

L'Attracteur de Whitehead

Elisabeth E. Pécou¹

Section de Mathématiques, Université de Genève, 2-4, Rue du Lièvre,
Case Postale 240, CH 1211- Genève 24, Suisse.

Résumé: Dans cette Note, on s'intéresse aux plongements du tore solide tels que l'intersection des images itérées du tore donne un continu de Whitehead. On dégage certaines propriétés dynamiques, en particulier en relation avec l'entropie topologique. Ainsi, on montre que l'entropie est plus grande que $\log 2$. Bien que par de nombreux aspects, ces objets s'apparentent au solénoïde de Smale, leur comportement dynamique est beaucoup plus complexe: par exemple, ce ne sont pas des attracteurs hyperboliques et ils ne possèdent pas une structure de Cantor transverse. De plus, en supposant une certaine symétrie de construction (naturelle), on prouve qu'il n'y a pas de système transitif qui atteint la valeur minimale de l'entropie.

Abstract: In this Note, we are interested in those embeddings of the solid torus, whose intersection of forward images of the torus gives a Whitehead continuum. We point out some dynamical properties, particularly in relation with topological entropy. We show that entropy is greater than $\log 2$. According to many aspects, those attractors are similar to the Smale solenoid, but their dynamics is much more complex: for instance, they are not hyperbolic attractors and they do not have a transverse Cantor structure. Furthermore, assuming some natural symmetry condition, we prove that transitive systems with minimal entropy do not exist.

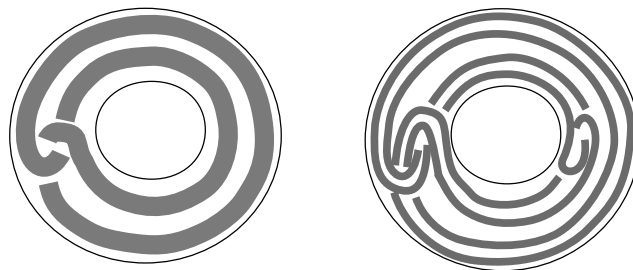


Figure 1: Un plongement de Whitehead: première et deuxième itérations

¹L'auteur remercie le Fond National Suisse pour la Recherche Scientifique et le IIIème Cycle Roman de Mathématiques pour leur soutien financier.

1 Introduction

Soit \mathbf{T} un tore solide de l'espace euclidien \mathbf{R}^3 , difféomorphe au tore solide standard $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{D}^2$. On appelle *disque transverse* à \mathbf{T} un disque topologique fermé dont l'intérieur est contenu dans l'intérieur de \mathbf{T} et le bord est un méridien du tore qui borde \mathbf{T} . Un *secteur* est un domaine de \mathbf{T} délimité par deux disques transverses disjoints. Une *âme* est une courbe simple, fermée, contenue dans l'intérieur de \mathbf{T} , et dont la classe d'homotopie est le générateur du groupe fondamental de \mathbf{T} .

Choisissons une orientation des méridiens du tore bordant \mathbf{T} . Etant donné un plongement Φ de \mathbf{T} dans lui-même qui préserve l'orientation et un disque Δ transverse à \mathbf{T} , on dit qu'un secteur du tore solide $\Phi(\mathbf{T})$ bordé par deux disques D_0 et D_1 est une *anse* basée sur Δ si $D_0 \cup D_1 \subset \Delta$ et les courbes orientées bordant D_0 et D_1 n'ont pas la même orientation dans Δ .

L'entrelac de Whitehead est l'exemple classique d'entrelac non trivial de deux noeuds de nombre d'enlacement nul (voir [2]):

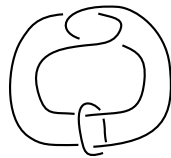


Figure 2: L'entrelac de Whitehead

Définition: Soit $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^3$ un tore solide et $\Phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ un plongement de classe C^1 , préservant l'orientation. On dit que Φ est un plongement de Whitehead si l'image par Φ d'une âme de \mathbf{T} forme avec un méridien du tore bordant \mathbf{T} l'entrelac de Whitehead. On appelle *attracteur de Whitehead* l'ensemble:

$$\mathbf{W}(\Phi) = \bigcap_{n \geq 0} \Phi^n(\mathbf{T}),$$

Par construction, $\mathbf{W}(\Phi)$ est compact, connexe et totalement invariant par Φ . Remarquons qu'une application de Whitehead est homotope à l'application nulle et donc, d'après la formule de Lefschetz, possède au moins un point fixe (voir, par exemple, [3]).

L'attracteur de Whitehead possède un objet de comparaison naturel: le solenoïde de Smale (voir, par exemple, [4]). Ce dernier est obtenu en prenant l'intersection des images itérées d'un tore solide par un plongement qui consiste à enrouler deux fois le tore dans lui-même. On sait que l'entropie topologique du solenoïde est toujours supérieure ou égale à $\log 2$. C'est une conséquence, à travers un résultat de Manning ([5], voir également l'article de Bowen [1] qui donne un raffinement

du résultat de Manning), du fait que le rayon spectral de la matrice d'homologie correspondante dans le H_1 est égal à 2. Dans la Proposition 1, on montre que l'entropie topologique d'un plongement de Whitehead est aussi minorée par $\log 2$. Dans le cas d'un plongement de classe C^∞ , ce résultat est une conséquence directe d'un résultat de Yomdim ([6]). Cependant, le cas continu appelle une démarche beaucoup plus délicate, car l'action induite en homologie et en homotopie est triviale. Pour aller plus avant dans l'étude des propriétés de l'entropie topologique, on considère la classe des plongements de Whitehead qui commutent avec la symétrie par rapport à un plan qui coupe le tore suivant deux disques transverses. Pour ceux-là, on montre qu'il existe des systèmes réalisant le minimum de l'entropie, mais qu'aucun d'entre eux ne peut posséder une orbite dense (Proposition 2). On se démarque ainsi de la dynamique du solénoïde: il existe un exemple explicite de solénoïde d'entropie $\log 2$ qui possède une orbite dense.

Dans une dernière partie, on s'intéresse aux propriétés d'hyperbolicité. On montre que contrairement au solénoïde, l'attracteur de Whitehead, lorsqu'il est de dimension 1, ne peut pas posséder une structure hyperbolique globale (Proposition 3).

2 Entropie

Il existe plusieurs définitions de l'entropie topologique d'un système; rappelons celle qui nous servira dans la suite et qui est due à Bowen (voir, par exemple, [4]). Soit X un espace normé et $\Phi : X \rightarrow X$, une application continue. Un ensemble $G \subset X$ est dit (n, ϵ) -générateur si:

$$\forall x \in X \quad \exists y \in G \quad | \quad \| \Phi^k(x) - \Phi^k(y) \| < \epsilon \quad k = 0, \dots, n.$$

On dit dans ce cas que l'orbite de x est *pistée* par celle de y .

Soit $r(n, \epsilon)$ le cardinal du plus petit ensemble (n, ϵ) -générateur (si X est compact, ce nombre est fini). On définit l'entropie topologique de Φ par:

$$h_{\text{top}}(\Phi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r(n, \epsilon).$$

Proposition 1 *Soit $\Phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ un plongement de Whitehead, alors:*

$$h_{\text{top}}(\Phi) \geq \log 2.$$

Preuve: Soit G un ensemble (n, ϵ) -générateur de cardinal minimal $r(n, \epsilon)$ et a la borne inférieure des longueurs euclidiennes des âmes du tore solide. La démonstration de la proposition devient claire si preuve est faite de l'inégalité suivante:

Lemme 1 Pour tout entier n et pour tout $\epsilon > 0$, on a :

$$a 2^n \leq 2 \epsilon r(n, \epsilon)$$

Preuve du lemme: Soit γ une âme du tore \mathbf{T} . Par compacité, γ est pistée par un nombre fini de points $x_0, \dots, x_{s-1} \in G$. Pour $k = 0, \dots, n$, on note $P(\Phi^k(\gamma))$ la courbe fermée, linéaire par morceaux, joignant successivement les points $\Phi^k(x_0), \Phi^k(x_1), \dots, \Phi^k(x_{s-1})$ et $\Phi^k(x_0)$. Les points doubles n'existant pas de manière générique, on suppose, quitte à bouger un peu les points x_i que la courbe $P(\Phi^k(\gamma))$ est toujours simple. Plusieurs remarques sont nécessaires:

- i/ On peut supposer que le nombre s de points pistant γ est plus petit que $r(n, \epsilon)$: en effet, si $s > r(n, \epsilon)$, on a $x_i = x_j$ pour deux indices $i \neq j$ et la courbe $P(\gamma)$ forme deux boucles, dont l'une est homotopiquement triviale. Il suffit donc de raccourcir la courbe γ de sorte qu'elle soit pistée par la boucle non triviale de $P(\gamma)$. Voir la figure 3.

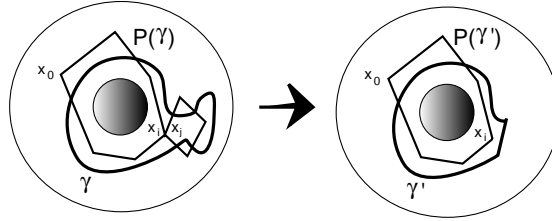


Figure 3: Comment raccourcir γ lorsque $s > r(n, \epsilon)$

- ii/ Pour tout k , la courbe $\Phi^k(\gamma)$ fait au moins 2^k tours dans le tore, donc, si $|\cdot|$ est mis pour la longueur euclidienne d'une courbe:

$$a 2^k \leq |\Phi^k(\gamma)|.$$

- iii/ Pour $i = 0, \dots, s-1$ et pour $k = 1, \dots, n$, la distance de $\Phi^k(x_i)$ à $\Phi^k(x_{i+1})$ est plus petite ou égale à 2ϵ . Ainsi:

$$|P(\Phi^k(\gamma))| = \sum_{i=0}^{s-2} |x_{i+1} - x_i| + |x_0 - x_{s-1}| \leq 2 \epsilon s,$$

Considérons $\Phi^n(\gamma)$. Si $P(\Phi^n(\gamma))$ lui est isotope alors:

$$a 2^n \leq |P(\Phi^n(\gamma))| \leq 2 \epsilon s \leq 2 \epsilon r(n, \epsilon).$$

Le lemme est alors démontré.

Sinon, soit $k < n - 1$ le plus petit entier tel que les courbes $\Phi^{k+1}(\gamma)$ et $P(\Phi^{k+1}(\gamma))$ ne sont pas isotopes (voir la figure 4). Dans ce cas, il existe deux sommets distincts x_i et x_j de $P(\gamma)$ tels que $j - i > 2$ et :

$$|\Phi^{k+1}(x_i) - \Phi^{k+1}(x_j)| < 2\epsilon \quad \text{et} \quad |\Phi^{k+1}(x_{i+1}) - \Phi^{k+1}(x_{j-1})| < 2\epsilon.$$

On effectue une opération qui consiste à substituer $\Phi^{k+1}(\gamma)$ par deux courbes isotopes à $\Phi^k(\gamma)$ de la manière suivante: on choisit un point $y_i \in \gamma$ pisté par x_i et un point $y_j \in \gamma$ pisté par x_j . Ils satisfont à :

$$|\Phi^{k+1}(y_i) - \Phi^{k+1}(y_j)| < 2\epsilon.$$

De même, on choisit un point $y_{i+1} \in \gamma$ pisté par x_{i+1} et un point $y_{j-1} \in \gamma$ pisté par x_{j-1} . Ils vérifient:

$$|\Phi^{k+1}(y_{i+1}) - \Phi^{k+1}(y_{j-1})| < 2\epsilon.$$

On ôte à $\Phi^{k+1}(\gamma)$, l'arc allant de y_i à y_{i+1} , puis l'arc de y_{j-1} à y_j . Enfin, on rajoute le segment joignant y_i à y_j et le segment joignant y_{i+1} à y_{j-1} (voir figure 4). On obtient deux courbes, faisant chacune 2^k tours dans \mathbf{T} : la première, γ_1^k , est pistée par $x_0, \dots, x_i, x_j, \dots, x_{s-1}$, et la deuxième, γ_2^k , par x_{i+1}, \dots, x_{j-1} . De plus, comme k est minimal, γ_l^k et $P(\gamma_l^k)$ sont isotopes ($l = 1, 2$). On obtient ainsi:

$$a(2^k + 2^k) = a2^{k+1} \leq |P(\gamma_1^k)| + |P(\gamma_2^k)| \leq 2\epsilon((s+i-j+1) + (j-1-i)) = 2\epsilon s.$$

Pour chacune des courbes γ_l^k , on reprend le même algorithme: on appelle k_1^l le plus petit entier $0 \leq k_1^l \leq n - k - 1$ tel que $\Phi^{k_1^l+1}(\gamma_l^k)$ n'est pas isotope à $P(\Phi^{k_1^l+1}(\gamma_l^k))$ et on lui substitue deux courbes isotopes à $\Phi^{k_1^l}(\gamma_l^k)$ et on recommence. \square

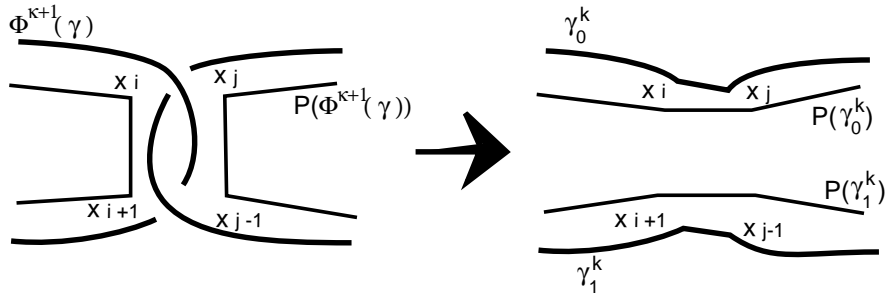


Figure 4: la courbe pistant γ ne forme plus un entrelac de Whitehead

Des plongements de Whitehead dont l'entropie est égale à $\log 2$ existent. On peut en construire un de la manière suivante: considérons un plongement possédant

un point fixe p attractif et deux points fixes cols, q_1 et q_2 , dont les variétés stables coupent \mathbf{T} suivant deux disques transverses, D_0 et D_1 . Appellons Σ_1 le secteur de \mathbf{T} contenant p bordé par D_0 et D_1 et $\Sigma_0 = \Phi^{-1}(\Sigma_1)$, et imposons que Σ_0 contienne deux anses basées sur chaque disque le bordant. Pour calculer l'entropie, il faut se souvenir que l'entropie d'un système est portée par son ensemble non-errant, qui est ici contenu dans le complémentaire de $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ et dont la dynamique peut être conduite de manière identique à celle du fer à cheval de Smale.

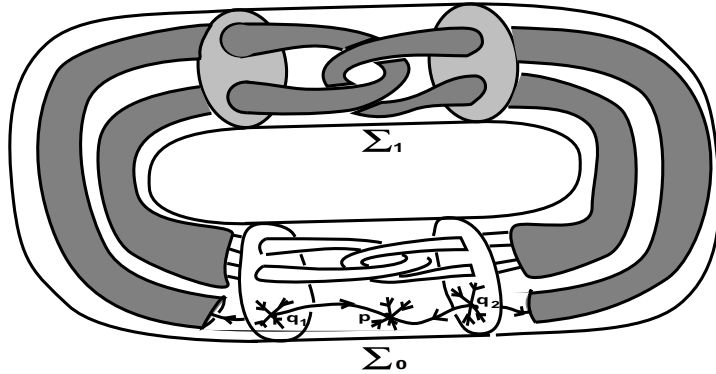


Figure 5: Un exemple d'attracteur de Whitehead avec entropie minimale

Le résultat de la Proposition 1, qui concerne tous les plongements de Whitehead, peut être affiné si on impose une symétrie dans la construction, à savoir: il existe un plan coupant le tore suivant deux disques transverses tel que, si s désigne la symétrie par rapport à ce plan, on a $s \circ \Phi = \Phi \circ s$. Notons que l'exemple donné ci-dessus peut être réalisé en respectant une telle symétrie.

Proposition 2 *Soit $\Phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ un plongement de Whitehead commutant avec une symétrie de réflexion par rapport à un plan transverse à \mathbf{T} . Si Φ est topologiquement transitif, alors:*

$$h_{\text{top}}(\Phi) > \log 2.$$

On rappelle qu'une application continue $\Phi : X \rightarrow X$ sur un espace topologique X est dite *topologiquement transitif* si, étant donnés deux ouverts U et V de X , il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\Phi^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Notons que lorsque X est un espace métrique compact, ceci est équivalent à l'existence d'une orbite dense.

Preuve: La preuve découle du lemme suivant:

Lemme 2 *Il existe n_0 tel que pour toute âme γ de \mathbf{T} :*

$$|\Phi^{n_0}(\gamma)| \geq (2^{n_0} + 2)a.$$

Preuve du lemme: Le plan de symétrie coupe le tore \mathbf{T} suivant deux disques transverses D_0 et D_1 tels que $\Phi(D_1) \subset D_0$ et $\Phi(D_0) \subset D_1$. Appelons A et B les secteurs de \mathbf{T} déterminés par D_0 et D_1 et notons Σ_1 une anse de $\Phi(\mathbf{T})$ basée sur D_1 . Notons que pour tout $n > 1$, $\Phi^n(\Sigma_1)$ est une anse (du tore $\Phi^n(\mathbf{T})$) basée sur D_0 . Par transitivité de Φ , il existe $n_0 > 1$ tel que $\Phi^{n_0}(\Sigma_1) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$. Ainsi, pour toute âme γ du tore \mathbf{T} , $\Phi^{n_0}(\gamma)$ passe $2^{n_0} + 2$ fois par un des secteurs A ou B , et en fait, pour des raisons de symétrie, par chaque secteur. Chaque secteur ayant pour longueur minimale $a/2$, on obtient l'inégalité désirée. \square

Soit $\Psi = \Phi^{n_0}$ et γ une âme de \mathbf{T} ; on déduit du lemme que $|\Psi^n(\gamma)| \geq (2^{n_0} + 2)^n a$. Comme pour la preuve de la Proposition 1, considérons G un ensemble (n, ϵ) -générateur de Ψ , de cardinal minimal $r(n, \epsilon)$. Soit s points pistant γ , $P(\gamma)$, la courbe linéaire par morceaux qui joint ces points, et $P(\Psi^n(\gamma))$ la courbe linéaire par morceaux joignant les n -ièmes images de ces points. Grâce à la symétrie de Ψ , il est clair que $\Psi^n(\gamma)$ et $P(\Psi^n(\gamma))$ sont isotopes, donc l'inégalité de longueur précédente reste vraie pour $P(\Psi^n(\gamma))$. Ceci est suffisant pour conclure que $h_{\text{top}}(\Phi) > \log 2$. \square

3 Hyperbolicité

Proposition 3 *Un attracteur de Whitehead de dimension topologique 1 n'est pas hyperbolique.*

Preuve: Soit $\Phi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ un plongement de Whitehead et supposons qu'il existe une structure hyperbolique sur $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\Phi)$. L'attracteur étant de dimension 1, la dimension du sous-espace stable en un point de \mathbf{W} est égal à 2. D'autre part, il existe $\epsilon > 0$ (uniforme par compacité de \mathbf{W}) tel que le voisinage de \mathbf{W} , $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathbf{W}} B(x, \epsilon)$ est feuilleté par les variétés stables et ce feuilletage est invariant par Φ . Pour n assez grand, $\Phi^n(\mathbf{T})$ est inclu dans \mathcal{V} et, en chaque point $x \in \mathbf{W}$, la composante connexe contenant x dans $\Phi^n(\mathbf{T}) \cap B(x, \epsilon)$ est un secteur du tore $\Phi^n(\mathbf{T})$. La variété instable du point x étant contenue dans l'attracteur, elle est contenue dans toutes les images de \mathbf{T} . Donc, comme l'attracteur est de dimension 1, il existe n tel que le diamètre de $\Phi^n(\mathbf{T})$ est assez petit pour que le plan des directions stables en x coupe $\Phi^n(\mathbf{T})$ suivant un disque transverse et la variété stable également. Soit alors γ une longitude de $\Phi^n(\mathbf{T})$ transverse en tout point au feuilletage stable. Son image doit encore être transverse à ce feuilletage (car il est invariant), mais, c'est impossible car γ est transformée par Φ en une courbe homotopiquement triviale (il est facile de se convaincre, par exemple, en passant au revêtement universel, que dans ce cas il existe un point de tangence avec le feuilletage). \square

Références bibliographiques

- [1] Bowen R., “Entropy and the fundamental group”, *The structure of attractors in dynamical systems*, **Lecture notes in Mathematics**, **668**, pp. 21–29, Springer, Berlin, 1978.
- [2] Burde G., Zieschang H., **Knots**, de Gruyter studies in Mathematics **5**, Berlin, 1985.
- [3] Doubrovine B., Novikov S., Fomenko A., **Géométrie contemporaine, Méthodes et applications**, **2**, Mir, 1982.
- [4] Katok A., Hasselblatt B., **Introduction to the modern theory of dynamical systems**, Cambridge University Press, 1995.
- [5] Manning A., “Topological entropy and the first homology group”, *Dynamical systems-Warwick 1974*, **Lecture notes in Mathematics**, **468**, pp. 185–190., Springer, Berlin, 1975.
- [6] Yomdim Y., “Volume growth and entropy”, *Israel Journal of Mathematics*, **57**,

=====

e-mail: Elisabeth.Pecou@math.unige.ch