Méthodes élémentaires.

Série 1 : Introduction

A rendre pour le 23 septembre 2020

Quelques fausses preuves

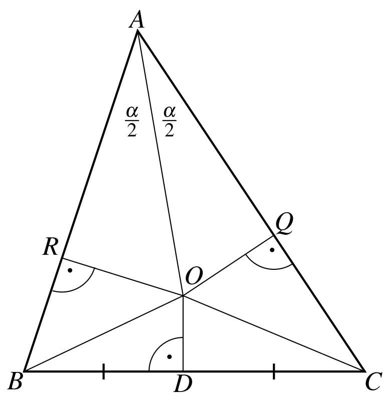
Pour chacune des (fausses) preuves suivantes, essayez de trouver exactement où l'argument ne fonctionne pas

1. On montre par récurrence que dans n'importe que trousse, tous les crayons sont de la même couleur. Soit donc une trousse, et N le nombre de crayons contenus. Pour $N = 1$, le résultat est trivial. Supposons maintenant que le résultat est démontré pour un certain N, et que la trousse contient $N+1$ crayons. Alors, comme chaque sous-ensemble de N crayons doit être de la même couleur, on déduit nécessairement que les $N + 1$ le sont aussi.
2. Supposons que chaque ville sur Terre soit reliée à au moins une autre par une voie ferrée. Montrons qu'alors, on peut rejoindre par train n'importe quelle ville depuis n'importe quelle autre (en prenant peut-être plusieurs trains). On procède par récurrence sur N : si $N = 1$, c'est évidemment vrai. Supposons maintenant que pour tout groupe de N villes, le résultat est démontré, et rajoutons une ville. Elle doit par hypothèse être reliée à une des N villes précédentes. Donc, depuis cette $N + 1$-ème ville, on peut rejoindre n'importe quelle autre. Cela démontre l'étape de récurrence.
3. Montrons que tous les triangles sont isocèles. Soient A, B, C les trois sommets d'un triangle quelconque. On commence par dessiner la bissectrice de l'angle en A, puis la perpendiculaire au côté BC passant en son centre, et appelons leur point d'intersection O (voir le dessin ci-dessous). On trace ensuite les perpendiculaires à BA et AC passant par O, et enfin les segments BO et CO.

   Remarquons maintenant que les triangles RAO et OAQ sont semblables, puisqu'ils partagent le côté AO, et qu'on a $\angle ORA = \angle AQO = \pi/2$ et $\angle RAO = \angle OAQ$. On en déduit donc que $RO/AO = QO/AO$, et ainsi $RO = QO$.

   Notons ensuite que $BO = OC$, par construction du segment OD. Par conséquent, les triangles ROB et OQC sont semblables.

   Finalement, on déduit des points précédents que $AR = AQ$ et $RB = QC$, ce qui implique l'égalité $AB = AC$. Ce triangle est donc bien isocèle.



Le principe des tiroirs de Dirichlet

Ce principe (parfois aussi appelé "principe des cages et des lapins", ou "pigeonhole principle" en anglais), malgré sa simplicité, permet de montrer des résultats étonnament compliqués lorsqu'il est bien appliqué.

Son énoncé est le suivant :

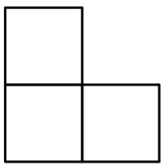
Proposition 0.1 *Pour tout $n \geq 1$, si $n + 1$ objets sont placés dans n tiroirs, alors il existe un tiroir contenant au moins 2 objets.*

Quelques applications faciles.

4. Montrer que parmi 13 personnes, au moins deux sont nées le même mois.
5. Combien de personnes faut-il pour être sûr que deux d'entre elles sont nées le même jour ? Trois d'entre elles ? n ?
6. *Principe des tiroirs généralisé.* Montrer que si $mn+1$ chaussettes sont placées dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient strictement plus que m chaussettes.
7. La Suisse compte 8 340 000 habitant-es. Montrer qu'il existe deux personnes ayant le même anniversaire et dont la taille diffère d'un millimètre au plus.
8. Dans chaque carré d'une grille 3×3, on écrit -1, 0 ou 1. Montrer que parmi les sommes des lignes, des colonnes et des diagonales, il en existe deux qui sont identiques.
9. Montrer que parmi 4 nombres distincts, on peut en trouver 2 dont la différence est divisible par 3.
10. On a 5 points dans un carré de côté 4. Montrer qu'il existe deux points à distance inférieure à 3.

Un peu plus dur.

11. Quel est le nombre maximum de rois qu'il est possible de poser sur un échiquier de manière à ce qu'aucun ne soit en échec ?
12. Montrer que parmi $n+1$ nombres distincts, on peut en trouver 2 dont la différence est divisible par n.
13. Soient $a \leq b \leq c \leq d$ des entiers, et considérons les 6 différences $b-a$, $c-a$, $c-b$, $d-a$, $d-b$ et $d-c$. Montrer que le produits de ces différences est divisible par 12.
14. Montrer qu'il existe un entier positif s'écrivant avec uniquement des 1 et des 0 qui est divisible par 2019.
15. **(o)** Un certain nombre d'équipes de football font un tournoi. Montrer qu'à tout moment, il existe deux équipes qui ont joué le même nombre de matches (on suppose que chaque paire d'équipes joue au maximum une fois).
16. **(é)** Montrer que parmi 12 nombres à deux chiffres, on peut en trouver 2 tels que la différence soit de la forme aa.
17. **(o)** On appelle *triomino* un arrangement de trois petits carrés formant un L (voir l'image ci-dessous). Ce triomino peut être tourné dans n'importe quel sens. Quel est le nombre maximum de cases d'un échiquier 8×8 que l'on peut colorier en vert, de telle manière que tout triomino recouvre au moins une case non-coloriée ?



18. On se donne dix entiers distincts à deux chiffres. Montrer qu'il est possible de trouver deux sous-ensembles disjoints non-vides tels que leur sommes sont égales.
19. Soit S un ensemble d'entiers positifs de cardinal n. Aucun élément de S n'est divisible par n. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de S dont la somme des éléments est divisible par n.
20. (*) Soit a un nombre irrationnel, et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que parmi les nombres $a, 2a, \ldots, na$, il existe un nombre à distance moins de $\frac{1}{n}$ d'un entier.
21. (*) Prouver que toute suite réelle de n^2+1 éléments contient une sous-suite monotone de $n+1$ éléments.