d donnée (en mètres) par $d = 5\,t^2$ et que sa vitesse (en m/s) à cet instant t est $v = 10\,t$.
    a) Représenter graphiquement la fonction qui associe la vitesse d'impact au sol (en km/h) à l'altitude d'où est lâché l'objet (en mètres). (On se limitera à des altitudes inférieures à 50 m.)
    b) De quelle altitude faut-il lâcher un objet pour que sa vitesse d'impact au sol soit de 100 km/h ? Et de 50 km/h ?
    c) Si l'on multiplie l'altitude par deux, par combien est multipliée la vitesse d'impact au sol ?
14. On considère la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2}$
    a) Calculer, si elles existent, les images par f de -4 , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 et 4 .
    b) Dessiner une représentation graphique la plus précise possible de cette fonction.
    c) Combien d'éléments ont 0 comme image ? et 1 ? et 2000 ?

§ 2. DEFINITIONS

Une **fonction réelle** allant d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F est une relation qui fait correspondre à **chaque** élément de E **exactement** un élément de F.

Exemples :

$\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto 3x-2 \end{array}$ est la fonction qui fait correspondre à chaque nombre réel x le nombre $3x+2$.

$\begin{array}{l} g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto \sqrt{x}+5 \end{array}$ est la fonction qui fait correspondre $\sqrt{x}+5$ à chaque nombre réel positif x.

On écrit $f(5)=13$ pour signifier que la fonction f fait correspondre au nombre 5 le nombre 13, et on dit alors que 13 est **l'image** de 5 par la fonction f et que 5 est une **préimage** de 13 par cette même fonction.

Exemple : $\sqrt{2}$ est l'image de –1 par la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2}$, car $h(-1) = \sqrt{2}$.

–1 est <u>une</u> préimage de $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$ a une autre préimage qui est environ 1,2041.

Pour une fonction définie par une expression algébrique, son **domaine de définition** est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel cette expression est définie. On le note D_f.

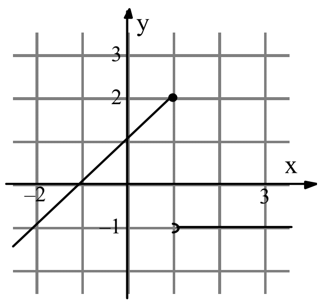
Exemple : Le domaine de définition de la fonction h définie par $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2}$ est

$D_h = [-3\,;0\,[\cup]\,0\,;+\infty\,[$, que l'on note aussi $D_h = [-3\,;+\infty\,[\setminus\{0\}$.

Une **représentation graphique** (appelée aussi **courbe représentative**) d'une fonction f est un ensemble de points du plan de coordonnées $(x\,;f(x))$, où $x \in D_f$.

Exemples : Voici une représentation graphique de la fonction

f définie par $f : x \mapsto \begin{cases} x+1 & si\ x\le 1 \\ -1 & si\ x>1 \end{cases}$



Soit E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Le nombre $a\in E$ est un **zéro** de la fonction $f :\ E\to\mathbb{R}$ si $f(a) = 0$.

Exemples : La fonction $f : x \mapsto x^2-5x$ admet 0 et 5 comme zéros.
La fonction $g : x \mapsto x^2+1$ n'a pas de zéro.

Deux fonctions f et g sont **égales** sur E si $f(x) = g(x)$ pour tout x de E (où E est une partie de $\mathbb{R}$).

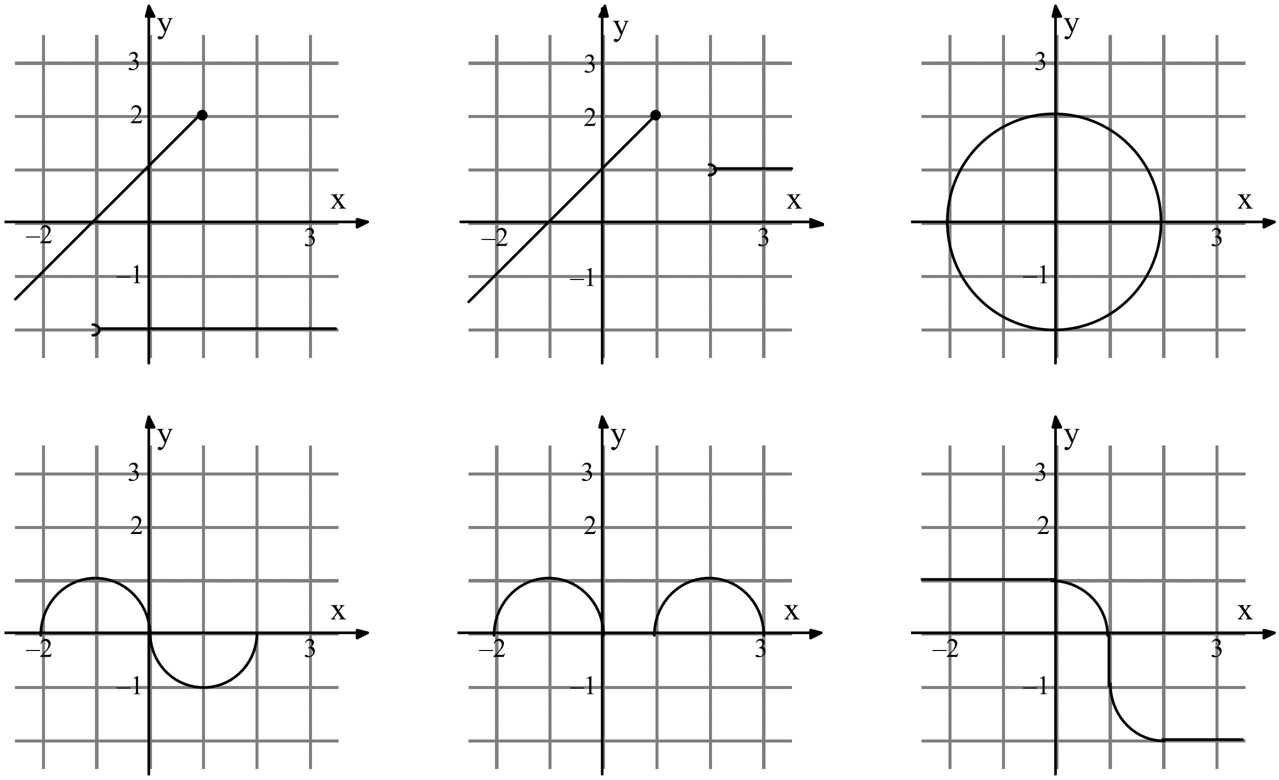
Exemple : Les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2}$ et $g : x \mapsto -x$ sont égales sur $\mathbb{R}_-$.
Elles ne sont pas égales sur $\mathbb{R}_+$.

Soit E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Une fonction f est **positive** sur E si $f(x)\ge 0$ pour tout élément x de E ; elle est **négative** sur E si $f(x)\le 0$ pour tout élément x de E ; si l'inégalité est stricte ($f(x) > 0$), on dit que f est **strictement positive**.

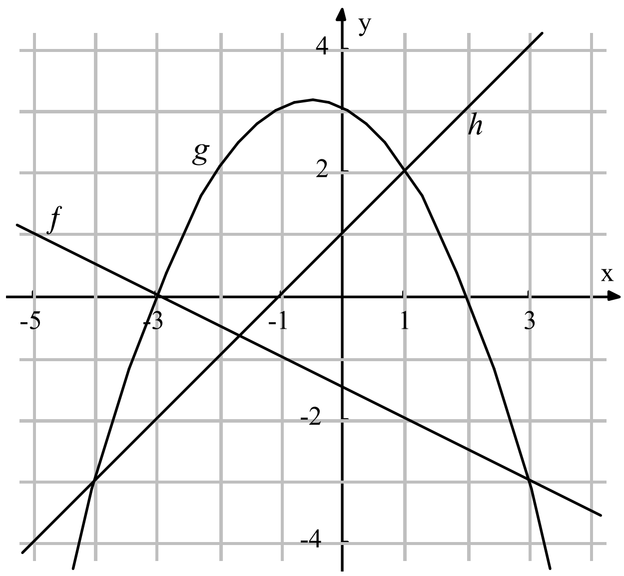
Exemple : La fonction $f : x \mapsto 6+x-x^2$ est positive sur l'intervalle $[-2\,;3\,]$; strictement positive sur l'intervalle $]-2\,;3\,[$; négative sur $]-\infty\,;-2\,]\cup[\,3\,;+\infty\,[$; strictement négative sur $]-\infty\,;-2\,[\cup]\,3\,;+\infty\,[$.

Activités

15. Parmi les courbes suivantes, déterminer lesquelles sont représentatives d'une fonction.



16. Voici des représentations graphiques de trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, f, g et h.



a) Déterminer à partir de ces graphiques :

$f(1)$	$f(-2)$	$f(0)$
$g(1)$	$g(-2)$	$g(0)$
$h(1)$	$h(-2)$	$h(0)$

b) " Le point (–49 ; –48) appartient à la courbe représentative de h. "
VRAI ou FAUX ?

c) Compléter :
Si $f(x) = -3$, alors $x =$
Si $g(x) = 3$, alors $x =$
Si $h(x) = 0$, alors $x =$
Si $f(x) = g(2)$, alors $x =$

Si $f(x) = h(-3)$, alors $x =$
Si $g(x) = h(x)$, alors $x =$

Si $g(x) > f(x)$, alors x
Si $g(x) = g(x+1)$, alors $x =$
Si $f(x) = h(x)$, alors $x =$

d) Quels sont les zéros de f ? de g ? de h ?
Sur quel ensemble f est-elle positive ?
Sur quel ensemble g est-elle négative ?
Sur quel ensemble h est-elle strictement positive ?

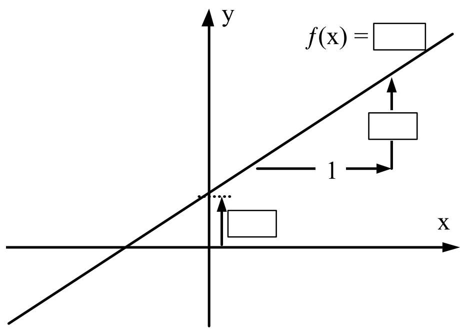
§ 3. Fonctions usuelles

3.1. Fonction affine

Une **fonction affine** est une fonction de la forme $\boldsymbol{f : x \ \mapsto\ \mathbf{p}x+\mathbf{q}}$, définie pour toute valeur réelle de la variable $\boldsymbol{x}$, où **p** et **q** sont des nombres réels quelconques que l'on appelle des **paramètres**.

La "courbe" représentative d'une fonction affine est toujours une droite, dont l'orientation et la position dépendent des valeurs attribuées aux paramètres **p** et à **q**.

Dans l'expression $\mathbf{p}\boldsymbol{x}+\mathbf{q}$:



p est le **coefficient** de $\boldsymbol{x}$ (ce qui signifie le nombre qui multiplie x, le "nombre de fois" que l'on prend x) ;

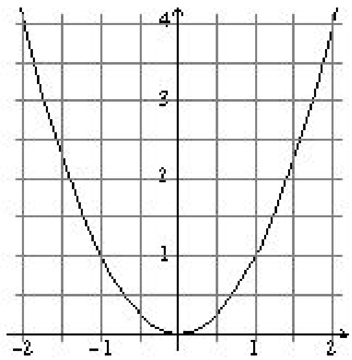
p mesure la **pente** de la droite représentative de f.

q est l'**ordonnée à l'origine**, c'est-à-dire l'image de 0 ;

q mesure la hauteur à laquelle la droite représentative de f coupe l'axe vertical.

$\boldsymbol{y = \mathbf{p}x+\mathbf{q}}$ est l'**équation de la droite** représentative de la fonction $f : x \ \mapsto\ \mathrm{p}x+\mathrm{q}$:
cette égalité est vraie si le point de coordonnées $(\,x\,;y\,)$ se trouve sur la droite et elle est fausse si le point de coordonnées $(\,x\,;y\,)$ n'appartient pas à la droite.

3.2. Fonction "carré"

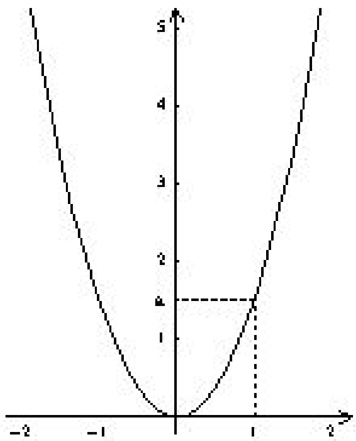


C'est la fonction définie par $\boldsymbol{f : x \ \mapsto\ x^2}$; sa courbe représentative est une **parabole** ; elle est **symétrique** par rapport à l'axe Oy.

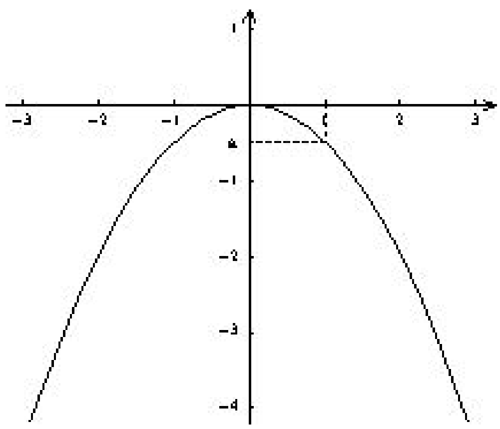
C'est à partir de celle-ci que nous construirons toutes les fonctions **quadratiques**, c'est-à-dire de la forme $\boldsymbol{f : x \ \mapsto\ \mathbf{a}x^2+\mathbf{b}x+\mathbf{c}}$,
avec $\{\,\mathrm{a}\,;\mathrm{b}\,;\mathrm{c}\,\} \subset \mathbb{R}$ et $\mathrm{a} \neq 0$ (Car si $\mathrm{a}=0$, alors $\boldsymbol{f}$ est affine !)

Les fonctions définies par $\boldsymbol{f : x \ \mapsto\ \mathbf{a}x^2}$, où **a** est un nombre réel fixé,
ont une courbe représentative dont l'orientation et l'ouverture dépendent du coefficient **a** :

$\mathrm{a}>0$

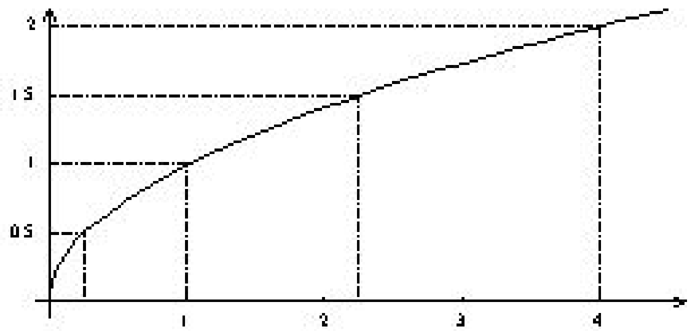


$\mathrm{a}<0$



3.3. Fonction "racine carrée"

C'est la fonction définie par $\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{x}}$, dont la courbe représentative est une demi-parabole. En effet,



$\sqrt{x}$ est par définition LE nombre POSITIF qui, multiplié par lui-même, donne exactement x.

S'il existe, bien sûr !
Car si x est négatif (strictement), il est impossible de trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, donne x …

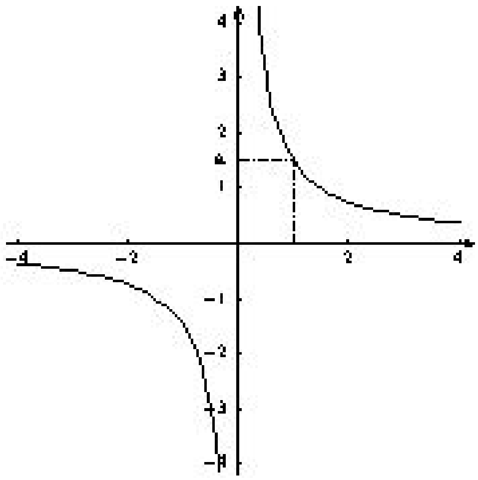
3.4. Fonction "inverse"

C'est la fonction définie par $\boldsymbol{f : x \mapsto \frac{1}{x}}$.

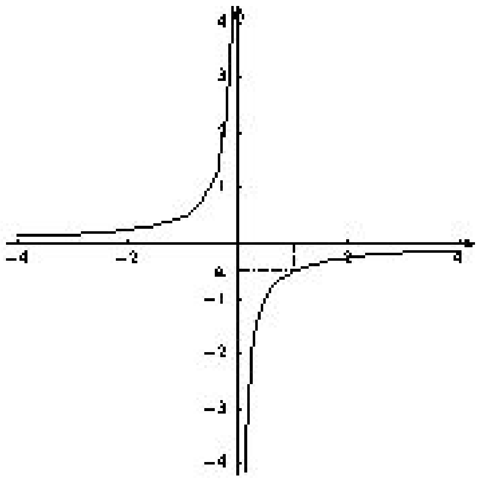
Sa courbe représentative est une **hyperbole**, dont les axes de coordonnées sont les asymptotes.

Les fonctions $\boldsymbol{f : x \mapsto \frac{a}{x}}$, où $\mathbf{a}$ est un nombre réel fixé, ont une courbe représentative dont l'orientation dépend du coefficient $\mathbf{a}$:

$a > 0$

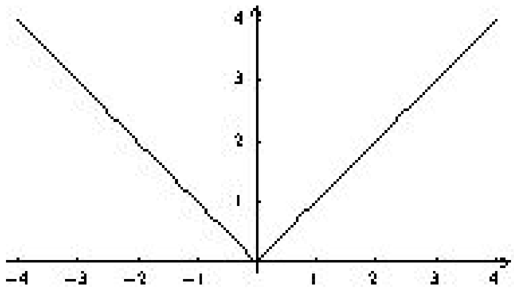


$a < 0$



3.5. Fonction "valeur absolue"

C'est la fonction définie par $\boldsymbol{f : x} \mapsto \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$



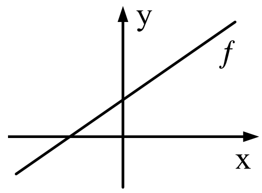
On la note $f : x \mapsto |x|$.

Elle mesure la "distance" de x à zéro :
ainsi $|-3| = |3| = 3$.

Activités

17. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions affines ?

$f_1 : x \mapsto 1$ $\qquad$ $f_3 : x \mapsto \alpha x + \alpha^2$ $\qquad$ $f_5 : x$



$\mapsto 1 - x^2$

$f_2 : x \mapsto -x$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto x^2 - (1 - x)^2$

18. Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des fonctions suivantes, puis les représenter graphiquement :

$f_1 : x \mapsto -2x + 3$ $\qquad$ $f_4 : x \mapsto -2$ $\qquad$ $f_7 : x \mapsto 3x$

$f_2 : x \mapsto 5 - x$ $\qquad$ $f_5 : x \mapsto x$ $\qquad$ $f_8 : x \mapsto 0$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{5x}{4}$ $\qquad$ $f_6 : x \mapsto \dfrac{2x - 3}{4}$ $\qquad$ $f_9 : x \mapsto \dfrac{2 - x}{3}$

19. Nous avons vu que la représentation graphique de $f : x \mapsto ax + b$ dépendait de la valeur des paramètres a et b, et notamment de leurs signes. Esquisser un graphique de f dans chacune des situations possibles.

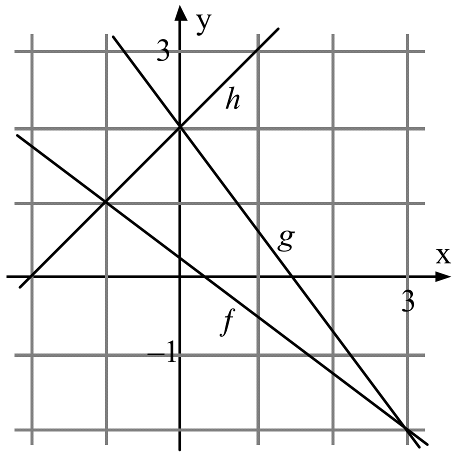
Exemple : si $a > 0$ et $b > 0$, le graphique est du type :

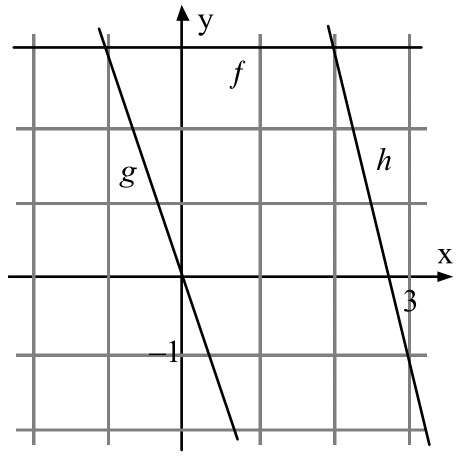
20. Trouver dans chaque cas la fonction affine f dont la représentation graphique
    a) passe par le point $(3 ; 2)$ et dont la pente vaut 4 ;
    b) est parallèle à la droite d'équation $y = -x + 7$ et passe par le point $(-6 ; 8)$;
    c) passe par les points $(5 ; 6)$ et $(-9 ; 5)$;
    d) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 3x - 4$;
    e) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 3x - 4$ et passe par le point $(2 ; 0)$;
    f) est de pente $-\frac{1}{2}$ et telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

21. Les températures peuvent être mesurées dans différentes unités, entre autre les degrés Celsius et les degrés Fahrenheit. On a par exemple les correspondances : 60 °C = 140 °F et 100 °C = 212 °F.
    a) Donner la fonction affine qui exprime une température en degré Fahrenheit en fonction de cette même température en degrés Celsius.
    b) Pour quelle température exprimée en degré Fahrenheit l'eau gèle-t-elle ?
    c) Existe-t-il une température qui soit exprimée par le même nombre dans les deux unités ?

22. Les points $A(1 ; -5)$, $B(3 ; 7)$ et $C(10 ; 50)$ sont-ils alignés ?

23. a) Déterminer les fonctions affines f, g et h pour chaque graphique.



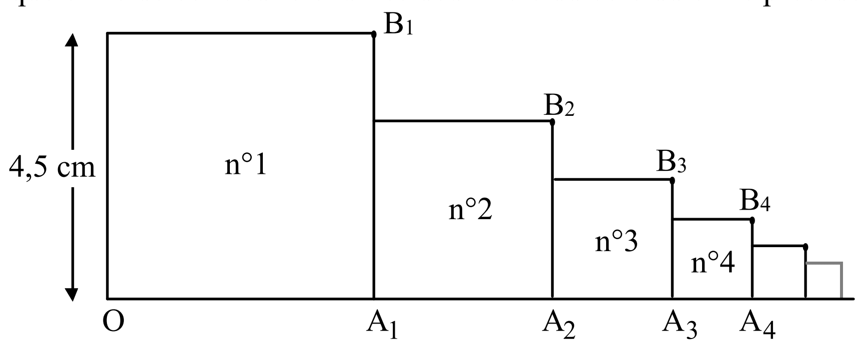


b) Quels sont les zéros de ces fonctions ?

c) Résoudre l'équation $f(x)=g(x)$. Que représente la solution de cette équation ?

d) Déterminer par le calcul tous les points d'intersection de ces droites.

24. Le côté de chaque carré de cette suite vaut les deux tiers du côté du carré précédent.



a) Les points B_1, B_2, B_3,… sont-ils alignés ?

b) VRAI ou FAUX ? "En continuant ce procédé et en construisant autant de carrés que l'on veut, on peut obtenir un point A_n tel que la distance de O à A_n dépasse 14 cm."

25. Un théâtre propose deux prix de places : plein tarif (15 F) et tarif adhérent (réduction de 60 % sur le plein tarif). Un adhérent doit payer en début de saison une carte d'abonnement qui lui donne droit à la réduction de 60 % sur chaque entrée.

a) Quel est le prix d'une entrée au tarif adhérent ?

b) Sachant qu'un adhérent a dépensé au total (y compris le prix de la carte) 62 F pour 7 entrées, calculer le prix de la carte d'abonnement.

c) Pour un nombre d'entrées x, on note $f(x)$ la dépense totale d'un spectateur qui n'est pas adhérent, et $g(x)$ la dépense totale d'un adhérent. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

d) À partir de combien d'entrées l'abonnement devient-il avantageux ?

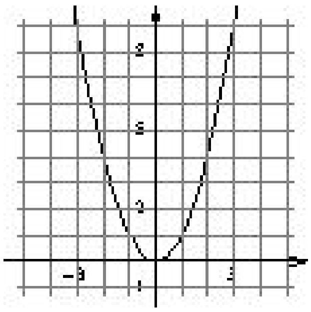
e) Combien d'entrées totalise un adhérent lorsqu'il constate que, sans abonnement, il aurait dépensé 50 % de plus ?

§ 4. Les Fonctions Quadratiques

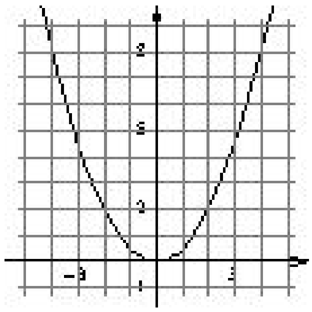
Une **fonction quadratique** est une fonction de la forme $\boldsymbol{f : x \mapsto a x^2 + b x + c}$,
avec $\{a ; b ; c\} \subset \mathbb{R}$, et $a \neq 0$. La représentation graphique d'une fonction quadratique est toujours une parabole, dont la position et la forme dépendent des valeurs attribuées aux coefficients *a*, *b* et *c*.

26. a) En observant les courbes représentatives des fonctions quadratiques ci-dessous, faites des conjectures concernant l'effet produit sur la représentation graphique par les paramètres *a*, *b*, *c* de l'expression algébrique $\boldsymbol{f : x \mapsto a x^2 + b x + c}$.

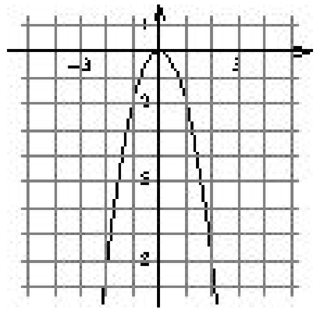
    b) Quels liens pouvez-vous établir entre les points d'intersection avec les axes de chacune des représentations graphiques et l'expression algébrique qui lui est associée ?



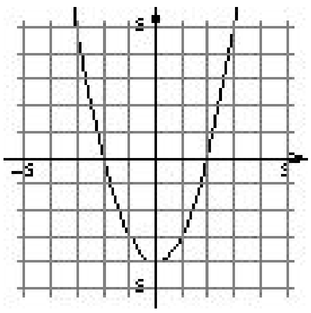
$f_1 : x \mapsto x^2$



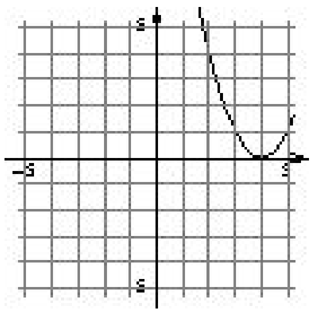
$f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$



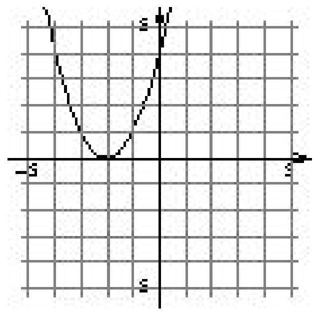
$f_3 : x \mapsto -2x^2$



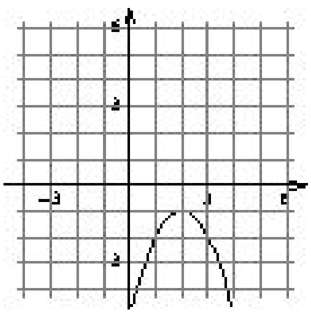
$f_4 : x \mapsto x^2 - 4$



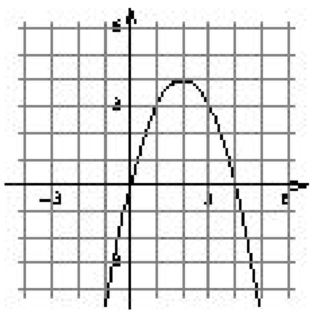
$f_5 : x \mapsto (x-4)^2$



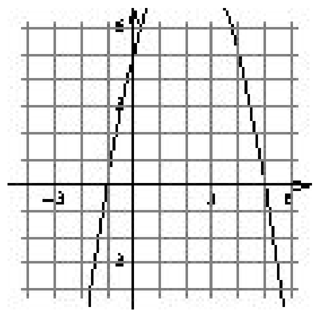
$f_6 : x \mapsto x^2 + 4x + 4$



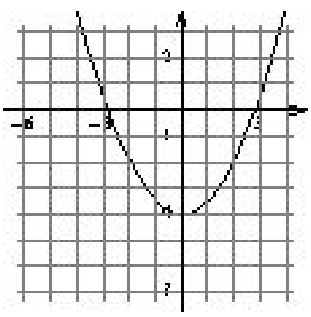
$f_7 : x \mapsto -x^2 + 4x - 5$



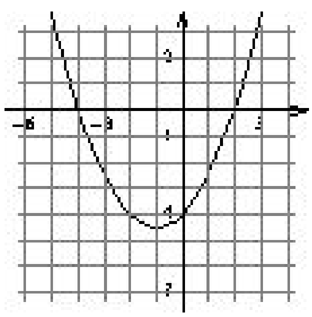
$f_8 : x \mapsto -x^2 + 4x$



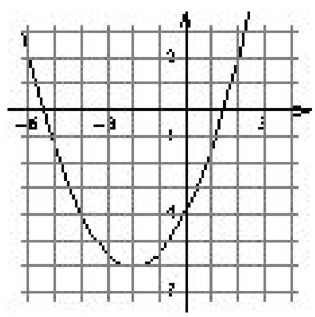
$f_9 : x \mapsto -x^2 + 4x + 5$



$f_{10} : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$



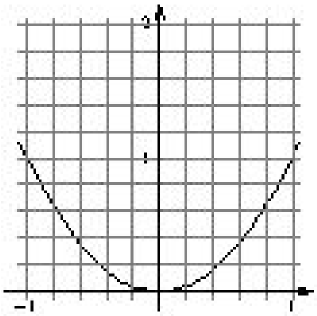
$f_{11} : x \mapsto \frac{x^2}{2} + x - 4$



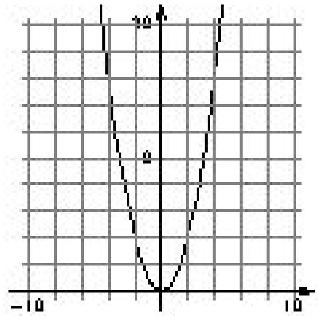
$f_{12} : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2x - 4$

27. Les questions suivantes se rapportent encore aux graphiques de la page précédente !
    a) À quelle hauteur le graphique de la fonction f_5 coupe-t-il l'axe vertical ?
    b) "La droite d'équation $x = -5$ ne coupe pas le graphique de f_5." VRAI ou FAUX ?
    c) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole représentant la fonction f_9 ?
    d) Déterminer les zéros de chacune des fonctions de la page précédente.
    *Rappel : On appelle **zéro d'une fonction** f toute valeur de x telle que f(x) = 0.*

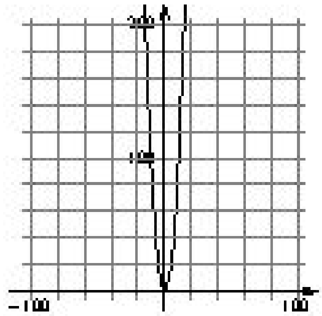
28. Pour chaque graphique, trouver l'expression algébrique de la fonction représentée !



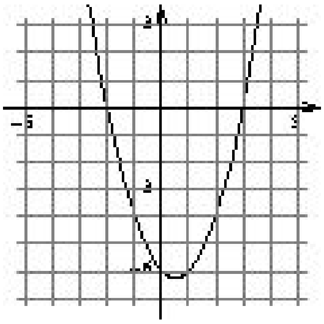
f_1



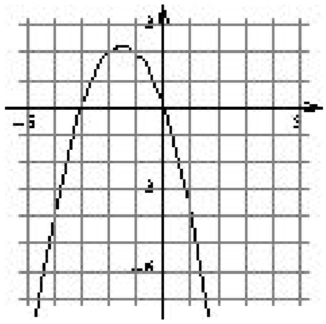
f_2



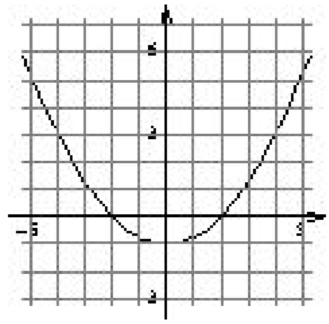
f_3



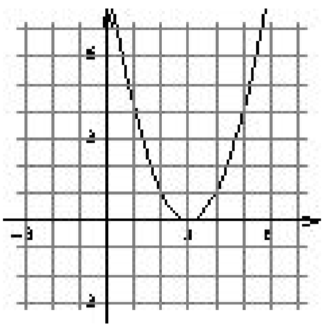
f_4



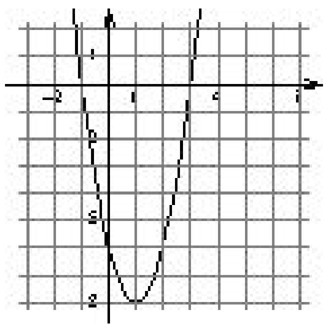
f_5



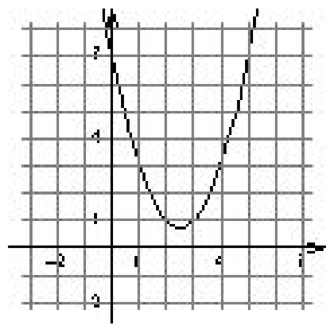
f_6



f_7



f_8

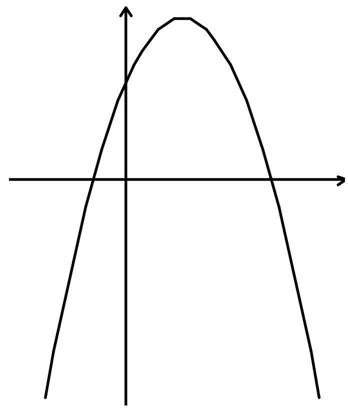


f_9

29. a) La courbe représentée ci-contre est celle d'une fonction quadratique $f : x \mapsto ax^2+bx+c$.
Que pouvez-vous dire du signe de a ? De c ? De Δ ?

b) Esquisser un graphique de f selon les signes de a et de Δ :

	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
$a>0$			
$a<0$			



30. Nous savons maintenant que $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les zéros de la fonction quadratique $f : x \mapsto ax^2+bx+c$, si $\Delta > 0$.
Comment, à partir de là, trouver les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f ?

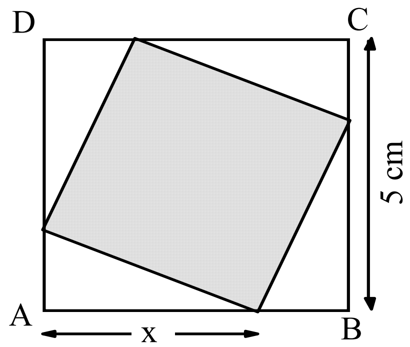
31. Déterminer le sommet et les intersections avec les axes de la parabole d'équation $y = -\dfrac{x^2}{4}+x-\dfrac{3}{2}$, puis tracer cette courbe.

32. Les courbes représentatives de $f : x \mapsto 2-\dfrac{x}{2}$ et de $g : x \mapsto -x^2-x+2$ sont-elles tangentes ?

33. Les sommets du carré grisé appartiennent aux côtés du carré ABCD.

Déterminer la mesure du côté du carré grisé d'aire :

a) minimale.
b) maximale.



34. Pour une route sèche et horizontale, la fonction qui donne la distance de freinage (en mètres) d'un véhicule en fonction de sa vitesse x (en km/h) est du type $f : x \mapsto ax^2+bx+c$.

a) Déterminer la valeur de c et justifier !

b) D'après le tableau suivant, déterminer la valeur des coefficients a et b.

c) À partir de quelle vitesse la distance de freinage dépasse-t-elle 200 mètres ?

vitesse	distance de freinage
0 km/h	
20 km/h	9 mètres
40 km/h	24 mètres
60 km/h	45 mètres

35. **Le pont suspendu** (*Cf.* fiche en annexe)

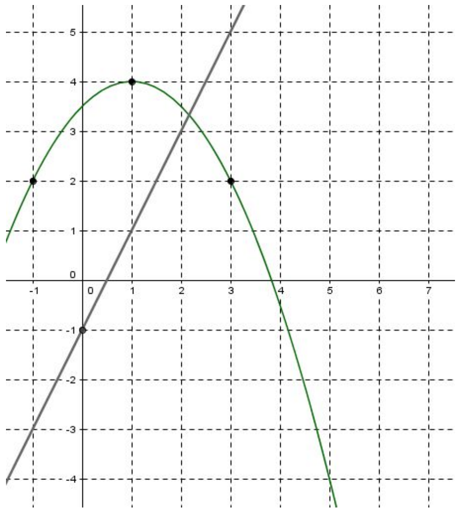
36. Les points A(–4 ; 4), B($-\frac{5}{4}$; 2), C(0 ; 1) et D(3 ; $-\frac{5}{4}$) sont-ils alignés ?
Existe-t-il une parabole qui passe par A, B et C ? Préciser !

37.

a) A l'aide des informations que vous pouvez lire sur le graphique ci-contre, déterminer précisément l'expression algébrique de la fonction quadratique ***f*** et de la fonction affine ***g***.

b) Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection des graphiques de ***f*** et de ***g***.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de p la droite d'équation $d(x) = p \cdot x + 4$ n'aura-t-elle qu'une seule intersection avec la parabole représentative de ***f*** ?



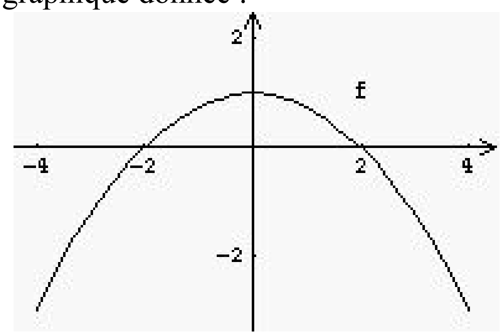
38. En vous basant sur les représentations graphiques des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$, $g : x \mapsto |x|$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, esquisser celles des fonctions ci-dessous :

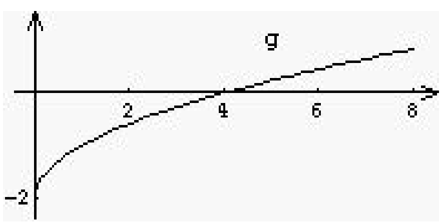
$f_1 : x \mapsto \sqrt{x} + 3$ $\quad f_2 : x \mapsto \sqrt{x+3}$ $\quad f_3 : x \mapsto -\sqrt{x}$ $\quad f_4 : x \mapsto \sqrt{-x}$

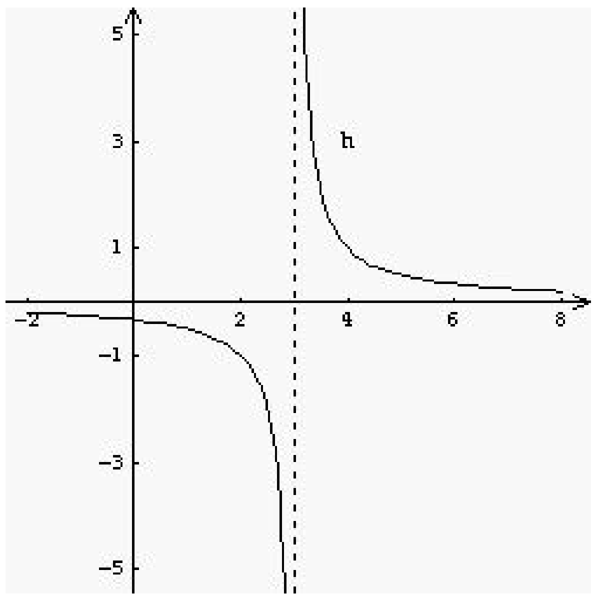
$g_1 : x \mapsto |x| - 2$ $\quad g_2 : x \mapsto |x-2|$ $\quad g_3 : x \mapsto\mapsto |x-2| + 3$ $\quad g_4 : x \mapsto |x+3| - 2$

$h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 2$ $\quad h_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ $\quad h_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x-2} + 3$ $\quad h_4 : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x}$

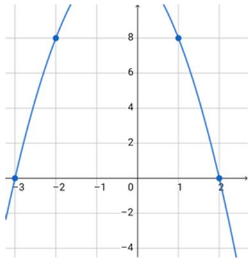
39. Déterminer dans chaque cas l'expression algébrique d'une fonction correspondant à la représentation graphique donnée :





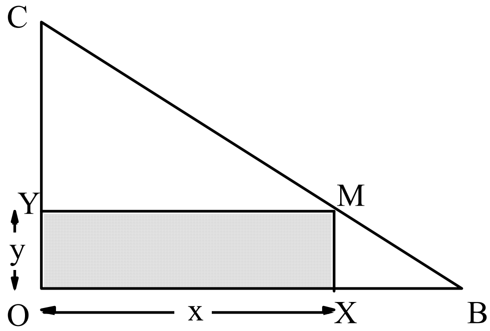


40. Voici une représentation graphique d'une fonction quadratique f



A quelle hauteur exactement cette courbe coupe-t-elle l'axe vertical ?

41. OBC est un triangle rectangle en O, de côtés OB = 9 cm et OC = 4 cm. M est un point du segment $[B;C]$ et OXMY est un rectangle de longueur x = OX et de largeur y = OY.



a) Exprimer y en fonction de x.

b) Déterminer x pour que OXMY soit un carré.

c) Utiliser le résultat de a) pour montrer que l'aire du rectangle est $A(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4x$.

d) Calculer x pour que l'aire du rectangle soit de 8 cm^2.

e) Esquisser un graphique de la fonction $A : x \mapsto A(x)$ (aire du rectangle en fonction de x).

f) Déterminer la valeur qu'il faut donner à x pour que l'aire du rectangle soit la plus grande possible et calculer cette aire maximale.

42. Un mathématicien dira volontiers qu'une certaine fonction a la propriété que « l'image d'une somme de nombres est égale à la somme des images ».

a) Expliquer ce qu'il veut dire…

b) Y a-t-il des fonctions qui ont cette propriété parmi les suivantes ?

$f_1 : x \mapsto x+2$	$f_3 : x \mapsto 2$	$f_5 : x \mapsto \frac{1}{x}$	$f_7 : x \mapsto \lvert x \rvert$
$f_2 : x \mapsto 2x$	$f_4 : x \mapsto x^2$	$f_6 : x \mapsto \sqrt{x}$	$f_8 : x \mapsto \frac{1}{x^2}$

c) Reprendre les questions précédentes en remplaçant "somme" par "produit".