Support des mesures de Patterson-Sullivan en rang supérieur

Paul ALBUQUERQUE

0. Introduction

Les mesures de Patterson-Sullivan associées à un sous-groupe discret Γ d'isométries, ont été étudiées de manière extensive dans le cas des espaces hyperboliques réels $\mathbb{H}^n$ ([Su], [Ni]). Elles reflètent la densité, à grande échelle, des Γ-orbites. On en tire des informations de nature géométrique et ergodique. Ces mesures permettent, en effet, d'établir un lien entre la croissance des Γ-orbites et des propriétés géométrique de l'ensemble limite de Γ, telle que sa dimension de Hausdorff. On peut, par ailleurs, également construire à l'aide des mesures de Patterson-Sullivan, des mesures invariantes pour le flot géodésique sur la surface quotient $\mathbb{H}^n/\Gamma$. Ces mesures invariantes sont d'entropie maximale, cette entropie étant aussi liée à la croissance des Γ-orbites.

Certaines notions ont par la suite été généralisées aux espaces hyperboliques au sens de Gromov ([C], voir aussi [Bou] pour les espaces CAT(-1)). Les mesures de Patterson-Sullivan permettent donc d'investiguer la distribution des Γ-orbites en courbure négative. Apparemment, le cas d'espaces avec de la courbure nulle, a été peu traîté. Les espaces riemanniens symétriques de type non-compact de rang supérieur constituent une bonne classe d'espaces à étudier. Ils contiennent en effet énormément de sous-espaces euclidiens non-triviaux. Néanmoins, leur géométrie comporte d'importants aspects hyperboliques.

Dans les espaces hyperboliques, le support des mesures de Patterson-Sullivan associées à des sous-groupes discrets cocompacts s'identifie au bord géométrique de l'espace. Dans ce papier, nous montrons que pour les espaces riemanniens symétriques de type non-compact de rang supérieur, ce support s'identifie naturellement à son bord de Furstenberg, lequel est distinct de son bord géométrique (tandis qu'ils coïncident en rang un). Pour être plus précis, ces mesures sont concentrées sur l'orbite, sous le groupe des isométries de l'espace, du "barycentre" d'une chambre de Weyl à l'infini. Cette orbite coupe les chambres de Weyl à l'infini transversalement. En fait, ces mesures se concentrent sur le lieu du bord géométrique qui correspond aux directions où la divergence des géodésiques est la plus forte, ou de manière équivalente, aux directions où la dilatation du volume riemannien est maximale.

1. Mesures de Patterson-Sullivan

Citons [Ni] comme référence pour ce paragraphe.

Soit (X,d) un espace métrique CAT(0) localement compact. Le bord géométrique $X(\infty)$ de X est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes. On note $\overline{X} := X \cup X(\infty)$ la compactification associée.

Soit $\Gamma < Isom(X)$ un sous-groupe discret du groupe des isométries de (X,d). On définit la **série de Poincaré** associée à Γ:

$$g_s(x,x_0) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma x_0)} \quad s\in\mathbb{R}, \quad x, x_0 \in X,$$

et l'**exposant critique** δ de Γ : $\quad \delta = \delta(\Gamma) := \inf\{s \in \mathbb{R} \,|g_s(x,x_0) < \infty\}$.

Considérons à présent la famille $\{\mu_{s,x}\}_{s>\delta}$ de mesures orbitales sur $\overline{X}$:

$$\mu_{s,x} := \frac{1}{g_s(x,x_0)} \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x,\gamma x_0)} D_{\gamma x_0}, \quad s > \delta,$$

où $D_{\gamma x_0}$ est une masse de Dirac en γx_0.

Supposons que la série de Poincaré diverge en $s = \delta$ (i.e. $g_\delta(x,x_0) = \infty$) et notons $M^+(X(\infty))$ le cône des mesures boréliennes positives finies sur $X(\infty)$. La famille d'applications Γ-équivariantes

$$\begin{aligned} X &\to M^+(\overline{X}) \\ x &\mapsto \mu_{s,x} \end{aligned}, \ \delta < s \leq \delta + 1,$$

est équicontinue et uniformément bornée sur les compacts ([Bu]). Cette famille est donc relativement compact dans l'espace des applications continues $\mathcal{C}^0(X, M^+(\overline{X}))$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Soit $x \mapsto \mu_x$ un point d'accumulation de cette famille lorsque $s \searrow \delta$. La mesure μ_x a les propriétés suivantes:

. μ_x est supporté dans l'ensemble limite de Γ (i.e. $\mathrm{supp}(\mu_x) \subset \overline{\Gamma x_0} \cap X(\infty)$).

. Soit $x, x' \in X$ et $\xi \in X(\infty)$ représenté par le rayon géodésique $r(t)$ avec $r(0) = x_0$. Alors:
$$\frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x}(\xi) = e^{-\delta B_\xi(x,x')},$$
où $B_\xi(x,x') = \lim_{t\to\infty}[d(x,r(t)) - d(x',r(t))]$ est la distance horosphérique entre x et x' par rapport à ξ.

. $\gamma^*\mu_x = \mu_{\gamma x}, \quad \forall\gamma\in\Gamma$.

Supposons maintenant que la série de Poincaré converge en $s = \delta$ (i.e. $g_\delta(x,x_0) < \infty$). Une construction de Patterson ([Pa]), consistant à ajouter une pondération faiblement croissante aux mesures orbitales $\mu_{s,x}$, permet alors d'obtenir, après passage à la limite, une famille de mesures également notée $\{\mu_x\}_{x\in X}$, jouissant des mêmes propriétés.

On appelle **densité de Patterson-Sullivan** (associée au groupe Γ) une famille $\mu = \{\mu_x\}_{x\in X}$ construite ainsi, et **mesure de Patterson-Sullivan** un élément μ_x de cette famille.

Dans la suite, nous nous restreindrons au cas où X est un espace riemannien symétrique de type non-compact de rang ≥ 2 et Γ un réseau irréductible. Nous caractériserons dans ce cas, le support des mesures de Patterson-Sullivan.

2. Les espaces riemanniens symétriques

2.1.Généralités

Un **espace riemannien symétrique** X est une variété riemanienne, complète, avec la propriété que la symétrie riemannienne s_x en x, est une isométrie globale de X, quelquesoit $x \in X$.

Appelons G la composante connexe de l'identité du groupe des isométries riemanniennes de X. Elle admet une structure de groupe de Lie.

Soit x_0 un point-base fixé et $K \subset G$ le sous-groupe d'isotropie de x_0. Alors K est un sous-groupe compact et l'application:

$$G/K \to X$$
$$gK \mapsto gx_0$$

est un difféomorphisme analytique ([Hel1], p.208).

Définissons $\sigma \in Aut(G)$ par $\sigma(g) = s_{x_0} g s_{x_0}$. Dénotons par $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) l'algèbre de Lie de G (resp. K) et $\sigma_* \in Aut(\mathfrak{g})$ la dérivée en $e \in G$ de σ. Alors $\mathfrak{k} = \{\xi \in \mathfrak{g} | \sigma_*(\xi) = \xi\}$. Si on pose $\mathfrak{p} = \{\xi \in \mathfrak{g} | \sigma_*(\xi) = -\xi\}$, on a la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. La projection naturelle $\pi : G \to X$ induit un isomorphisme $d_e\pi|_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p} \to T_{x_0}X$ (on a $d_e\pi(\mathfrak{k}) = \{0\}$). On peut alors identifier, via les translations à gauche, les espaces tangents à X avec $\mathfrak{p}$ ([Hel1], p.208).

Notons $Q : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et $Q_{\mathfrak{p}}$ (resp. $Q_{\mathfrak{k}}$) la restriction de Q à $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}$).La forme $Q_{\mathfrak{k}}$ est définie négative, car le groupe K est compact. Les relations de crochet entre $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ implique que $Q(\mathfrak{k}, \mathfrak{p}) = 0$.

On dit que X est de **type non-compact** (resp. **compact, euclidien**) si $Q_{\mathfrak{p}}$ est définie positive (resp. définie négative, identiquement nulle).

On a le théorème de décomposition suivant:

Théorème 1: ([Hel1], p.244)
Soit X un espace riemannien symétrique simplement connexe. Alors X est isométrique à un produit riemannien $X_- \times X_+ \times X_0$ où X_- est un espace symétrique de type non-compact, X_+ est un espace symétrique de type compact et X_0 est un espace euclidien.

Ces différents types se caractérisent en termes de courbure sectionnelle. Par exemple, X est de type non-compact, si et seulement si, X est sans facteur euclidien de courbure sectionnelle ≤ 0.

Dorénavant X sera supposé de type non-compact. En particulier $\mathfrak{g}$ est semi-simple et la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une **décomposition de Cartan** de $\mathfrak{g}$. Relevons encore que le centre $Z(G)$ de G est trivial et que la finitude de $Z(G)$ entraîne que K est un sous-groupe compact maximal de G. A une décomposition de Cartan, on peut associer un automorphisme

$$\nu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad \text{tel que } \nu|_{\mathfrak{k}} = id\,, \quad \nu|_{\mathfrak{k}} = -id\,,$$

appelé **involution de Cartan**. On peut alors définir à l'aide de la forme de Killing un produit scalaire $\mathrm{Ad}(K)$-invariant sur $\mathfrak{g}$:

$$\langle Y|Z\rangle = -Q(Y,\nu(Z)) .$$

On obtient ainsi une métrique riemannienne G-invariante sur X.

2.2.Espaces riemanniens symétriques de type non-compact

Ce rappel théorique se base essentiellement sur [BGS] (appendix 5).

Structure des plats et décomposition en sous-espaces de racines

Un **plat** dans X est une sous-variété euclidienne totalement géodésique de dimension maximale. On appelle cette dimension le **rang** de X; on le notera $\mathrm{rg}(X)$.

Soit F un plat contenant x_0. On dit que $c:\mathbb{R}\to F$ avec $c(0)=x_0$, est une **géodésique régulière**, si F est l'unique plat qui la contient, et une **géodésique singulière**, si elle est contenue dans plusieurs plats.

L'espace tangent à F en x_0 correspond à un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{p}$. On a alors $F = Ax_0$ où $A=\exp\mathfrak{a} < G$. Réciproquement, tout sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$ correspond à un plat par x_0. Les sous-espaces abéliens maximaux de $\mathfrak{p}$ sont conjugués par l'action de $\mathrm{Ad}(K)$.

En diagonalisant simultanément les opérateurs autoadjoints $\{\mathrm{ad}H:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g},\ H\in\mathfrak{a}\}$, on obtient la décomposition en sous-espaces de racines:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}\mathfrak{g}_\alpha ,$$

où, pour $\alpha\in\mathfrak{a}^*$ un élément du dual de $\mathfrak{a}$, on a posé

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{Y\in\mathfrak{g}|\mathrm{ad}H(Y)=\alpha(H)Y,\ \forall H\in a\}\quad (\textbf{sous-espace de racines}),\qquad m_\alpha = dim\,\mathfrak{g}_\alpha,$$

$$\Lambda=\{\alpha\in\mathfrak{a}^*\backslash\{0\}|\mathfrak{g}_\alpha\neq\{0\}\}\quad (\textbf{ensemble des racines}).$$

Le vecteur $H\in\mathfrak{a}$ est tangent en x_0 à une géodésique singulière, si et seulement si, il existe $\alpha\in\Lambda$ tel que $\alpha(H)=0$. L'ensemble des éléments singuliers $\mathfrak{a}_{sing}=\{H\in\mathfrak{a}|\,\exists\alpha\in\Lambda$ avec $\alpha(H)=0\}$ est donc une réunion finie d'hyperplans $\{H\in\mathfrak{a}|\alpha(H)=0\}$, où $\alpha\in\Lambda$. Son complémentaire $\mathfrak{a}_{reg}=\mathfrak{a}\backslash\mathfrak{a}_{sing}$ est l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{a}$.

On appelle **chambre de Weyl** de $\mathfrak{a}$ une composante connexe de $\mathfrak{a}_{reg}$. Une chambre de Weyl de F de sommet x_0 est l'image, via l'exponentielle riemannienne en x_0, d'une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$.

Fixons une chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$ dans $\mathfrak{a}$ et posons $A^+=\exp\mathfrak{a}^+$. Ce choix détermine un sous-ensemble de racines positives $\Lambda^+=\{\alpha\in\Lambda|\alpha(H)>0,\quad\forall H\in\mathfrak{a}^+\}$.
On peut lui associer un sous-groupe unipotent

$$N=\exp\mathfrak{n}\quad \text{où } \mathfrak{n}=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda^+}\mathfrak{g}_\alpha \text{ est une sous-algèbre nilpotente de } \mathfrak{g}.$$

On a alors la **décomposition d'Iwasawa** ([Hel1], chap.9, §1): $\quad G=KAN$.

Bord de Furstenberg

Soit M le centralisateur et M' le normalisateur de A dans K. M est le sous-groupe de G qui fixe le plat F point par point, tandis que M' fixe x_0 et laisse F globalement invariant. Le **groupe de Weyl** de $W = M'/M$ est un groupe fini qui agit simplement transitivement sur les chambres de Weyl de (F, x_0).

Considérons à présent l'espace CX de toutes les chambres de Weyl de X. L'action de G sur CX est transitive et M est le groupe d'isotropie de la chambre de Weyl A^+x_0 de F. On peut donc identifier CX avec l'espace homogène G/M.

On dira que deux chambres de Weyl sont asymptotes si elles sont à distance de Hausdorff bornée. On définit alors le **bord de Furstenberg** de X comme l'ensemble des classes d'équivalence de chambres de Weyl asymptotes ([Mos], [Fu]). Il existe une unique chambre de Weyl de sommet x_0 dans chaque classe d'équivalence .

Le groupe G agit transitivement sur le bord de Furstenberg de X et $P = MAN$ est le groupe d'isotropie de la classe de A^+x_0 (i.e. $P = \{g \in G \mid gA^+x_0$ asymptote à $A^+x_0\}$). En fait, P est aussi le groupe d'isotropie de n'importe quel point ξ de $A^+x_0(\infty) \subset X(\infty)$. Ainsi on peut identifier le bord de Furstenberg de X à $G/P = K/M$, mais également à l'orbite $G\xi = K\xi$ de ξ dans $X(\infty)$.

3. Support des mesures de Patterson-Sullivan

Rappelons que $X = G/K$ est un espace symétrique de type non-compact de rang $\mathrm{rg}(X) \geq 2$ et $x_0 \in X$ un point-base fixé. On considère la densité de Patterson-Sullivan μ associée à un réseau irréductible Γ de G.

Notations:

On écrira $E(n,s) \asymp E'(n,s)$, s'il existe des constantes C_1, C_2 telles que $C_1 E(n,s) \leq E'(n,s) \leq C_2 E(n,s)$. Ces constantes seront toujours indépendantes de n et s. Lorsqu'il n'y aura pas lieu d'expliciter une constante, elle sera simplement notée *const*.

L'énoncé du théorème suivant dont nous donnons une démonstration, nous a été proposé par Marc Burger.

Théorème 2:

Soit μ la densité de Patterson-Sullivan associée à un réseau irréductible Γ de G. Alors

$$\mathrm{supp}(\mu_x) = Gc(\infty) = Kc(\infty), \quad \forall x \in X,$$

où $c(t) = \exp t(b/\|b\|)x_0$ et $b \in \mathfrak{a}^+$ est le vecteur dual à la forme linéaire $\sum_{\alpha \in \Lambda^+} m_\alpha \alpha$ (b est appelé **barycentre** *de la chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$).*

Preuve:

Les mesures de Patterson-Sullivan μ_x étant absolument continues les unes par rapport aux autres, on peut supposer $x = x_0$.

On définit le cône d'axe $u \in \mathfrak{a}^+$ ($\|u\| = 1$) et d'ouverture ψ:

$$\mathcal{C}_{u,\psi} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_{u,\psi}(n) \subset A^+ ,$$

$$\text{où} \quad \mathcal{C}_{u,\psi}(n) = \{\exp H | \langle H|u\rangle \geq \|H\| \cos\psi, \ n-1 \leq \|H\| < n, \ \ H \in \mathfrak{a}^+\},$$

et la couronne obtenue en enlevant à la boule de rayon n centrée en x_0 celle

de rayon $n-1$:
$$Cour(n) = B(x_0, n) \backslash B(x_0, n-1).$$
On commence par montrer que
$$\mu_{x_0}((K\mathcal{C}_{u,\psi}x_0)(\infty)) = 0\,,\ \text{si}\ \exp b \notin \mathcal{C}_{u,\psi},$$
i.e. $\mathrm{supp}(\mu_{x_0}) \subset Gc(\infty)$.
Dorénavant, on écrira simplement $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}(n)$) à la place de $\mathcal{C}_{u,\psi}$ (resp. $\mathcal{C}_{u,\psi}(n)$).
Comme μ_{x_0} est une limite faible de $\{\mu_{s,x_0}\}_{s>\delta}$ dans $\overline{X}$, on a ([Bil]):
$$\mu_{x_0}((K\mathcal{C}x_0)(\infty)) = \lim_{s\searrow\delta} \mu_{s,x_0}(K\mathcal{C}x_0).$$
On est donc ramené à estimer la série de Poincaré $g_s(x_0, x_0)$ et la série
$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x_0,\gamma x_0)} D_{\gamma x_0}(K\mathcal{C}x_0)\,.$$
Effectuons une première estimation:
$$g_s(x_0, x_0) \asymp \sum_{n>0} e^{-sn} |\Gamma x_0 \cap Cour(n)|\,,$$
$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-sd(x_0,\gamma x_0)} D_{\gamma x_0}(K\mathcal{C}x_0) \asymp \sum_{n>0} e^{-sn} |\Gamma x_0 \cap K\mathcal{C}(n)x_0|\,.$$
Un théorème de A.Eskin et C.Mac-Mullen ([Esk]), permet d'effectuer une deuxième estimation en approximant le nombre de points de l'orbite de Γx_0 dans $Cour(n)$ (resp. $K\mathcal{C}(n)x_0$) par le volume de $Cour(n)$ (resp. $K\mathcal{C}(n)x_0$).

Proposition 3:
Soit v_{max} le vecteur unité de $\exp^{-1}(\mathcal{C})$ qui maximise $\langle b|.\,\rangle$. Alors:
$$Vol(K\mathcal{C}(n)) \leq const \cdot n^{\mathrm{rg}(X)} e^{-\langle b|v_{max}\rangle n}, \quad \forall n > 0.$$
Plus précisément:
$$Vol(K\mathcal{C}(n)) \asymp n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad si\ \exp b \in \mathcal{C}, \quad \forall n > 0.$$
En particulier:
$$Vol(Cour(n)) \asymp n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad \forall n > 0.$$
Preuve: en annexe. □

Proposition 4:
$$\left.\begin{array}{l} |\Gamma x_0 \cap Cour(n)| \asymp Vol(Cour(n)) \\ |\Gamma x_0 \cap K\mathcal{C}(n)x_0| \asymp Vol(K\mathcal{C}(n)x_0) \end{array}\right., \quad \forall n > 0.$$
Preuve: en annexe. □

On a comme conséquence que

$$g_s(x_0, x_0) \asymp \sum_{n>0} n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{(-s+\|b\|)n} .$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} g_s(x_0, x_0) &= \infty \quad \text{pour } s \leq \|b\| \ , \\ g_s(x_0, x_0) &< \infty \quad \text{pour } s > \|b\| \ . \end{aligned}$$

Donc $\delta = \|b\|$ et Γ est de type divergent (i.e $g_\delta(x, x_0) = \infty$).

On peut maintenant achever la preuve du théorème.
Si $\exp b \notin \mathcal{C}$ (i.e. $\langle b|v_{max}\rangle < \|b\|$), alors en utilisant les propositions 3) et 4), on a:

$$\begin{aligned} \mu_{x_0}((K\mathcal{C}x_0)(\infty)) &= \lim_{s \searrow \delta} \frac{1}{g_s(x_0, x_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-sd(x_0, \gamma x_0)} D_{\gamma x_0}(K\mathcal{C}x_0) \\ &\leq const \cdot \lim_{s \searrow \delta} \left(\frac{\sum_{n>0} n^{\mathrm{rg}(X)} e^{(-s+\langle b|v_{max}\rangle)n}}{\sum_{n>0} n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{(-s+\|b\|)n}} \right) . \end{aligned}$$

Dans le passage à la limite $s \searrow \delta = \|b\|$, le numérateur reste fini tandis que le dénominateur diverge, car $\langle b|v_{max}\rangle < \|b\|$. Donc, $\mu_{x_0}((K\mathcal{C}x_0)(\infty)) = 0$. Nous avons ainsi montré que le support de μ_{x_0} est contenu dans $Kc(\infty)$ où $c(t) = \exp t(b/\|b\|)x_0$. Ce support est un fermé Γ-invariant dans $Kc(\infty)$. Or Γ agit minimalement sur $Kc(\infty)$ ([Mos]). Par conséquent, $\mathrm{supp}(\mu_{x_0}) = Kc(\infty) = Gc(\infty)$ (noter que $ANc(\infty) = c(\infty)$). $\square$

Corollaire 5:
Une densité de Patterson-Sullivan μ associée à un réseau Γ de G appartient à la classe de la mesure de probabilité K-invariante sur $Gc(\infty)$. En fait, μ_{x_0} est égal à cette mesure de probabilité K-invariante.

4. Unicité des densités de Patterson-Sullivan

Une **densité conforme** μ **Γ-invariante de dimension** β sur $X(\infty)$ (en abrégé, une **β-densité**) est une application continue Γ-équivariante

$$\begin{aligned} \mu : X &\to M^+(X(\infty)) \\ x &\mapsto \mu_x \end{aligned} \quad \text{telle que } \frac{d\mu_{x'}}{d\mu_x(\xi)} = e^{-\beta B_\xi(x, x')}, \ \forall\, x \in X,\ \xi \in X(\infty),$$

où $B_\xi(x, x')$ est la distance horosphérique entre x et x' par rapport à ξ.

La construction de Patterson, donnée au §1, fournit des exemples de densités conformes Γ-invariantes de dimension δ à support dans l'ensemble limite de Γ.

Rappelons que c est un rayon géodésique avec $\dot{c}(0) = b/\|b\|$.
Théorème 6 ([Al]):
Soit Γ un réseau irréductible de G. Alors $\delta = \|b\|$, et l'orbite $Gc(\infty) \subset X(\infty)$ est le support de toute δ-densité.

Il est important de mentionner que toute densité est forcément de dimension $\geq \delta$. Supposons que μ est une δ-densité. Alors l'action de Γ sur $Gc(\infty)$ est ergodique par rapport à μ ([Moo]). Il en découle qu'il existe une unique densité conforme Γ-invariante de dimension δ (à multiplication par une constante près). Celle-ci peut donc être obtenue par la construction de Patterson, ou directement à partir de la mesure de probabilité K-invariante sur $Gc(\infty)$. Si μ est une β-densité avec $\beta > \delta$, alors μ est singulière par rapport à la mesure de probabilité K-invariante sur $Gc(\infty)$. Pour plus de détails voir [Al].

5. Annexes

5.1.Formule d'intégration

Soit $X = G/K$ un espace symétrique de type non-compact de rang $\mathrm{rg}(X)$. Le groupe semi-simple G admet la décomposition suivante ([Hel1], chap.9, §1):

$$G = KAK \quad \text{(décomposition polaire)}.$$

Posons $G' = KA'K$ où $A' = \exp(\mathfrak{a}_{reg})$. Le sous-espace $X' = G'x_0$ est un ouvert dense de X et l'application:

$$\begin{aligned} K/M \times A^+ &\to X' \\ (kM, a) &\mapsto kax_0 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

Il en découle la formule d'intégration:
Théorème 7: ([Hel2], chap.1, §5)

$$\int_X f(x)dx = \int_{K/M} \Big(\int_{A^+} f(kax_0) \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(\exp^{-1}(a))]^{m_\alpha} da \Big) dk_M \,, \quad \forall f \in C_c(X)$$

où dk_M est la mesure K-invariante sur K/M,
dx est l'élément de volume riemannien sur X,
da est la mesure invariante à gauche sur A.

Nous obtiendrons, grâce à cette formule, des estimations asymptotiques de volume. Pour tout $H \in \mathfrak{a}^+$ tel que $\alpha(H) \geq const > 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda^+$, on a

$$\prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(H)]^{m_\alpha} \asymp \prod_{\alpha \in \Lambda^+} e^{m_\alpha \alpha(H)} = \exp[\sum_{\alpha \in \Lambda^+} m_\alpha \alpha(H)] = e^{\langle b | H \rangle}.$$

Soit $A^\flat = \exp \mathfrak{a}^\flat$ un sous-ensemble de mesure finie positive de A^+ satisfaisant $\alpha(\mathfrak{a}^\flat) \geq const$, $\forall \alpha \in \Lambda^+$. Posons $a = \exp H$, $da = \exp_*(dH)$. Alors

$$\begin{aligned} Vol(KA^\flat x_0) &= \int_{K/M} \Big(\int_{A^+} \chi_{_{KA^\flat x_0}}(kax_0) \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(\exp^{-1}(a))]^{m_\alpha}\, da\Big) dk_M \\ &= \int_{K/M} \chi_{_K}(k) dk_M \int_{A^+} \chi_{_{A^\flat x_0}}(ax_0) \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(\exp^{-1}(a))]^{m_\alpha}\, da \\ &= const \cdot \int_{\mathfrak{a}^\flat} \prod_{\alpha \in \Lambda^+} [\sinh \alpha(H)]^{m_\alpha}\, da\,. \end{aligned}$$

Donc,

$$Vol(KA^\flat x_0) \asymp const \cdot \int_{\mathfrak{a}^\flat} e^{\langle b|H\rangle} dH\,.$$

5.2. Preuve des propositions 3) et 4)

Lemme technique:
Soit $d < 1$ et $l \geq -1$ un entier. Alors:

$$\int_d^1 e^{rs}(1-s^2)^{\frac{l}{2}} ds \asymp \frac{e^b}{r^{\frac{l}{2}+1}}\,,$$

pour $r > 0$ assez grand.
Preuve:
Il suffit d'utiliser une méthode de pente raide. □

Proposition 3:
Soit v_{max} le vecteur unité de $\exp^{-1}(\mathcal{C})$ qui maximise $\langle b|.\rangle$. Alors:

$$Vol(K\mathcal{C}(n)) \leq const \cdot n^{\mathrm{rg}(X)} e^{-\langle b|v_{max}\rangle n}, \quad \forall n > 0.$$

Plus précisément:

$$Vol(K\mathcal{C}(n)) \asymp n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}\,, \quad si\ \exp b \in \mathcal{C}, \quad \forall n > 0.$$

En particulier:

$$Vol(Cour(n)) \asymp n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{-\|b\|n}, \quad \forall n > 0.$$

Preuve:
Posons $\exp(\mathfrak{C}(n)) = \mathcal{C}(n)$ et $\exp \mathfrak{C} = \mathcal{C}$
D'après ce qui a été dit au §5.1., il suffit d'estimer $\int_{\mathfrak{C}(n)} e^{\langle b|H\rangle} dH$.
Utilisons des coordonnées sphériques:

$$H_1 = \frac{H}{\|H\|}, \quad r = \|H\|\,.$$

On a: $\displaystyle\int_{\mathfrak{C}(n)} e^{\langle b|H\rangle} dH = \int_{n-1}^{n} \int_{\mathfrak{C}} e^{\langle b|H_1\rangle r} dH_1 r^{\mathrm{rg}(X)-1} dr \leq const \cdot n^{\mathrm{rg}(X)-1} e^{\langle b|v_{max}\rangle n}$

(rappellons que rg(X) est le rang de X).
Supposons que $b \in \mathfrak{C}$ (i.e. $\langle b|v_{max}\rangle = \|b\|$), et effectuons le changement de variables:

$$s = \langle b_1|H_1\rangle, \quad H_1' = H_1 - sb_1$$

Pour $s = \langle b_1|H_1\rangle \approx 1, \pi_s := \{H_1 \in \mathfrak{C} \,|\, s = \langle b_1|H_1\rangle\}$ est une sphère de dimension rg$X-2$ et de rayon $\sqrt{1-s^2}$, contenue dans l'orthogonal de b.

$$\int_{\mathfrak{C}} e^{\langle b|H_1\rangle r} dH_1 = \int_{\langle b|v_{min}\rangle}^{1} e^{\|b\| rs} \left(\int_{\pi_s} dH_1'\right) \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} \asymp \int_{1-h^2}^{1} e^{\|b\| rs} (1-s^2)^{\frac{\mathrm{rg}(X)-3}{2}} ds\,,$$

ceci pour r assez grand, et d'après le lemme technique on a:

$$\int_{1-h^2}^{1} e^{\|b\| rs} (1-s^2)^{\frac{\mathrm{rg}(X)-3}{2}} ds \asymp \frac{e^{\|b\| r}}{r^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}}} \quad .$$

Ainsi,

$$\int_{\mathfrak{C}(n)} e^{\langle b|H\rangle} dH \asymp n^{\frac{\mathrm{rg}(X)-1}{2}} e^{\|b\| n} \;, \quad \text{si } b \in \mathfrak{C}.$$

$\square$

Proposition 4:

$$\begin{array}{l} |\Gamma x_0 \cap Cour(n)| \asymp Vol(Cour(n)) \\ |\Gamma x_0 \cap K\mathcal{C}(n)x_0| \asymp Vol(K\mathcal{C}(n)x_0) \end{array}, \quad \forall n > 0\,.$$

La preuve de cette proposition nécessite quelques résultats préliminaires.
Définition: Une suite de sous-ensembles $\{C(n)\}_{n>0}$ de X est dite bien arrondie si: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, U$ un voisinage de l'identité e dans G tel que:

$$\frac{Vol(U\partial C(n))}{Vol(C(n))} \leq \varepsilon, \quad \forall n > 0,$$

où $\partial C(n)$ désigne le bord de $C(n)$ dans X. Il est important de signaler que U ne dépend pas de n.

On veut utiliser un cas particulier d'un théorème de comptage de A.Eskin et C.McMullen ([Esk]).
Proposition i):
Soit $X = G/K$ un espace riemannien symétrique de type non-compact et Γ un réseau irréductible dans G.
Si $\{C(n)\}_{n>0}$ est une suite bien arrondie de sous-ensembles avec $Vol(C(n)) \to \infty$ quand $n \to \infty$,alors

$$Vol(C(n)) \asymp |\Gamma x_0 \cap C(n)|\,.$$

Dans la suite, nous appliquerons ce résultat aux suites $\{K\mathcal{C}(n)x_0\}_{n>0}$ et $\{Cour(n)\}_{n>0}$.

Notons $\partial^{\varepsilon}(K\mathcal{C}(n)x_0)$ un ε-voisinage du bord de $K\mathcal{C}(n)x_0$ définit de la manière suivante:

$$\partial^{\varepsilon}(K\mathcal{C}(n)x_0) = KT_1x_0 \cup KT_2x_0 \cup KT_3x_0\,,$$

où $T_i = \exp \mathfrak{T}_i, \quad (i = 1,2,3)$ avec

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T}_1 &= \{H \in \mathfrak{a}^+ \mid \langle H|u\rangle \geq \|H\| \cos\psi - \varepsilon/2, \quad n - \varepsilon/2 \leq \|H\| \leq n + \varepsilon/2\},\\
\mathfrak{T}_2 &= \{H \in \mathfrak{a}^+ \mid \langle H|u\rangle \geq \|H\| \cos\psi - \varepsilon/2, \quad n - 1 - \varepsilon/2 \leq \|H\| \leq n - 1 + \varepsilon/2\},\\
\mathfrak{T}_3 &= \{H \in \mathfrak{a}^+ \mid |\langle H|u\rangle - \|H\| \cos\psi| \leq \varepsilon/2, \quad n - 1 - \varepsilon/2 \leq \|H\| \leq n + \varepsilon/2\}.
\end{aligned}$$

Lemme ii):
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, U$ *un voisinage de* e *dans* G *tel que:*

$$U\partial(K\mathcal{C}(n)x_0) \subset \partial^{\varepsilon}(K\mathcal{C}(n)x_0)\,.$$

Preuve du lemme ii):
Soit $\exp(rH_1)x_0 \in \partial\mathcal{C}(n)$.
Comme $\mathfrak{a}$ est $\mathrm{Ad}(K)$-invariant, on a $k\exp(rH_1)x_0 \in \partial(K\mathcal{C}(n)x_0), \quad \forall k \in K$.
Soit $g \in G$ qu'on écrit $g = kam$ dans la décomposition $G = KAN$.
Le lemme découle alors du fait suivant ([BGS], appendix 5):

$$\begin{aligned}
d(x_0, ax_0) \geq d(k\exp(rH_1)x_0, kam\exp(rH_1)x_0) &= d(\exp(rH_1)x_0, am\exp(rH_1)x_0)\\
&\longrightarrow d(x_0, ax_0) \quad \text{quand } r \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Lemme iii):

$$Vol(KT_ix_0) \asymp \varepsilon Vol(K\mathcal{C}(n)x_0), \quad (i = 1,2)$$

$$Vol(KT_3x_0) \leq const \cdot \varepsilon Vol(K\mathcal{C}(n)x_0)\,.$$

Preuve du lemme iii):
On obtient ces estimations de volumes en effectuant des calculs similaires à ceux donnés dans la preuve de la proposition 3. □

Preuve de la proposition 4):
Par les lemmes ii) et iii), on a:
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, U$ un voisinage de e dans G tel que:

$$\frac{Vol(U\partial(K\mathcal{C}(n)x_0))}{Vol(K\mathcal{C}(n)x_0)} \leq \frac{Vol(\partial^{\varepsilon}(K\mathcal{C}(n)x_0)}{Vol(K\mathcal{C}(n)x_0)} \leq const \cdot \varepsilon\,.$$

Ainsi, les suites $\{K\mathcal{C}(n)x_0\}_{n>0}$ et $\{Cour(n)\}_{n>0}$ sont bien arrondies. On peut donc leur appliquer la proposition i). □

6. Références

[Al] P.Albuquerque: *Patterson-Sullivan Measures in Higher Rank Symmetric Spaces,* Ph.D. Thesis, Univ. of Geneva, Switzerland (in preparation).

[Bil] P.Billingsley: *Probability and Measure,* New-York, J.Wiley (1979).

[BGS] W.Ballmann, M.Gromov and V.Schroeder: *Manifolds of Non-positive Curvature,* Birkhäuser, Basel (1985).

[Bou] M.Bourdon: *Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(-1)-espace,* Thèse, Université de Paris-Sud (1993)

[Bu] M.Burger et S.Mozes, CAT(-1)*-spaces, Divergence Groups and their Commensurators,* J. Amer. Math. Soc. vol. **9**, n^o 1, (1996), 57-94.

[C] M.Coornaert: *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov,* Pacific J. of Math. **159**, n^o 2 (1993), 241-270.

[Esk] A.Eskin and C.Mc-Mullen: *Mixing,Counting and Equidistribution in Lie Groups,* Duke Math J. **71** (1993), 181-209.

[Fu] H.Furstenberg: *Boundary Theory and Stochastic Processes*, Proc. Symp. Pure Math., vol. **26** (1973), 193-230.

[Hel1] S.Helgason: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces,* New-York, Academic Press (1978).

[Hel2] S.Helgason: *Groups and Geometric Analysis,* Orlando, Academic Press (1984).

[Mos] G.D.Mostow: *Strong Rigidity of Locally Symmetric Spaces,* Annals of Math. Studies, n^o 78, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.(1973).

[Moo] C.C.Moore: *Ergodicity of Flows on Homogeneous Spaces,* Amer. J. Math, n^o 88 (1966), 154-178.

[Ni] P.J.Nicholls: *The Ergodic Theory of Discrete Groups*, London Math. Soc. Lect. Notes **143**, Cambridge University Press (1989).

[Pa] S.J.Patterson: *The Limit Set of a Fuchsian Group*, Acta Math. **136** (1976), 241-273.

[Su] D.Sullivan: *The Density at Infinity of a Discrete Group of Hyperbolic Motions,* Publ. Math. I.H.E.S. **50** (1979), 171-202.

Section de Mathématiques, Université de Genève
2-4 r.du Lièvre, Case postale 240, 1211 Genève 24, Suisse.
e-mail albuquer@sc2a.unige.ch