STABILITÉ HOMOLOGIQUE POUR CERTAINS GROUPES ORTHOGONAUX

G. Collinet

Résumé. — Utilisant la combinatoire des relations d'adjacence, nous donnons une condition sur l'arithmétique des formes bilinéaires sur un anneau A suffisante pour obtenir un résultat de stabilité homologique pour le groupe $\mathrm{O}_n(A)$. En particulier, nous démontrons que pour $n \geq 3k+5$, l'inclusion de $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ dans $\mathrm{O}_{n+1}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ induit un isomorphisme en homologie entière de degré k.

Abstract **(Homological stability for some orthogonal groups)**
Using the combinatorics of adjacency relations, we give a condition on the arithmetic of bilinear forms over a ring A sufficient to obtain homological stability results for the group $\mathrm{O}_n(A)$. In particular, we show that when $n \geq 3k+5$, the inclusion of $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ in $\mathrm{O}_{n+1}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ induces an isomorphism in homology of degree k.

Introduction

Soient A un anneau commutatif, et n un nombre entier naturel ; on notera $\mathrm{I}_n(A)$ le A-module A^n muni de la forme bilinéaire b dont la matrice de Gram dans la base canonique est la matrice identité I_n.

La notation O_n désignera le groupe algébrique linéaire défini sur $\mathbf{Z}$, dont les points sur un anneau A sont les matrices X de $\mathrm{GL}_n(A)$ telles que ${}^tX I_n X = I_n$ (autrement dit, $\mathrm{O}_n(A)$ est le groupe des isométries de $\mathrm{I}_n(A)$).

L'auteur a bénéficié d'un soutien du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

On rappelle que la notation $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$ désigne le sous-anneau de $\mathbf{Q}$ constitué des fractions irréductibles dont le dénominateur est une puissance de 2.

Le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème. – *Pour tout $n \geq 3k+5$, l'inclusion de Γ_n dans Γ_{n+1} induit un isomorphisme en homologie entière*

$$\mathrm{H}_k(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]);\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_k(\mathrm{O}_{n+1}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]);\mathbf{Z}) \quad .$$

Ce théorème entre dans la vaste famille des théorèmes de stabilité homologique. Plus précisément, soit $(G_n)_n$ une suite de groupes (discrets) telle que G_n soit un sous-groupe de G_{n+1}. On s'intéresse à la question suivante :

L'homologie de $(G_n)_n$ stabilise-t-elle ? Autrement dit, existe-t-il pour tout entier k un entier f_k tel que pour tout n plus grand que f_k, l'application $i_k^n : \mathrm{H}_k(G_n,\mathbf{Z}) \to \mathrm{H}_k(G_{n+1},\mathbf{Z})$ induite par l'inclusion $i^n : G_n \hookrightarrow G_{n+1}$ soit un isomorphisme ?

On sait par exemple depuis Nakaoka [**13**] que l'homologie des groupes symétriques $(\mathrm{S}_n)_n$ stabilise.

Au début des années 80, les premiers résultats de stabilité homologique pour les points sur un anneau "sympathique" A de certains groupes algébriques linéaires G définis sur $\mathbf{Z}$ ont été obtenus par K. Vogtmann [**17**] ($G_n = \mathrm{O}_{n,n}$, A un corps de caractéristique nulle, $f_k \leq 3k+3$), R. Charney [**5**] ($G_n = \mathrm{GL}_n$, A principal (par exemple) et $f_k \leq 3k+3$) et W. Van der Kallen [**16**]($G_n = \mathrm{GL}_n$, A principal (par exemple) et $f_k \leq 2k+2$). Diverses généralisations ont été obtenues en utilisant des techniques similaires par R. Charney [**6**], K. Vogtmann [**18**], Mirzaii-Van der Kallen [**12**]. En particulier, dans [**18**], Vogtmann obtient des résultats de stabilité homologique pour les points sur un corps du groupe O_n. Ce travail les affine, et nous obtenons aussi des résultats de stabilité pour les points sur l'anneau $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$.

Tous ces résultats de stabilité peuvent être démontrés selon un schéma semblable : on trouve un CW-complexe X_n hautement acyclique, muni d'une action de G_n transitive sur les cellules de même dimension et dont les stabilisateurs sont conjugués aux G_{n-k}, puis on considère la construction de Borel.

Le résultat *ad hoc* dans notre situation est le suivant (démontré dans la première partie) :

Théorème 2.1.*– Supposons que pour chaque n, il existe un ensemble quasi-simplicial X_n muni d'une action de G_n vérifiant la propriété suivante :*
(C) : le groupe G_{n+1} agit transitivement sur les simplexes d'une dimension donnée de X_{n+1} et le stabilisateur d'un simplexe de dimension k est isomorphe à G_{n-k}.
Posons

$$f_k := \inf\{n,\ \forall n' \geq n,\ i_l^{n'}\ \textit{est} \begin{cases} \textit{un isomorphisme} & \textit{si } l \leq k \\ \textit{un épimorphisme} & \textit{si } l = k+1 \end{cases} \}$$

$$a_k := \inf\{l,\ \forall l' \geq l,\ X_{l'}\ \textit{est } k\textit{-acyclique}\}$$
$$m_k = \sup\ \{a_k - 1,\ \sup_{1 \leq i \leq \frac{k+1}{2}} f_{k-2i+1} + 2i\}$$

Alors

$$f_k \leq m_k\ .$$

(Mentionnons ici que la notion d'ensemble quasi-simplicial (précisée dans le premier paragraphe) est *grosso modo* celle d'ensemble simplicial où l'on oublie les dégénérescences.)

On se convainc aisément que ce théorème s'applique aussi bien à l'homologie et à la cohomologie à coefficients ("non tordus") dans un anneau R.

Lorsque $G_n = \mathrm{O}_n(A)$, l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathrm{I}_n(A)$, muni de la relation d'orthogonalité $\perp$ fournit un ensemble quasi-simplicial $X_n(A)$ dont les sommets correspondent aux vecteurs unitaires, et les k-simplexes aux suites de longueur $k+1$ de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

Pour étudier l'acyclicité de X_n, le cadre adapté est donc celui des relations d'adjacence sur un ensemble X, c'est-à dire des relations $\perp$ symétriques telles que $x \perp y$ implique $x \neq y$ pour tous x et y dans X.
Soit $(X, \perp)$ un ensemble muni d'une telle relation. Deux sous ensembles E et E' de X étant donnés, on notera $E \perp E'$ si x est adjacent à y pour tous $x \in E$ et $y \in E'$. On note aussi $E^\perp$ le plus grand sous-ensemble E'

de X tel que $E' \perp E$. Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du résultat suivant :

***Théorème 1.4.**– Soit X un ensemble muni d'une relation d'adjacence $\perp$. Supposons que la condition suivante est réalisée :*

(A_k) : pour toute partie P de la forme $\{x_1, y_1, ..., x_l, y_l\}$ avec $1 \leq l \leq k+1$ et $\{x_i, y_i\} \perp \{x_j, y_j\}$ $(i \neq j)$, $P^\perp$ est non vide.

Alors X est k-acyclique.

Par exemple, lorsque A est un corps fini (resp. $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, resp. un corps complet pour une valuation discrète, resp. un corps global), la condition A_k est vérifiée pour $X_n(A)$ dès que n est supérieur ou égal à $2k+2+\delta$ avec $\delta = 2$ (resp. $\delta = 1$, resp. $\delta = 4$, resp. $\delta = 4$) car un sous-espace vectoriel quadratique de $\mathrm{I}_n(A)$ de dimension δ représente 1 (cf. [**11**] 62.1 (resp. 61.A et B, resp. 63.17, resp. 66.3)).
Le théorème 1 montre alors que pour chacun de ces corps, l'homologie de $(\mathrm{O}_n(A))_n$ stabilise, avec $f_k \leq 2k + \delta + 1$.

Lorsque A est l'anneau $\mathbf{Z}$ (ou plus généralement l'anneau des entiers d'un corps de nombres absolument réel), la vérification de A_k est triviale, les seuls vecteurs unitaires de $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z})$ étant les éléments de la base canonique et leurs opposés. On trouve que $X_n(\mathbf{Z})$ est k-acyclique dès que n est supérieur ou égal à $2k+3$. Une fois encore, la réponse à $\mathrm{Q}[(\mathrm{O}_n(A))_n]$ est affirmative, avec $f_k \leq 2k+2$.

Les résultats de stabilité ci-dessus affinent ceux de K. Vogtmann [**18**]. En particulier, les majorations de f_k données ici sont inférieures à celles que l'on peut déduire de son travail.

Lorsque l'on considère un anneau quelconque, il arrive que la propriété C du théorème 1 ne soit pas vérifiée. Par exemple, lorsque p est impair, $\mathrm{O}_9(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ n'agit pas transitivement sur les sommets de $X_9(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$. Nous ne savons pas si l'homologie de $(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}]))_n$ stabilise. Lorsque 2 est inversible dans A, ce problème ne se présente pas, et le seul point restant à traiter est la vérification de A_k. Par exemple, si A est un anneau local non-dyadique, A_k est vérifiée pour $n \geq 3k+5$ ([**11**] 92.1 et 92.2).

Le troisième paragraphe est consacré à la démonstration de la

***Proposition 3.6.**— La condition A_k est vérifiée pour $X_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ dès que $n \geq 3k+6$.*

Nous en déduisons immédiatement le théorème principal. Mentionnons-en une application directe.

Soit G un groupe. On note $\mathcal{A}(G)$ la catégorie dont les objets sont les 2-sous-groupes abéliens élémentaires de G et dont les morphismes sont les homomorphismes de groupes induits par une conjuguaison dans G, et q_G l'application de Quillen $\mathrm{H}^*(G;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to \lim_{\mathcal{A}(G)} \mathrm{H}^*(-;\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. Un théorème de J.H. Gunawardena, J. Lannes et S. Zarati [**7**] montre que l'application de Quillen $q_{\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})}$ est un isomorphisme.

On note r_n l'application naturelle $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]) \to \mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$. On constate que r_n induit une équivalence de catégories $\mathcal{A}(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])) \to \mathcal{A}(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}))$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^*(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3);\mathbf{Z}/2) \arrow[r, "r_n"] \arrow[d, "q_{\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3)}"', "\simeq"] & \mathrm{H}^*(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]);\mathbf{Z}/2) \arrow[d, "q_{\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])}"] \\
\lim\limits_{\mathcal{A}(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3))} \mathrm{H}^*(-;\mathbf{Z}/2) \arrow[r, "\simeq"] & \lim\limits_{\mathcal{A}(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]))} \mathrm{H}^*(-;\mathbf{Z}/2)
\end{tikzcd}$$

D'autre part, dans [**8**], H.W. Henn et J. Lannes prouvent le théorème suivant :

Théorème. **(Henn-Lannes)**— *L'application r_n induit en cohomologie modulo 2 un isomorphisme si et seulement si $n \leq 14$.*

Nous en déduisons :

Corollaire.— *L'application induite en homologie modulo 2 par r_∞ est injective, et son conoyau est concentré en degrés supérieurs ou égaux à 4.*

Nous dérivons de ceci, ainsi que de la série de Poincaré de $\mathrm{H}^*(\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}/3);\mathbf{Z}/2)$ (cf. [**1**] VII5.13) le résultat suivant :

$$\dim \mathrm{H}^i(\mathrm{O}_\infty(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])];\mathbf{Z}/2) = \begin{cases} 1 & si\ i=0, \\ 2 & si\ i=1, \\ 4 & si\ i=2, \\ 8 & si\ i=3, \end{cases}$$

et $\dim \mathrm{H}^4(\mathrm{O}_\infty(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])];\mathbf{Z}/2) \leq 14$.

1. Ensembles quasi-simpliciaux et relations d'adjacence

1.1. Ensembles quasi-simpliciaux. — La théorie des ensembles quasi-simpliciaux est assez proche de celle des ensembles simpliciaux pour ne pas être détaillée ici. Nous en résumons les définitions et le "théorème de recouvrement acyclique" dont nous aurons besoin dans la suite.

Pour un entier naturel n ou pour n infini, on note Δ la catégorie dont les objets sont les ensembles $[k] = \{0, \ldots, k\}$ avec $k \leq n$ et dont les morphismes sont les applications strictement croissantes. On se convainc que celles-ci sont composées des applications

$$\begin{array}{rcl} d_i^k \ : \ \{0, \ldots, k\} & \rightarrow & \{0, \ldots, k+1\} \\ j & \mapsto & \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j+1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un *objet de $\mathcal{C}$ quasi-simplicial* est un foncteur $S \ : \ \Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}$, que l'on écrira :

$$S \ : \ S_0 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\leftleftarrows}} S_1 \overset{\leftarrow}{\leftleftarrows} S_2 \cdots$$

De même, on peut définir un objet quasi-cosimplicial dans une catégorie $\mathcal{C}$ comme un foncteur $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$.

Soit E un ensemble. On note Δ^E le simplexe euclidien standard sur E, c'est-à-dire l'espace topologique

$$\{\sum_{e \in E} x_e e, \ x_e \in [0,1], x_e = 0 \text{ pour presque tout } e, \ \sum_E x_e = 1, \} \quad .$$

On obtient un espace topologique quasi-cosimplicial :

$$\underline{\Delta} \ : \ \Delta^{[0]} \underset{\delta^1}{\overset{\delta^0}{\rightrightarrows}} \Delta^{[1]} \overset{\rightarrow}{\rightrightarrows} \Delta^{[2]} \cdots$$

en prenant pour $\delta^i = \underline{\Delta}(d_i)$ les applications évidentes.

Pour un ensemble quasi-simplicial S, on considère l'espace topologique $S_k \times \Delta^k$ (où S_k est vu comme ensemble discret), puis la relation d'équivalence $\sim$ sur $\coprod S_k \times \Delta^k$ définie par

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow$$
$$\text{il existe un morphisme } m \text{ de } \Delta \text{ tel que } x = S(m)(x') \text{ et } y' = \underline{\Delta}(m)(y) \quad .$$

L'espace quotient par cette relation est noté $|S|$ et nommé *réalisation géométrique de S*.

D'autre part, à un ensemble quasi-simplicial donné S, on peut associer le groupe abélien quasi-simplicial suivant :

$$\mathbf{Z}[S] \ : \ \mathbf{Z}[S_0] \overset{d_0}{\underset{d_1}{\leftleftarrows}} \mathbf{Z}[S_1] \leftleftarrows \mathbf{Z}[S_2] \cdots$$

Posant $\partial = \sum(-1)^{i+1}d_i$ on obtient le *complexe de chaînes* de S.

$$C_\bullet(S) \ : \ \mathbf{Z}[S_0] \xleftarrow{\partial} \mathbf{Z}[S_1] \xleftarrow{\partial} \mathbf{Z}[S_2] \xleftarrow{\partial} \cdots$$

On constate alors que l'homologie du complexe de chaines de S, et l'homologie singulière de $|S|$ coïncident.

Soit X un complexe simplicial ou un ensemble quasi-simplicial et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de sous-complexes telle que $\bigcup_I X_i = X$.

On lui associe son nerf $\mathrm{N}(R)$. C'est-à-dire le complexe simplicial dont les sommets sont $\mathcal{V}(\mathrm{N}(R)) = I$ et dont les simplexes sont

$$\mathcal{S}(\mathrm{N}(R)) = \{\text{sous-ensembles finis } J \text{ de } I \text{ tels que } \cap_J X_j \neq \phi\} \quad .$$

La démonstration du théorème suivant est calquée sur son pendant pour les CW-complexes ([**3**] VII-4-4) :

Théorème 1.1. — *Soit X un ensemble quasi-simplicial et $R = (X_i)_{i\in I}$ un recouvrement*

1. *Si les intersections quelconques de X_i sont soit vides, soit acycliques, l'homologie réduite du complexe X et celle du nerf du recouvrement sont isomorphes.*
2. *Si les intersections de i quelconques des sous-complexes du recouvrement sont $n-i+1$-acycliques ou vides pour $i \geq 1$, l'homologie réduite du complexe X et celle du nerf du recouvrement sont les mêmes en degrés inférieurs ou égaux à n.*
3. *Si toutes les intersections de i quelconques des sous-complexes du recouvrement sont $n-i+1$-acycliques, $i \geq 1$, X est n-acyclique.*

1.2. Relations d'adjacence. — Soit X un ensemble muni d'une relation d'adjacence $\perp$, c'est à dire une relation symétrique telle que $x \perp y$ implique $x \neq y$. On note $\mathrm{S}(X)$ l'ensemble des suites finies d'éléments de E deux à deux adjacents. À une telle suite $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_k)$ est associée la longueur $l(\underline{x}) = k + 1$. On note $S_k(X)$ l'ensemble des suites de longueur $k + 1$.
Cet ensemble est muni de deux structures. D'une part, c'est un ensemble ordonné pour l'ordre des sous-suites. On peut lui associer une première réalisation géométrique, que l'on notera $\|\mathrm{S}(X)\|$.
Soient $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_k)$ un élément de $\mathrm{S}_k(X)$ et i un entier ; on notera $(x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_k)$ la suite $\underline{x}$ privée du terme x_i. Les applications

$$\begin{array}{cccc} d_i : & \mathrm{S}_k(X) & \to & \mathrm{S}_{k-1}(X) \\ & (x_0, \ldots, x_k) & \mapsto & (x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_k) \end{array}$$

font de $\mathrm{S}(X)$ un ensemble quasi-simplicial

$$S(X) \ : \ S_0(X) \overset{d_0}{\underset{d_1}{\leftleftarrows}} S_1(X) \leftleftarrows S_2(X) \cdots$$

On associe donc à X une seconde réalisation géométrique, celle de cet ensemble quasi-simplicial, que l'on notera $|\mathrm{S}(X)|$.
On vérifie alors que $\|\mathrm{S}(X)\|$ est la subdivision barycentrique de $|\mathrm{S}(X)|$. En particulier, ces deux espaces topologiques ont même type d'homotopie.
Pour un élément x d'un ensemble X muni d'une relation d'adjacence $\perp$, on note

$$\mathrm{Ad}_X(x) = \{x' \in X, x \perp x'\} \quad .$$

De même pour une partie P de X, on note $\mathrm{Ad}_X(P)$ pour l'intersection des sous-ensembles $\mathrm{Ad}_X(x)$, x parcourant P. Si l'ensemble X est bien défini par le contexte on écrira plutôt $x^\perp$ et $P^\perp$. Pour deux parties P et P' de X, on écrira $P \perp P'$ si P' est contenu dans $P^\perp$.

On rappelle qu'un espace topologique est dit -1-acyclique s'il est non-vide.
On dira qu'un ensemble muni d'une relation d'adjacence X est *k-acyclique* si $|S(X)|$ est k-acyclique.
On dira qu'un ensemble non vide muni d'une relation d'adjacence X est *fortement k-acyclique* pour $k \geq 0$ si $P^\perp$ est $k - \mathrm{card}(P) + 1$-acyclique pour toute partie $P \subset X$ avec $\mathrm{card}(P) \geq 2$. On étend cette définition en disant que tous les ensembles non vides sont fortement -1-acycliques.

Lemme 1.2. — *Si X est fortement k-acyclique, alors*

1. *X est k-acyclique,*
2. *$x^{\perp}$ est $(k-1)$-acyclique, pour tout $x \in X$.*

Démonstration :

Introduisons quelques notations. Soit X un ensemble muni d'une relation d'adjacence. On considère l'ensemble ordonné

$$U_x = S(x^{\perp}) \cup \{(x, x_1, \dots x_k),\ k \geq 0, (x_1, \dots, x_k) \in S(x^{\perp})\}$$

et pour une partie P de X,

$$U_P = \cap_{x \in P} U_x \quad .$$

Notons que les $\|U_x\|$ recouvrent $\|S(X)\|$. Un sous-ensemble P de X étant donné, on note P_0 l'ensemble ordonné discret $\{x \in P, x \in \mathrm{Ad}_P(P - \{x\})\}$. Alors on vérifie sans mal que l'on a un isomorphisme

$$U_P \simeq P_0 \star S(\mathrm{Ad}_X(P)) \quad .$$

(On rappelle que le *joint* de deux ensembles ordonnés $(X_1, \leq_1)$ et $(X_2, \leq_2)$ est l'ensemble $X_1 \coprod X_2$ muni de la relation d'ordre $\leq$ suivante :

$$x \leq x' \text{ ssi l'on est dans l'un des cas : } \begin{cases} x \in X_1,\ x' \in X_1 & x \leq_1 x', \\ x \in X_2,\ x' \in X_2 & x \leq_2 x', \\ x \in X_1,\ x' \in X_2 & . \end{cases}$$

Ce nouvel ensemble ordonné est noté $X_1 \star X_2$, et sa réalisation géométrique est isomorphe au joint des réalisations de X_1 et X_2.)

L'ensemble ordonné U_x est le joint de $\{x\}$ et de $x^{\perp}$. Sa réalisation géométrique $\|U_x\|$ est donc contractile.

Démontrons le premier point. D'après le théorème 1.1.3, il suffit de vérifier que pour chaque partie P de X, $\|U_P\|$ est $k - \mathrm{card}(P) + 1$-acyclique. Si $\mathrm{card}(P) = 1$, on vient de voir que $\|U_P\|$ est contractile. Sinon, puisque $\|U_P\|$ est isomorphe au joint de P_0 et $\|S(P^{\perp})\|$, il est suffisant de vérifier que $\|S(P^{\perp})\|$ est $k - \mathrm{card}(P) + 1$-acyclique. C'est l'hypothèse.

Mutatis mutandis, nous obtenons la démonstration du second point. □

Proposition 1.3. — *Soit X un ensemble muni d'une relation d'adjacence. Si $P^{\perp}$ est fortement $k-1$-acyclique pour toute partie P à deux éléments de X, alors X est fortement k-acyclique.*

Démonstration : Il faut vérifier que $P^{\perp}$ est $(k - \mathrm{card}(P) + 1)$-acyclique pour tout sous-ensemble de X de cardinal au moins 2.
Si le cardinal de P est 2, c'est une conséquence du premier point du lemme précédent joint à l'hypothèse de forte $k-1$-acyclicité pour $P^{\perp}$.
Si le cardinal de P est au moins 3, on écrit $P = \{x, y\} \bigsqcup (P - \{x, y\})$.
On a alors $\mathrm{Ad}_X(P) = \mathrm{Ad}_{\mathrm{Ad}_X(\{x,y\})}(P - \{x, y\})$ qui est $k - \mathrm{card}(P) + 1$-acyclique si $\mathrm{card}(P) = 3$ d'après le lemme précédent, et est par hypothèse $k - \mathrm{card}(P) + 2$-acyclique sinon. □
On en déduit immédiatement le

Théorème 1.4. — *Soit X un ensemble muni d'une relation d'adjacence. Supposons que $P^{\perp}$ est non vide pour toute partie P de la forme $\{x_1, y_1, ..., x_l, y_l\}$ avec $1 \leq l \leq k$ et $\{x_i, y_i\} \perp \{x_j, y_j\}$ et $(i \neq j)$. Alors X est fortement $(k-1)$-acyclique.*

2. Suite spectrale d'homologie équivariante et théorèmes de stabilité

2.1. Suite spectrale d'homologie équivariante. — L'outil principal de la démonstration du théorème 1 est la suite spectrale d'homologie G_n-equivariante de X_n. Rappelons-en la construction et les propriétés.

Soient G un groupe et X un G-ensemble quasi-simplicial.

On considère une résolution libre $P_\bullet \to \mathbf{Z} \to 0$ de $\mathbf{Z}$ par des G-modules et le complexe de chaînes $C_\bullet \to \mathbf{Z} \to 0$ de X, et l'on forme le double-complexe $E^0_{p,q} = P_p \otimes_{\mathbf{Z}[G]} C_q$.
Deux suites spectrales en sont dérivées :

– La suite spectrale "horizontale" (cf. [**3**] p. 172), obtenue en prenant d'abord l'homologie "selon" les morphismes fournis par $C_\bullet$. Comme P_p est libre pour tout p, le q-ième groupe d'homologie du complexe $P_p \otimes C_\bullet$ est égal à $P_p \otimes H_q(X)$. Sa seconde page s'exprime donc ainsi :

$$^{I}E^2_{p,q} = \mathrm{H}_p(G, \mathrm{H}_q(X)) \quad .$$

– La suite spectrale "verticale" (cf. [**3**] p. 173), obtenue en prenant d'abord l'homologie "selon" les morphismes fournis par $P_\bullet$. Notons que C_q admet la description suivante :

$$C_q = \oplus_{\sigma \in \Sigma_q} \mathbf{Z}[G/\mathrm{stab}_G(\sigma)]$$

où Σ_q est un ensemble de représentants pour l'action de G sur les q-simplexes de X. D'après le lemme de Shapiro, le p-ième groupe d'homologie du complexe $P_\bullet \otimes C_q$ est donc isomorphe à

$$^{II}E^1_{p,q} = \oplus_{\sigma\in\Sigma_q} \mathrm{H}_p(\mathrm{stab}_G(\sigma), \mathbf{Z}) \quad .$$

– La différentielle $^{II}d^1_{p,q}$ est facile à comprendre : le stabilisateur d'un q-simplexe σ_q est en effet contenu dans le stabilisateur de chacune de ses faces $d_i(\sigma_q)$. Pour chaque telle face, il existe un élément $\gamma \in G$ et un $q-1$-simplexe $\sigma_{q-1} \in \Sigma_{q-1}$ tels que $\gamma.d_i(\sigma_q) = (-1)^i\sigma_{q-1}$. On en déduit un homomorphisme de groupe $\mathrm{stab}_G(\sigma_q) \to \mathrm{stab}_G(\sigma_{q-1})$. L'ambiguité sur γ est un élément de $\mathrm{stab}_G(\sigma_{q-1})$. L'homomorphisme induit en homologie ne dépend donc pas du choix de γ. La différentielle $^{II}d^1_{p,q}$ est la somme alternée des ces homomorphismes.

– Ces deux suites spectrales convergent vers la même limite

$$\begin{array}{ccc} ^{I}E^2_{p,q} & \Rightarrow & \mathrm{H}^G_{p+q}(X) \\ ^{II}E^1_{p,q} & \Rightarrow & \mathrm{H}^G_{p+q}(X) \end{array} \quad .$$

L'aboutissement $\mathrm{H}^G_*(X)$ est en général appelé homologie G-équivariante de X. Géométriquement, $\mathrm{H}^G_*(X)$ est l'homologie de la construction de Borel $\mathrm{E}G \times_G X$. Les deux suites spectrales correspondent respectivement aux applications $\mathrm{E}G \times_G X \to \mathrm{B}G$ et $\mathrm{E}G \times_G X \to X/G$. Il est facile de voir que les “edge”-homomorphismes

$$\mathrm{H}^G_p(X) \to {}^{I}E^2_{p,0} = \mathrm{H}_p(G) \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_p(\mathrm{stab}_G(\sigma_0)) = {}^{II}E^1_{p,0} \to \mathrm{H}^G_p(X)$$

sont induits par les applications $X \to *$ et $(\mathrm{stab}_G(\sigma_0), \sigma_0) \hookrightarrow (G, X)$).

2.2. Stabilité homologique. — Soit $(G_n)_n$ une suite de groupes tels que G_n est un sous-groupe de G_{n+1}. On note dans la suite, pour simplifier, $h^n_k = \mathrm{H}_k(G_n)$ et $i^n_k \ : \ h^n_k \to h^{n+1}_k$ l'homomorphisme induit par l'inclusion. On rappelle que l'on veut démontrer :

Théorème 2.1. — *Supposons que pour chaque n, il existe un ensemble quasi-simplicial X_n muni d'une action de G_n vérifiant la propriété suivante :*

(C) : le groupe G_{n+1} agit transitivement sur les simplexes d'une dimension donnée de X_{n+1} et le stabilisateur d'un simplexe de dimension k est isomorphe à G_{n-k}.

Posons

$$f_k := \inf\{n,\ \forall n' \geq n,\ i_l^{n'}\ \textit{est} \begin{cases} \textit{un isomorphisme} & \textit{si } l \leq k \\ \textit{un épimorphisme} & \textit{si } l = k+1 \end{cases} \}$$

$$a_k := \inf\{l,\ \forall l' \geq l,\ X_{l'}\ \textit{est } k\textit{-acyclique}\}$$

$$m_k = \sup\ \{a_k - 1,\ \sup_{1 \leq i \leq \frac{k+1}{2}} f_{k-2i+1} + 2i\}$$

Alors

$$f_k \leq m_k\ .$$

Pour $k = 0$, c'est évident. Supposons le théorème démontré pour $k-1$, et démontrons le pour k. Soit $n \geq m_k$. On considère la suite spectrale d'homologie G_{n+1}-équivariante de X_{n+1}.

Suite spectrale horizontale. Comme $n+1 \geq a_k$, X_{n+1} est k-acyclique, et nous avons ${}^{I}E^2_{p,0} = \mathrm{H}_p(G_{n+1}) = h_p^{n+1}$ et ${}^{I}E^2_{p,q} = 0$ pour $0 < q \leq k$. Nous en déduisons en particulier que l'edge-homomorphisme $\mathrm{H}_p^{G_{n+1}}(X_{n+1}) \to \mathrm{H}_p(G_{n+1}) = h_p^{n+1}$ est un isomorphisme pour $p \leq k$, et un épimorphisme pour $p = k+1$

Suite spectrale verticale. Dans notre cas, Σ_q est réduit à un unique élément, disons $\sigma_q = (e_{n-q+1}, ..., e_{n+1})$ pour chaque q et nous avons $\mathrm{stab}_{G_{n+1}}(\sigma_q) = G_{n-q}$.
En particulier, $d^1_{p,q}\ : h_p^{n-q} = \mathrm{H}_p(G_{n-q}) \to \mathrm{H}_p(G_{n-q+1}) = h_p^{n-q+1}$ est nulle si q est impair et coïncide avec i_p^{n-q}, si q est pair.

Nous en déduisons que ${}^{II}E^2_{p,0} = \mathrm{H}_p(G_{n-1})$ pour chaque p et ${}^{II}E^2_{p,q} = 0$ dès que $n-q \geq f_{p-1}+1$ si q est impair et $n-q \geq f_p$ si q est pair. Puisque l'on a choisi $n \geq \sup_{1 \leq i \leq \frac{k}{2}}\{f_{k-2i+1} + 2i\}$, nous sommes dans la situation suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
p \\
h^n_{k+1} & h^{n-1}_{k+1} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{k+1} \arrow[l, "?"'] & h^{n-3}_{k+1} \arrow[l, "0"'] & & \\
h^n_{k} & h^{n-1}_{k} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{k} \arrow[l, two heads] & h^{n-3}_{k} \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "?"'] & \\
h^n_{k-1} & h^{n-1}_{k-1} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{k-1} \arrow[l, "\simeq"'] & h^{n-3}_{k-1} \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "?"'] & \\
h^n_{k-2} & h^{n-1}_{k-2} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{k-2} \arrow[l, "\simeq"'] & h^{n-3}_{k-2} \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, two heads] & \\
 & & & & \arrow[l, "\simeq"'] & \\
h^n_{2} & h^{n-1}_{2} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{2} \arrow[l, "\simeq"'] & h^{n-3}_{2} \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "\simeq"'] & p=k+1-q \\
h^n_{1} & h^{n-1}_{1} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{1} \arrow[l, "\simeq"'] & h^{n-3}_{1} \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "\simeq"'] & \\
h^n_{0} & h^{n-1}_{0} \arrow[l, "0"'] & h^{n-2}_{0} \arrow[l, "\simeq"'] & h^{n-3}_{0} \arrow[l, "0"'] & \arrow[l, "\simeq"'] & q
\end{tikzcd}$$

Ainsi, les seules différentielles atteignant $E^r_{p,0}$ sont triviales pour $p \leq k$, et $E^\infty_{0,q} = E^1_{0,q} = \mathrm{H}_q(G_{n-1})$ pour $q \leq k$ et $r \geq 0$. Nous en déduisons l'isomorphisme (resp. l'épimorphisme) convoité $\mathrm{H}_p(G_n) \to \mathrm{H}_p(G_{n+1})$ pour $p \leq k$ (resp. $p = k+1$). □

3. Formes bilinéaires sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$

3.1. Notations et définitions. — Soit A un anneau commutatif. On appellera *A-module bilinéaire* un A-module Λ libre de type fini muni d'une forme bilinéaire symétrique b_Λ, *non singulière* (*i.e.* telle que l'application canonique $\Lambda \to \mathrm{Hom}(\Lambda, A)$ est injective). Son groupe d'automorphismes est noté $\mathrm{O}(\Lambda)$.

À une base $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de Λ est associée la matrice $[b(e_i, e_j)]_{i,j}$, appelée *matrice de Gram de* (Λ, b_Λ) *dans la base* $\underline{e}$. La classe du déterminant de cette matrice dans $(A - \{0\})/(A^\times)^2$ ne dépend pas du choix de la base $\underline{e}$ et est appelée *déterminant* de (Λ, b_Λ) (et notée $\mathrm{dét}(\Lambda)$).

Exemples et notations :

1. Soient ε un élément de A ne divisant pas 0 et n un nombre entier naturel ; on notera $\mathrm{I}_n(A,\varepsilon)$ le A-module bilinéaire (A^n, b), où b est la forme bilinéaire de matrice de Gram (dans la base canonique) :
$$I_n^\varepsilon := \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-1} \end{pmatrix} \quad .$$
2. Le plan hyperbolique sur un anneau A, c'est-à-dire le A-module bilinéaire (A^2, b), où b est la forme bilinéaire de matrice de Gram (dans la base canonique) :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
sera noté $\mathrm{H}(A)$.
3. Soit S une matrice symétrique $n \times n$ à coefficients dans un anneau A, de déterminant ne divisant pas 0. On note $< S >$ le A-module bilinéaire (A^n, b) où b a S pour matrice de Gram dans la base canonique.

Désormais, l'anneau A est supposé principal. On note K son corps de fractions, $\mathcal{V}$ l'ensemble des places de K et $\mathcal{S}$ l'ensemble des places non archimédiennes de K. Pour p dans $\mathcal{S}$ on note A_p la complétion de A en p, K_p le corps des fractions de A_p ; si p est archimédienne, on note $A_p = K_p$ la complétion de K en p. (Dans la suite, A sera en fait toujours l'anneau $\mathbf{Z}$, une de ses completions $\mathbf{Z}_p$, ou $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$.)
Pour p dans $\mathcal{V}$, on note Λ_p la localisation $A_p \otimes_A \Lambda$, c'est-à-dire le A_p-module de rang n muni de la forme bilinéaire symétrique induite par b_Λ.

Soit B un sous-anneau de K contenant A, et Λ un B-module bilinéaire. Un A-*réseau* L sur Λ est un sous-A-module de Λ de rang maximal.
Pour un tel A-réseau L, on note $L^\sharp$ le sous-ensemble (habituellement appelé *dual* de L) de $K \otimes_B \Lambda$ (qui hérite d'une forme bilinéaire encore notée b_Λ) défini par la condition :
$$\mu \in L^\sharp \;\Leftrightarrow\; \forall \lambda \in L,\, b_\Lambda(\mu, \lambda) \in A \quad .$$
Le réseau L est dit *entier* si $L \subset L^\sharp$ et *unimodulaire* si $L = L^\sharp$.

Soit T un A-module de torsion muni d'une forme bilinéaire e à valeurs dans K/A. Cette forme induit un morphisme de groupes $T \to \hat{T} = \mathrm{Hom}_A(T, K/A)$. Si cet homomorphisme est un isomorphisme, on dit que

T est un A-*module d'enlacement.*
Son rang (*i.e.* le nombre minimal de générateurs) est noté $\mathrm{rg}(T)$.

Soit L un A-réseau entier sur un B-module bilinéaire Λ. Alors la restriction de la forme bilinéaire de Λ à L en fait un A-module bilinéaire. On peut donc parler de son déterminant.

Exemples :

1. Soient a et u des nombres entiers premiers entre eux. Le $\mathbf{Z}$-module de torsion $\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}$ muni de la forme bilinéaire e à valeurs dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ définie par $e(\bar{1},\bar{1}) = \frac{u}{a}$ est un module d'enlacement que nous noterons $(\mathbf{Z}/a\mathbf{Z}, \frac{u}{a})$.
2. À un A-réseau entier L sur un K-module bilinéaire Λ, on associe le *résidu* de L : c'est le quotient $L^\sharp/L$ muni de la forme bilinéaire induite, à valeurs dans K/A. C'est un A-module d'enlacement que nous noterons $\mathrm{rés}(L)$.
3. On remarque qu'un A-module bilinéaire est un A-réseau entier sur lui même, si bien que l'on peut parler de son résidu.

3.2. Deux résultats utiles. —

Théorème 3.1. — *Soit* Λ *un* $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$*-module bilinéaire de dimension au moins* 5 *tel que* $\mathrm{rg}(\mathrm{rés}(\Lambda)) \leq \dim(\Lambda) - 2$. *Alors un* $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$*-module bilinéaire* Λ' *est isomorphe à* Λ *si et seulement si* $\mathbf{R}\otimes\Lambda'$ *et* $\mathbf{R}\otimes\Lambda$ *sont isomorphes,* $\mathrm{rés}(\Lambda)$ *est isomorphe à* $\mathrm{rés}(\Lambda')$ *et* $\mathrm{dét}(\Lambda)$ *égale* $\mathrm{dét}(\Lambda')$.

On en déduit par exemple le corollaire suivant pour $n \geq 5$:

Corollaire 3.2. — *Un* $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$*-module bilinéaire de dimension* n*, unimodulaire et défini positif est isomorphe à* $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], 1)$ *ou à* $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], 2)$.

(Pour $n \leq 4$, le résultat est déjà valable sur $\mathbf{Z}$: un $\mathbf{Z}$-module bilinéaire défini positif de déterminant 1 (resp. 2) et de dimension au plus 4 est de la forme $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}, 1)$ (resp. $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}, 2)$). Voir [**10**], paragraphe II.2. On en déduit le théorème ci dessus en remarquant qu'il existe sur un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module unimodulaire M de déterminant ε un $\mathbf{Z}$-réseau entier maximal L de déterminant ϵ. On a alors $M = \mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbf{Z}} L$.)

Démonstration du théorème 3.1.

Montrons d'abord que pour $p \neq 2$, Λ_p et Λ'_p sont isomorphes. Pour $p = \infty$, c'est l'une des hypothèses. Pour $p \neq 2, \infty$, c'est une conséquence directe du fait (cf. par exemple [**11**] 92.2) qu'un $\mathbf{Z}_p$-module bilinéaire L s'écrit sous la forme

$$L \simeq \perp_{i\geq 0} < p^i > \otimes \mathrm{I}_n(\mathbf{Z}_p, \varepsilon_i) \quad , \quad \varepsilon_i \in \mathbf{Z}_p^\times \quad .$$

Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et V un K-module bilinéaire. On rappelle qu'il existe un homomorphisme $\Theta \ : \ \mathrm{O}(V) \to K^\times/(K^\times)^2$ appelé *norme spinorielle*, caractérisé par ses valeurs sur les symétries :

$$\Theta(s_u) = u.u, \qquad .$$

(Soit u un vecteur non isotrope de V. La notation s_u désigne la symétrie $x \to x - 2\frac{u.x}{u.u}u$.)

Rappelons maintenant les résultats suivants :

1. (c.f. [**4**] XI-3-7) Soit $p \neq 2$; si L est un $\mathbf{Z}_p$-module bilinéaire de dimension 2 isomorphe à $< a_1, a_2 >$ avec $v_p(a_1) = v_p(a_2)$, alors $\mathbf{Z}_p^* \subset \Theta(\mathrm{O}(L))$.
2. Théorème d'approximation forte (c.f. [**11**] 104.5, 102.9, 102.10) Soit Λ un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module bilinéaire. Si $\mathbf{Z}_2 \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$ est isotrope et si $\mathbf{Z}_p^*/(\mathbf{Z}_p^*)^2 \subset \Theta(\Lambda_p)$ pour tout p de $\mathcal{V}$ alors le genre de Λ (*i.e.* l'ensemble des modules bilinéaires Λ' tels que l'ont ait $\Lambda_v \simeq \Lambda'_v$ pour tout $v \in \mathcal{V}$) contient uniquement la classe de Λ (*i.e.* l'ensemble des modules bilinéaires Λ' tels que l'on ait $\Lambda \simeq \Lambda'$).

Les hypothèses du théorème montrent que pour $p \neq 2$, Λ_p contient un facteur direct de la forme $< a_1, a_2 >$ tel que $v_p(a_1) = v_p(a_2) = 1$. Le point 1 ci-dessus montre que les hypothèses du point 2 sont vérifiées. Le résultat s'ensuit immédiatement. □

Théorème 3.3. — *Soit T un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module d'enlacement de rang r. Il existe un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module bilinéaire L défini positif tel que* $\mathrm{rés}(L) = T$ *et* $\dim(L) \leq r + 1$.

Nous utiliserons dans la démonstration de ce théorème le lemme suivant :

Lemme 3.4. — *Soit T un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module d'enlacement de rang r.*
Il existe des entiers impairs $(a_i)_{i=1\ldots r}$ et des unités u_i de $\mathbf{Z}/a_i\mathbf{Z}$ tels que

$$T \simeq \perp_i (\mathbf{Z}/a_i\mathbf{Z}, \frac{u_i}{a_i})$$

Démonstration :

Montrons d'abord que c'est vrai pour un module d'enlacement p-primaire T. Le module sous-jacent à T est alors une somme $\oplus_{i=1}^{r}\mathbf{Z}/p^{k_i}\mathbf{Z}$. Comme T est un module d'enlacement, il existe un élément f de T tel que les homomorphismes

$$\begin{array}{rcccc} \pi & : & \oplus_{i=1}^{r}\mathbf{Z}/p^{k_i}\mathbf{Z} & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ & & (x_1,\ldots,x_r) & \mapsto & \frac{x_r}{p^{k_r}} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcccc} ev_f & : & \oplus_{i=1}^{r}\mathbf{Z}/p^{k_i}\mathbf{Z} & \to & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ & & x & \mapsto & e(f,x) \end{array}$$

coïncident. Ainsi avons-nous trouvé deux éléments f et $e := (0,\ldots,0,1)$ de T tels que $e(f,e) = \frac{1}{p^{k_r}}$.
Montrons maintenant qu'il existe un élément v de T et une unité α de $\mathbf{Z}/p^{k_r}\mathbf{Z}$ tels que $e(v,v)$ égale $\frac{\alpha}{p^{k_r}}$. Si $\varepsilon := e.e$ ou $\varphi := f.f$ est une unité, c'est démontré. Sinon, $(e+f).(e+f) = \varepsilon + \varphi + 2$ est une unité.
Ainsi avons nous isolé un facteur direct orthogonal de la forme $(\mathbf{Z}/p^{k_r}\mathbf{Z}, \frac{\alpha}{a_r})$. Une récurrence descendante sur le rang de T clôt la démonstration du cas p-primaire.

Cas d'un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module d'enlacement T quelconque : le théorème de Bezout montre que les sous-modules p-primaires T_p, p parcourant l'ensembles des nombres premiers impairs, sont des modules d'enlacement, et en somme directe orthogonale. On déduit le lemme de cette remarque ajoutée au résultat ci-dessus pour ces composantes p-primaires □.

Nous utiliserons aussi le théorème suivant, dû à Gauss (voir par exemple [**4**] IX.1.2)

Théorème 3.5. — *Soient n un entier naturel et d un nombre rationnel non nul, et pour chaque nombre premier p (resp. pour $p = \infty$), soit $L(p) \subset V(p)$ un $\mathbf{Z}_p$-réseau sur un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension n muni d' une forme bilinéaire non dégénérée (resp. un espace quadratique réel non dégénéré), d'invariant de Hasse-Minkowski c_p. Si*

1. $\mathrm{dét}(L(p)) = d$,
2. *c_p est trivial pour presque tout p et $\prod_p c_p = 1$,*

alors il existe un $\mathbf{Z}$-module bilinéaire L de dimension n, de déterminant d tel que pour chaque p, $L_p \simeq L(p)$.

Démonstration du théorème 3.3. Soient (sous les hypothèses du théorème) $(a_i)_i$ les entiers donnés par le lemme ci-dessus. Posons

$$\xi = \begin{cases} 2 & \text{si tous les } a_i \text{ sont congrus à } 1 \pmod 4 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Si ξ égale 1, certains a_i vérifient la congruence $a_i \equiv -1 \mod 4$. Convenons dans ce cas que l'un d'entre eux est a_1.
Nous prétendons qu'il existe un $\mathbf{Z}$-module bilinéaire L, défini positif de dimension $k+1$ et de déterminant ξa, tel que le résidu de $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \otimes_{\mathbf{Z}} L$ soit le module d'enlacement T. Montrons pour cela qu'il existe une unité v de $\mathbf{Z}_2$ telle que l'on puisse appliquer le théorème ci-dessus à

$$L(p) = \begin{cases} \mathrm{I}_{k+1}(\mathbf{R}, 1) & \text{pour } p = \infty \ , \\ < \xi \prod_i u_i, u_1 a_1, \ldots, u_k a_k > & \text{si } p \text{ divise l'un des } a_i \ , \\ < \xi, a_1, \ldots, a_k > & \text{si } p \text{ ne divise aucun } a_i \ , \\ < \xi v, v a_1, a_2, \ldots, a_k > & \text{pour } p = 2 \end{cases}$$

Il suffit de vérifier que v peut être choisi tel que le produit des invariants de Hasse Minkowski $\prod_p c_p$ égale 1. On note $(x, y)_2$ le symbole de Hilbert de deux nombres 2-adiques. On constate en calculant c_2 qu'il suffit de vérifier que si l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_2^\times & \to & \{\pm 1\} \\ v & \mapsto & (\xi a_1, v)_2 \end{array}$$

est surjective, autrement dit que ξa_1 n'est pas dans l'orthogonal pour $(-,-)_2$ de (l'image dans $\mathbf{Q}_2^\times/(\mathbf{Q}_2^\times)^2$ de) $\mathbf{Z}_2^\times$. Cet orthogonal est le sous-groupe $\{1, 5\}$. On a choisi ξ pour que ξa_1 ne soit jamais 5.
Le résidu de $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}] \otimes L$, où L est le module bilinéaire fourni par le théorème de Gauss, est bien isomorphe à T. □

3.3. Vérification de la propriété A_k pour l'anneau $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. — On choisit $\varepsilon \in \{1, 2\}$ et l'on note Λ_n le module bilinéaire $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], \varepsilon)$.

Pour un module bilinéaire Λ, on note $X(\Lambda)$ l'ensemble des vecteurs unitaires de Λ, et l'on décrète que deux tels éléments sont adjacents s'ils sont orthogonaux.

Proposition 3.6. — *Soit A l'anneau $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$. La condition A_k est vérifiée pour $n \geq 3k+6$. (Ainsi, pour tout $n \geq 3k+6$, X_n est k-acyclique.)*

cette proposition découle directement de résultat suivant :

Lemme 3.7. — *Soit $L \subset \Lambda_n$ un sous-module. Si l'inégalité*

$$n - \dim(L) \geq \inf(\mathrm{rg}(\mathrm{rés}(L)) + 3, 5)$$

est vérifiée, alors $X(L^\perp)$ n'est pas vide.

Démonstration : si $\mathrm{rg}(\mathrm{rés}(L))$ est nul, L est un facteur direct de Λ, et $L^\perp$ est de la forme $\mathrm{I}_{n-\dim(L)}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], \varepsilon')$. Ceci nous permet de trouver un vecteur unitaire dans $L^\perp$.
Sinon, on considère le module rés$(L^\perp)$. D'après [**2**] Cor.A.1.11, rés$(L^\perp) \perp$ rés(L) contient un sous module I tel que $I = I^\perp$. Les projections $I \to$ rés(L) et $I \to$ rés$(L^\perp)$ fournissent alors un isomorphisme

$$\mathrm{rés}(L^\perp) \simeq < -1 > \otimes\, \mathrm{rés}(L) \quad .$$

Le théorème 3.3 montre donc que rés$(L^\perp)$ est réalisable par un $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}]$-module bilinéaire P tel que $\dim P \leq \mathrm{rg}(\mathrm{rés}(L)) + 1$. Le théorème 3.1 fournit alors un isomorphisme $L \simeq P \perp U$ avec U unimodulaire, et, par hypothèse $\dim U \geq 2$. Le corollaire 3.2 montre dès lors que U représente 1, ce qui prouve le lemme. □

Remarques :

– Nous savons que le résultat ainsi obtenu n'est pas optimal. Si $\varepsilon = 1$ et $n = 5$ par exemple, on sait que Γ_n est engendré par les sous-groupes finis stabilisateurs dans Γ_5 des $\mathbf{Z}$-réseaux $\mathrm{I}_5(\mathbf{Z}, 1)$ et $\mathrm{D}_4 \perp \mathrm{I}_1(\mathbf{Z}, 1)$ sur Λ_5. Il suffit alors pour obtenir la connexité de $|X_5|$ de prouver que si γ est un élément d'un de ces stabilisateurs, et si u est un vecteur unitaire, alors u et $\gamma(u)$ sont reliés dans $|X_5|$, ce qui est facile.

– Nous avons démontré la proposition 3 pour les modules $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ (resp. $\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], 2)$). Le résultat de stabilité est donc valable pour les groupes d'automorphismes $\mathrm{O}(\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])) = \mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ et $\mathrm{O}(\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], 2))$. On déduit de l'isomorphisme $< 2, 2 > \simeq < 1, 1 >$ que le k-iéme groupe d'homologie de $\mathrm{O}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}])$ est isomorphe à celui de $\mathrm{O}(\mathrm{I}_n(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}], 2))$ pour n suffisament grand.

– Soit A l'anneau des entiers d'un corps global F, I le groupe des idèles de F, P l'ensemble des places de F. Lorsque S est un sous-ensemble de P, notons $I(S)$ l'ensemble des idèles de F en S. Si F est un corps de nombres, notons D le sous-groupe d'indice fini de $F^\times$ constitué des éléments positifs à toutes les places réelles de F, et posons $D = F^\times$ si F est un corps de fonctions.
D'après le théorème de finitude du groupe des classes, on sait qu'il existe un ensemble fini S de places tel que $I = F^\times I(S)$ (autrement dit $A[S^-1]$ est principal). Quitte à élargir un peu S, on peut donc supposer que S est principal, $I = DI(S)$ et que S contient toutes les places dyadiques.
Alors pour tout T contenant S, les résultats de ce paragraphe (et donc le théorème de stabilité) se généralisent à l'anneau $A[T^{-1}]$. Dans le cas de $A = \mathbf{Z}$, on peut choisir

$S = \{2\}$. (cf. l'exemple 101 :13 de [**11**] (attention : la notation qu'O'Meara utilise pour $I(S)$ est J_F^{P-S})).

– La méthode développée dans cet article s'applique évidemment aussi aux groupes unitaires. Par exemple, le k-ième groupe d'homologie de $\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, i]^n)$ (où $\mathbf{Z}[\frac{1}{2}, i]$ est muni de l'involution standard) stabilise dès que n est supérieur ou égal à $3k + 4$.

Références

[1] A. Adem, R.J. Milgram, *Cohomology of finite groups*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 309. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[2] J. Barge, J. Lannes, F. Latour, P. Vogel, Λ-sphères. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **7** (1974), 463-505.

[3] K.S. Brown, *Cohomology of groups*. Graduate Texts in Mathematics, **87**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[4] J. W. S. Cassels *Rational quadratic forms*. London Mathematical Society Monographs, **13**. Academic Press, Inc., London-New York, 1978.

[5] R.M. Charney, Homology stability for GL_n of a Dedekind domain. *Invent. Math.* **56** (1980), 1-17.

[6] R.M. Charney, A generalization of a theorem of Vogtmann. *Proceedings of the Northwestern conference on cohomology of groups (Evanston, Ill., 1985). J. Pure Appl. Algebra* **44** (1987), 107-125.

[7] J.H. Gunawardena, J. Lannes, S. Zarati, Cohomologie des groupes symétriques et application de Quillen. *Advances in homotopy theory (Cortona, 1988), 61-68, London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **139**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[8] H.-W. Henn, J. Lannes, En préparation.

[9] M. Kneser, Strong approximation. *1966 Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups* (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965) pp. 187-196 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[10] J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric bilinear forms*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[11] O. T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms*. Second printing, corrected. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band **117**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[12] B. Mirzaii, W. van der Kallen , Homology stability for symplectic groups, http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/.

[13] M. Nakaoka, Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups. *Ann. of Math.* **71**, 1960, 16–42.

[14] D. Quillen, Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group. *Adv. in Math.* **28** (1978), 101–128.

[15] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris 1970.

[16] W. van der Kallen, Homology stability for linear groups. *Invent. Math.* **60** (1980), 269–295.

[17] K. Vogtmann, Homology stability for $\mathrm{O}_{n,n}$. *Comm. Algebra* **7** (1979), 9-38.

[18] K. Vogtmann, A Stiefel complex for the orthogonal group of a field. *Comment. Math. Helv.* **57** (1982), 11–21.

Projet d'article, 2003.

G. Collinet, Laboratoire J.-A. Dieudonné, Universit de Nice - Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France