UNE SUITE SPECTRALE DU TYPE HOCHSCHILD-SERRE POUR LES ALGEBRES DE LEIBNIZ

Pierre-Paul Grivel

Abstract

For the category of Leibniz algebras one can build an analogue to Hochschild-Serre spectrale sequence.

Introduction.

La notion d'algèbre de Leibniz et d'homologie de Leibniz a été introduite par J.L.Loday dans [L1] et [L2]. Une algèbre de Leibniz est un K-module $\mathbf{g}$ muni d'un crochet bilinéaire, non nécessairement antisymétrique, qui satisfait la forme suivante de l'identité de Jacobi , appelée identité de Leibniz: pour tout $x, y, z \in \mathbf{g}$ on a $[[x;y];z] = [[x;z];y] + [x;[y;z]]$. En particulier une algèbre de Lie est une algèbre de Leibniz.

L'homologie de Leibniz de $\mathbf{g}$ est l'homologie du module tensoriel $T\mathbf{g}$ muni d'une différentielle provenant d'un relevé convenable de la différentielle de Chevalley-Eilenberg définie sur le module $\bigwedge \mathbf{g}$ lorsque $\mathbf{g}$ est une algèbre de Lie. La cohomologie de Leibniz de $\mathbf{g}$ à valeurs dans un $\mathbf{g}$-module M, notée $HL^*(\mathbf{g};M)$, est définie en considérant le module gradué $C^*(\mathbf{g};M) = Hom_K(T\mathbf{g};M)$ (voir [L1], [L2] ou [C] pour les définitions précises et les détails).

De nombreuses notions concernants les algèbres de Lie ont un analogue dans la catégorie des algèbres de Leibniz, par exemples algèbre de Leibniz libre, algèbre enveloppante, extensions, etc (voir [L-P]). Il est donc naturel de regarder ce que devient, dans ce nouveau cadre, la suite spectrale de Hochschild-Serre ([H-S]).

Si $\mathbf{h}$ est un idéal bilatère de l'algèbre de Leibniz $\mathbf{g}$, on filtre le complexe $C^*(\mathbf{g};M)$ en considérant les cochaînes qui s'annullent lorsqu'on les restreint à un sous-module de $T\mathbf{g}$ contenant un certain nombre de facteurs $\mathbf{h}$. On obtient ainsi une suite spectrale du premier quadrant qui converge vers $HL^*(\mathbf{g};M)$. D'un autre côté on considère un module bigradué $CS^{*,*}(\mathbf{h};\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$. En fixant le deuxième degré on définit des complexes "horizontaux" tels que si on fixe maintenant le degré d'homologie de ces complexes, on peut définir des complexex "verticaux" dont l'homologie est isomorphe au terme E_2 de la suite spectrale.

De plus cette suite spectrale est multiplicative, relativement à un cup-produit défini sur $C^*(\mathbf{g};M)$.

Dans toute la suite K est un corps. Si $\mathbf{g}$ est une algèbre de Leibniz, un $\mathbf{g}$-module est un K-module M muni d'une action $M \otimes \mathbf{g} \to M$, notée $m.x$, qui vérifie la condition suivante: pour tout $m \in M$ et tout $x, y \in \mathbf{g}$ on a $m.[x;y] = (m.x).y - (m.y).x$.

1. La filtration du complexe $C^*(\mathbf{g};M)$

1.1. Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Leibniz et M un $\mathbf{g}$-module. On définit un complexe $C^*(\mathbf{g};M)$ de $\mathbf{g}$-modules ([L-P],[C]) en posant, pour tout entier $n \geq 0$, $C^n(\mathbf{g};M) = Hom_K(\mathbf{g}^{\otimes n};M)$; la différentielle $d : C^n(\mathbf{g};M) \to C^{n+1}(\mathbf{g};M)$ est donnée par la formule

$$(dc)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^{i+1} c(x_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{x_i} \otimes \ldots \otimes x_{n+1}).x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^i c(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i-1} \otimes [x_i;x_j] \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes \widehat{x_j} \otimes \ldots \otimes x_{n+1})$$

L'homologie de ce complexe est notée $HL^*(\mathbf{g};M)$ et s'appelle la cohomologie de l'algèbre de Leibniz $\mathbf{g}$ à coefficients dans M. C'est un $\mathbf{g}$-module trivial.

1.2. Soit $\mathbf{h}$ un idéal bilatère de $\mathbf{g}$.
On définit une filtration F du complexe $C^*(\mathbf{g};M)$ de la façon suivante. On pose $F^0C^*(\mathbf{g};M) = C^*(\mathbf{g};M)$ et pour tout $n \geq 1$ et tout $j \geq 1$, $F^jC^n(\mathbf{g};M)$ est l'ensemble des cochaînes $c \in C^n(\mathbf{g};M)$ telles que $c(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = 0$ lorsque au moins $n - j + 1$ des éléments x_i sont dans $\mathbf{h}$.

Cette filtration est décroissante, canoniquement bornée et compatible avec la différentielle d. De plus les ensembles $F^jC^n(\mathbf{g};M)$ sont des $\mathbf{g}$ - modules.

1.3. On va étudier la suite spectrale du premier quadrant associée à cette filtration. Elle converge évidemment vers $HL^*(\mathbf{g};M)$.

2. Notations

2.1. Nous aurons à considérer des suites finies sur un ensemble à deux éléments que nous noterons$\{1;2\}$. Plus précisément pour tout entier n et j tels que $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq n$ on désignera par $S_{n,j}$ le sous-ensemble de $\{1;2\}^n$ constitué par les suites contenant j éléments 2.

On pose $S_{0,0} = \emptyset$. On a $\# S_{n,j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$ (si $n \geq 1$).

2.2. Soit I $= (i_1;i_2;\ldots;i_n) \in S_{n,j}$.

On considère les deux sous-ensembles ordonnés I' et I'' de l'ensemble ordonné $\{1;2;\ldots;n\}$ suivants:

$I' = \{l_1;l_2\ldots;l_{n-j}|i_{l_k} = 1 \text{ pour tout } k = 1,2,\ldots,n-j\}$

$I'' = \{r_1;r_2;\ldots;r_j|i_{r_k} = 2 \text{ pour tout } k = 1,2,\ldots,j\}$.

2.3. Etant donnée une suite $I \in S_{n,j}$ on lui associe différentes autres suites.

Si $k \in \{1;2;\ldots;n+1\}$ on note $I_k \in S_{n+1,j}$ la suite qui se déduit de I en adjoignant un 1 après le terme i_{k-1} de la suite I. En particulier I_1 consiste à placer un 1 au début de la suite I.

Si $u \in I''$ on note $I_{(u)} \in S_{n,j-1}$ la suite qui se déduit de I en remplaçant le terme $i_u = 2$ par un 1.

Enfin si $u \in \{1;2;\ldots;n\}$ on note $I - \{i_u\}$ la suite qui se déduit de I en supprimant le terme i_u; on a $I - \{i_u\} \in S_{n-1,j}$ (resp. $S_{n-1,j-1}$) si $u \in I'$(resp. $u \in I''$).

2.4. Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Leibniz, $\mathbf{h}$ un idéal bilatère de $\mathbf{g}$ et considérons les modules $N^1 = \mathbf{h}$ et $N^2 = \mathbf{g}/\mathbf{h}$.

Si $I = (i_1;i_2;\ldots;i_n) \in S_{n,j}$ on pose $N^I = N^{i_1} \otimes N^{i_2} \otimes \ldots \otimes N^{i_n}$. On notera en particulier que $N^{\emptyset}$ est le corps de base, que si $I \in S_{n,0}$ on a $N^I = \mathbf{h}^{\otimes n}$ et que si $I \in S_{n,n}$ on a $N^I = (\mathbf{g}/\mathbf{h})^{\otimes n}$.

2.5. Si H et K sont des sous-ensembles ordonnés de $\mathbf{N}$ on posera $A(H \times K) = \{(u;v) \in H \times K | u < v\}$; pour simplifier on écrira $A(K)$ à la place de $A(K \times K)$.

3. Le complexe $CS^{*,*}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$

3.1. Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Leibniz, $\mathbf{h}$ un idéal bilatère de $\mathbf{g}$ et M un $\mathbf{g}$ - module. On note $\pi : \mathbf{g} \to \mathbf{g}/\mathbf{h}$ la projection canonique. .

Pour tout entier $p \geq 0$ et $q \geq 0$ on pose

$$CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M) = \bigoplus_{I \in S_{p+q,p}} Hom_K(N^I;M)$$

On remarquera qu'on a, en particulier, les isomorphismes $CS^{0,0}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M) = M$, $CS^{q,0}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M) = C^q(\mathbf{h};M)$ et $CS^{0,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M) = C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$.

3.2. On définit sur $CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$ une structure de $\mathbf{g}$ - module de la façon suivante (voir Appendice A2,A3)

Soit $I \in S_{p+q,p}$,$\omega_I \in Hom_K(N^I;M)$ et $x \in \mathbf{g}$. On définit $\omega_I.x$ en posant

$$(\omega_I.x)(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}) = \omega_I(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}).x - \sum_{1 \leq u \leq p+q} \omega_I(z_1 \otimes \ldots \otimes (z_u.x) \otimes \ldots \otimes z_{p+q})$$

où $z_u.x = [z_u;x]$ si $u \in I'$ et $z_u.x = \pi([x_u;x])$ si $u \in I''$ où $x_u \in \mathbf{g}$ est tel que $\pi(x_u) = z_u$.

Soit alors $\omega = (\omega_I)_{I \in S_{p+q,p}} \in CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$ et $x \in \mathbf{g}$; on pose $\omega.x = (\omega_I.x)_{I \in S_{p+q,p}}$.

3.3. On définit maintenant une différentielle

$$d : CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M) \to CS^{q+1,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M).$$

Soit $\omega = (\omega_I)_{I \in S_{p+q,p}}$; alors $d\omega = ((d\omega)_J)_{J \in S_{p+q+1,p}}$ et il faut définir $d(\omega)_J$.

Soit $J=(i_1;i_2;\ldots;i_{p+q+1})\in S_{p+q+1,p}$; on pose

$$(d\omega)_J(z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})=\sum_{u\in J'}(-1)^{u+1}\omega_{J-\{i_u\}}(z_1\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}).z_u$$
$$+\sum_{(u,v)\in A(J')}(-1)^v\omega_{J-\{i_v\}}(z_1\otimes\ldots\otimes z_{u-1}\otimes[z_u;z_v]\otimes z_{u+1}\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

3.4. Exemples :

a) $d:CS^{q,0}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\to CS^{q+1,0}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$ coïncide avec la différentielle

$$d:C^q(\mathbf{h};M)\to C^{q+1}(\mathbf{h};M)$$

b) $d:CS^{1,1}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\to CS^{2,1}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$. Soit $\omega=(\omega_{(12)};\omega_{(21)})\in CS^{1,1}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$; alors $d\omega=((d\omega)_{(112)};(d\omega)_{(121)};(d\omega)_{(211)})$ et on a par exemple

$$(d\omega)_{(121)}(y_1\otimes\gamma\otimes y_2)=\omega_{(21)}(\gamma\otimes y_2).y_1+\omega_{(12)}(y_1\otimes\gamma).y_2-\omega_{(12)}([y_1;y_2]\otimes\gamma)$$

3.5. Lemme :*d est un morphisme de $\mathbf{g}$ - modules et on a $d^2=0$.*

Démonstration : (voir Appendice A3,A7).

3.6. Pour comparer les modules précédents avec les modules de la filtration du complexe $C^*(\mathbf{g};M)$ on va définir une application

$$\phi:F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)\to CS^{q,p}(\mathbf{h};\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$$

Soit $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$;alors $\phi(c)=(\phi(c)_I)_{I\in S_{p+q,p}}$ et il faut définir $\phi(c)_I$.
Soit $s:\mathbf{g}/\mathbf{h}\to\mathbf{g}$ une section linéaire de $\pi:\mathbf{g}\to\mathbf{g}/\mathbf{h}$. Pour tout $I\in S_{p+q,p}$ on définit une application linéaire $s_I:N^I\to\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}$ en posant $s_I=s_1\otimes\ldots\otimes s_{p+q}$, où $s_u=1_{\mathbf{h}}$ si $u\in I'$ et $s_u=s$ si $u\in I''$
On considère alors l'application linéaire $c\circ s_I:N^I\to M$.

3.7. Lemme: *Soit s' une autre section de π et soit $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$; on a alors $c\circ s_I=c\circ s'_I$*

Démonstration: Soit $t=s-s':\mathbf{g}/\mathbf{h}\to\mathbf{h}$. On a alors $s_I=s'_I+\tilde{t}$ où $\tilde{t}$ est une somme de termes qui se déduisent de s_I en remplaçant des facteurs s par des facteurs t. Donc dans chaque terme de $\tilde{t}$ il y a au moins q+1 facteurs qui sont des applications dont le but est $\mathbf{h}$. Il en résulte que c s'annulle sur l'image de $\tilde{t}$.

3.8. Pour tout $I\in S_{p+q,p}$ et tout $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$ on pose $\phi(c)_I=c\circ s_I$

3.9. Lemme : *ϕ est un morphisme de $\mathbf{g}$ - modules.*

Démonstration : Il suffit de vérifier que pour tout $I\in S_{p+q,p}$, $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$ et $x\in\mathbf{g}$ on a

$$(c.x)\circ s_I=(c\circ s_I).x.$$

Cela résulte, par calcul direct, des définitions si on remarque que pour tout $u\in I''$ on a $[s(z_u);x]-s\pi[s(z_u);x]\in\mathbf{h}$.

3.10. Proposition : *ϕ est un morphisme de complexes.*

Démonstration : Il faut vérifier que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M) & \xrightarrow{\phi} & CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\\ \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle d}\\ F^pC^{p+q+1}(\mathbf{g};M) & \xrightarrow[\phi]{} & CS^{q+1,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\end{array}$$

Il suffit pour cela de vérifier que pour tout $J\in S_{p+q+1,p}$ on a $(d\phi(c))_J=(\phi(dc))_J$
Soit $z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}\in N^J$; il y a donc au moins q+1 des éléments z_i qui sont dans $\mathbf{h}$.
En appliquant les définitions on obtient directement

$$(d\phi(c))_J(z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})=\sum_{u\in J'}(-1)^{u+1}c(s_1(z_1)\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes s_{p+q+1}(z_{p+q+1})).z_u$$

$$+\sum_{(u,v)\in A(J')}(-1)^v c(s_1(z_1)\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes s_{p+q+1}(z_{p+q+1}))$$

D'un autre côté on a

$$(\phi(dc))_J(z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})=\sum_{u\in J'}(-1)^{u+1}c(s_1(z_1)\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes s_{p+q+1}(z_{p+q+1})).z_u$$

$$+\sum_{u\in J''}(-1)^{u+1}c(s_1(z_1)\otimes\ldots\otimes\widehat{s_u(z_u)}\otimes\ldots\otimes s_{p+q+1}(z_{p+q+1})).s_u(z_u)$$

$$+\sum_{(u,v)\in A(J')}(-1)^v c(s_1(z_1)\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes s_{p+q+1}(z_{p+q+1}))$$

$$+\sum_{(u,v)\in A(J'\times J'')\cup A(J''\times J')\cup A(J'')}(-1)^v c(s_1(z_1)\otimes\ldots\otimes[s_u(z_u);s_v(z_v)]\otimes\ldots\otimes\widehat{s_v(z_v)}\otimes\ldots\otimes s_{p+q+1}(z_{p+q+1}))$$

On vérifie immédiatement que dans la deuxième et la quatrième somme le nombre de facteurs du produit tensoriel qui sont dans $\mathbf{h}$ n'a pas diminué; donc ces sommes sont nulles puisque $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$.
On a ainsi obtenu l'égalité désirée.

3.11. Lemme : *Si* $\phi : F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)\to CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$ *alors* $Ker\phi = F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{g};M)$.

Démonstration : Soit $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$, alors $c\in Ker\phi$ si et seulement si $c\circ s_I=0$ pour tout $I\in S_{p+q,p}$.
Il est immédiat de vérifier que si $c\in F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{g};M)$ alors $c\circ s_I=0$ pour tout $I\in S_{p+q,p}$.
Inversément supposons que $c\circ s_I=0$ pour tout $I\in S_{p+q,p}$. Soit $x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q}\in\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}$ tel que q facteurs x_i sont dans $\mathbf{h}$; soit $\{x_{l_k}|1\le k\le q\}$ l'ensemble de ces facteurs.
Soit $I\in S_{p+q,p}$ la suite telle que $I'=\{l_k|1\le k\le q\}$ et considérons l'élément $z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+q}\in N^I$ défini en posant $z_u=x_u$ si $u\in I'$ et $z_u=\pi(x_u)$ si $u\in I''$. Remarquons que si $u\in I''$ on a $sz_u-x_u\in\mathbf{h}$; comme $c\in F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$ on a alors $0=c\circ s_I(z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+q})=c(x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q})$; donc $c\in F^{p+1}C^{p+q}(\mathbf{g};M)$.

3.12. On construit maintenant une application

$$\psi : CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\to F^pC^{p+q}(\mathbf{g};M)$$

Soit $m:\mathbf{g}\to\mathbf{h}$ un projecteur linéaire.
Pour tout $I\in S_{p+q,p}$ on définit une application linéaire $m_I:\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}\to N^I$ en posant $m_I=m_1\otimes\ldots\otimes m_{p+q}$ où $m_u=m$ si $u\in I'$ et $m_u=\pi$ si $u\in I''$.
Soit alors $\omega=(\omega_I)_{I\in S_{p+q,p}}\in CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$. On pose $\psi(\omega)=\sum_{I\in S_{p+q,p}}\omega_I\circ m_I$

Si $x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q}\in\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}$ et si $q+1$ des facteurs x_i sont dans $\mathbf{h}$, il existe nécessairement un indice i_0 compris entre 1 et p+q tel que $x_{i_0}\in\mathbf{h}$ et $i_0\in I''$ pour tout $I\in S_{p+q,p}$; donc $\psi(\omega)(x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q})=0$.

3.13. Lemme : *On a* $\phi\circ\psi=1_{CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)}$ *; (donc le morphisme* ϕ *est surjectif).*

Démonstration : Il suffit de vérifier que si $I,J\in S_{p+q,p}$ on a $m_I\circ s_J=0$ lorsque $J\neq I$ et $m_I\circ s_I=1_{N^I}$.

3.14. Lemme : *Si* $\omega\in CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$ *alors* $\psi d(\omega)-d\psi(\omega)\in F^{p+1}C^{p+q+1}(\mathbf{g};M)$.

Démonstration : Si $\omega=(\omega_I)_{I\in S_{p+q,p}}$ alors $d\omega=((d\omega)_J)_{J\in S_{p+q+1,p}}$ et on a

$$\psi d(\omega)-d\psi(\omega)=\sum_{J\in S_{p+q+1,p}}(d\omega)_J\circ m_J-\sum_{I\in S_{p+q,p}}d(\omega_I\circ m_I).$$

Soit $x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q+1}\in\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}$ tel que $q+1$ facteurs x_i sont dans $\mathbf{h}$; notons $\{x_{l_k}|1\le k\le q+1\}$ l'ensemble de ces facteurs et soit $K\in S_{p+q+1,p}$ la suite telle que $K'=\{l_k|1\le k\le q+1\}$. On a

$$\sum_{J\in S_{p+q+1,p}}(d\omega)_J\circ m_J(x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q+1})=(d\omega)_K\circ m_K(x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q+1});$$

en effet si $J \neq K$ il existe un indice i_0 tel que $i_0 \in K'$ et $i_0 \in J''$, donc $m_{i_0}(x_{i_0}) = \pi(x_{i_0}) = 0$ puisque $x_{i_0} \in \mathbf{h}$.
D'un autre côté on a aussi

$$\sum_{I \in S_{p+q,p}} d(\omega_I \circ m_I)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q+1}) = (d\omega)_K \circ m_K(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q+1}).$$

En effet on a, après échange des sommations,

$$\sum_{I \in S_{p+q,p}} d(\omega_I \circ m_I)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q+1}) = \sum_{1 \leq u \leq p+q+1} \sum_{I \in S_{p+q,p}} (-1)^{u+1} (\omega_I \circ m_I)(x_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{x_u} \otimes \ldots \otimes x_{p+q++1}).x_u$$

$$+ \sum_{1 \leq u < v \leq p+q+1} \sum_{I \in S_{p+q,p}} (-1)^v (\omega_I \circ m_I)(x_1 \otimes \ldots \otimes [x_u; x_v] \otimes \ldots \otimes \widehat{x_v} \otimes \ldots \otimes x_{p+q+1}).$$

En analysant les différents cas on constate aisément que les seuls termes restants sont : $u \in K'$ et $I = K - \{i_u\}$ dans la première partie et $(u, v) \in A(K')$ et $I = K - \{i_v\}$ dans la deuxième partie. Les autres termes sont nuls car on peut toujours trouver un indice i_0 tel que $i_0 \in K'$ et $i_0 \in I''$. Finalement si on remarque que $m_u(x_u) = x_u$ lorsque $u \in K'$, on a

$$\sum_{I \in S_{p+q,p}} d(\omega_I \circ m_I)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q+1}) =$$

$$\sum_{u \in K'} (-1)^{u+1} \omega_{K - \{i_u\}}(m_1(x_1) \otimes \ldots \otimes \widehat{m_u(x_u)} \otimes \ldots \otimes m_{p+q+1}(x_{p+q+1})).m_u(x_u)$$

$$+ \sum_{(u,v) \in A(K')} (-1)^v \omega_{K - \{i_v\}}(m_1(x_1) \otimes \ldots \otimes [m_u(x_u); m_v(x_v)] \otimes \ldots \otimes \widehat{m_v(x_v)} \otimes \ldots \otimes m_{p+q+1}(x_{p+q+1}))$$

$$= (d\omega)_K \circ m_K(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q+1}).$$

4. Les termes E_0 , E_1 et E_2

4.1. D'après 3.11. et 3.13 le morphisme ϕ induit un isomorphisme

$$\phi_0 : E_0^{p,q} \to CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$$

caractérisé par la condition $\phi_0 \circ \pi' = \phi$ où $\pi' : F^p C^{p+q}(\mathbf{g}; M) \to E_0^{p,q} = \dfrac{F^p C^{p+q}(\mathbf{g}; M)}{F^{p+1} C^{p+q}(\mathbf{g}; M)}$ est la projection canonique.

4.2. Remarque: L'inverse du morphisme ϕ_0 est le morphisme $\psi_0 = \pi' \circ \psi$. En effet il résulte de 3.13. que $\phi_0 \circ \psi_0 = 1_{CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)}$. Pour voir que $\psi_0 \circ \phi_0 = 1_{E_0^{p,q}}$ il faut vérifier que pour tout $c \in F^p C^{p+q}(\mathbf{g}; M)$ on a $c \circ (\sum_{I \in S_{p+q,p}} s_I \circ m_I - 1_{\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}}) \in F^{p+1} C^{p+q}(\mathbf{g}; M)$. Soit $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q} \in \mathbf{g}^{\otimes(p+q)}$ tel que q facteurs x_i sont dans $\mathbf{h}$ et soit $\{x_{l_k} | 1 \leq k \leq q\}$ l'ensemble de ces facteurs. Soit $J \in S_{p+q,p}$ la suite telle que $J' = \{l_k | 1 \leq k \leq q\}$. Si on évalue l'application $\sum_{I \in S_{p+q,p}} s_I \circ m_I - 1_{\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}}$ sur $x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q}$ on voit facilement que le seul terme restant est celui pour lequel $I = J$. Si on remarque que $s \circ \pi - 1_{\mathbf{g}} : \mathbf{g} \to \mathbf{h}$, alors le même argument que dans 3.7. montre que $(s_J \circ m_J - 1_{\mathbf{g}^{\otimes(p+q)}})(x_1 \otimes \ldots \otimes x_{p+q})$ est une somme de termes dans lesquels il y a au moins $q + 1$ facteurs qui sont dans $\mathbf{h}$; donc c est nul sur ces termes.
Puisque ϕ_0 est bien défini, il résulte de cette remarque que ψ_0 est bien défini, indépendant du choix du projecteur m.

4.3. La différentielle d_0 est induite par la différentielle du complexe $C^*(\mathbf{g}; M)$. On en déduit que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_0^{p,q} & \xrightarrow{d_0} & E_0^{p,q+1} \\ \phi_0 \downarrow & & \downarrow \phi_0 \\ CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) & \xrightarrow[d]{} & CS^{q+1,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \end{array}$$

et par suite qu'on a un isomorphisme de complexes

$$\phi_0 : (E_0^{p,*}; d_0) \to (CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M); d)$$

dont l'inverse est ψ_0 .

4.4. On notera que $E_0^{0,q} = C^q(\mathbf{h}; M)$ et que $E_0^{p,0} = C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$.

4.5. L'isomorphisme de complexes précédent induit un isomorphisme

$$\phi_1 = \phi_0^* : E_1^{p,q} \to H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M); d)$$

dont l'inverse est $\psi_1 = \psi_0^*$.

4.6. Lemme : *On a*

$$E_1^{0,q} = HL^q(\mathbf{h}; M)$$

et

$$E_1^{p,0} = C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)^{\mathbf{h}}$$

où

$$C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)^{\mathbf{h}} = \{\omega \in C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M) | \omega.y = 0 \, \forall y \in \mathbf{h}\}.$$

Démonstration: La première formule est évidente.
Pour démontrer la seconde formule on remarque tout d'abord que

$$E_1^{p,0} = Ker(d : C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to \bigoplus_{I \in S_{p+1,p}} Hom(N^I; M)).$$

Soit $\omega \in C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$; alors $d\omega = ((d\omega)_I)_{I \in S_{p+1,p}}$. Donc $\omega \in E_1^{p,0}$ si et seulement si $(d\omega)_I = 0$ pour tout $I \in S_{p+1,p}$. Les éléments de $S_{p+1,p}$ sont les suites $I_h, 1 \leq h \leq p+1$, telles que $I'_h = \{h\}$.
Soit alors $z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+1} \in N^{I_h}$; on a

$$(d\omega)_{I_h}(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+1}) = (-1)^{h+1} \omega(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_h} \otimes \ldots \otimes z_{p+1}).z_h = (-1)^{h+1} (\omega.z_h)(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_h} \otimes \ldots \otimes z_{p+1})$$

la dernière égalité provenant du fait que l'action de $\mathbf{h}$ sur $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ est triviale.

4.7. On rappelle que la différentielle $d_1 : E_1^{p,q} \to E_1^{p+1,q}$ est définie de la façon suivante. Soit $\epsilon \in E_1^{p,q}$ et soit $e \in E_0^{p,q}$ un cocycle tel que $[e] = \epsilon$. Soit $c \in F^p C^{p+q}(\mathbf{g}; M)$ tel que $\pi'(c) = e$. On a alors $d_1 \epsilon = [\pi'(dc)]$ (où $\pi' : F^{p+1} C^{p+q+1}(\mathbf{g}; M) \to E_0^{p+1,q}$).

4.8. Il y a une action bien définie de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ sur $C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)^{\mathbf{h}}$. On peut donc définir une différentielle et considérer le complexe $C^*(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)^{\mathbf{h}}$.

Plus généralement la formule du lemme A.6. montre que $H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))$ a une structure de $\mathbf{h}$ - module trivial, donc a une structure bien définie de $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ - module.

4.9. L'isomorphisme $\phi_1 : E_1^{p,q} \to H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M); d)$ permet de transporter la différentielle d_1 en une différentielle $\delta : H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)) \to H^q(CS^{*,p+1}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))$ définie en posant $\delta = \phi_1 \circ d_1 \circ \psi_1$ (où $\psi_1 = \phi_1^{-1}$, voir 4.5.).

4.10. On peut expliciter cette différentielle. Dans ce but il est commode d'introduire les deux opérateurs suivants,

$$\mu : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q-1,p+1}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$$

et

$$\Delta : H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)) \to H^q(CS^{*,p+1}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))$$

4.11. Soit $\omega = (\omega_I)_{I \in S_{p+q,p}} \in CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$; alors $\mu(\omega) = (\mu(\omega)_J)_{J \in S_{p+q,p+1}}$ est défini de la façon suivante.
Soit $J \in S_{p+q,p+1}$,$w \in J''$ et posons $\mu_{J,w} = \mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_{p+q}$ où $\mu_u = 1_{\mathbf{h}}$ si $u \in J'$, $\mu_u = 1_{\mathbf{g}/\mathbf{h}}$ si $u \in J'' - \{w\}$ et $\mu_w = m \circ s$. Alors

$$\mu(\omega)_J = \sum_{w \in J''} \omega_{J_{(w)}} \circ \mu_{J,w}$$

.

4.12. Maintenant on définit $\tilde{\Delta} : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q,p+1}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$.
Si ω est comme ci-dessus alors $\tilde{\Delta}(\omega) = (\tilde{\Delta}(\omega)_J)_{J \in S_{p+q+1,p+1}}$ est défini de la façon suivante. Soit $J \in S_{p+q+1,p+1}$; alors

$$\tilde{\Delta}(\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) = \sum_{u \in J''} (-1)^{u+1} \omega_{J-\{i_u\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z}_u \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).s(z_u) +$$

$$\sum_{(u,v) \in A(J' \times J'') \cup A(J'')} (-1)^v \omega_{J-\{i_v\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes (z_u \circ z_v) \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) +$$

$$\sum_{(u,v) \in A(J'' \times J')} (-1)^v \omega_{J_{(u)}-\{i_v\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes (z_u \circ z_v) \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1})$$

où $z_u \circ z_v = [z_u; s(z_v)]$ si $(u,v) \in A(J' \times J'')$, $z_u \circ z_v = [s(z_u); z_v]$ si $(u,v) \in A(J'' \times J')$ et $z_u \circ z_v = [z_u; z_v]$ si $(u,v) \in A(J'')$.
On va montrer dans le corollaire 4.15. que si ω est un cocycle (resp. un cobord) alors $\tilde{\Delta}(\omega)$ est un cocycle (resp un cobord).
On peut alors poser $\Delta([\omega]) = [\tilde{\Delta}(\omega)]$.

4.13. Soit $[\omega]$ une classe de cohomologie représentée par un cocycle $\omega \in CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$. En utilisant les définitions on a $\delta([\omega]) = (\phi_1 \circ d_1 \circ \psi_1)([\omega]) = [\phi \circ d \circ \psi(\omega)]$.

4.14. Lemme : *On a* $\phi \circ d \circ \psi(\omega) = \tilde{\Delta}(\omega) + d \circ \mu(\omega)$ *pour tout cocycle* $\omega \in CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$.

Démonstration : On commence par faire la remarque suivante. Si $I, K \in S_{p+q,p}$ on a $m_I \circ s_K = 0$ si $I \neq K$ et $m_K \circ s_K = 1_{N^K}$ (voir lemme 3.13.) Si $I \in S_{p+q,p}$ et $K \in S_{p+q,p+1}$ on vérifie facilement que $m_I \circ s_K = \mu_{K,w}$ si $I = K_{(w)}$ et que $m_I \circ s_K = 0$ sinon.
Soit maintenant un cocycle $\omega \in CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$ et soit $J \in S_{p+q+1,p+1}$. Pour faire le calcul de $\phi \circ d \circ \psi(\omega)_J$ il est commode d'introduire la convention d'écriture suivante: si $u, v \in \{1; 2; \ldots; p+1\}$ et si $u < v$ on pose $s_u([z_u; z_v]) = [s_u(z_u); s_v(z_v)]$. Cette convention entraine la remarque suivante : si $(u,v) \in A(J' \times J'')$ ou $(u,v) \in A(J'' \times J')$ on a $m_{J-\{i_v\}} \circ s_{J-\{i_v\}} = \nu_{J-\{i_v\},u} = \nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_{p+q}$ où ν_l est l'identité si $l \neq u$ et $\nu_u = s_u$; autrement dit on a

$$m_{J-\{i_v\}} \circ s_{J-\{i_v\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes [z_u; z_v] \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes z_{p+q}) = z_1 \otimes \ldots \otimes (z_u \circ z_v) \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes z_{p+q}.$$

On a alors

$$\phi \circ d \circ \psi(\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) = d\psi(\omega) \circ s_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1})$$

$$= \sum_{1 \leq u \leq p+q+1} (-1)^{u+1} \psi(\omega) \circ s_{J-\{i_u\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_u} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).s_u(z_u)$$

$$+ \sum_{1 \leq u < v \leq p+q+1} (-1)^v \psi(\omega) \circ s_{J-\{i_v\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes [z_u; z_v] \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1})$$

$$= \sum_{1\le u\le p+q+1} (-1)^{u+1} \sum_{I\in S_{p+q,p}} \omega_I \circ m_I \circ s_{J-\{i_u\}}(z_1\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}).s_u(z_u)$$

$$+ \sum_{1\le u<v\le p+q+1} (-1)^{v} \sum_{I\in S_{p+q,p}} \omega_I \circ m_I \circ s_{J-\{i_v\}}(z_1\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$= \sum_{u\in J'} (-1)^{u+1} \sum_{w\in(J-\{i_u\})''} \omega_{(J-\{i_u\})''_{(w)}} \circ \mu_{J-\{i_u\},w}(z_1\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}).z_u$$

$$+ \sum_{u\in J''} (-1)^{u+1}\omega_{J-\{i_u\}}(z_1\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}).s_u(z_u)$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J')} (-1)^{v} \sum_{w\in(J-\{i_v\})''} \omega_{(J-\{i_v\})_{(w)}} \circ \mu_{J-\{i_v\},w}(z_1\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J'\times J'')} (-1)^{v}\omega_{J-\{i_v\}} \circ \nu_{J-\{i_v\},u}(z_1\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J''\times J')} (-1)^{v}\omega_{J_{(u)}-\{i_v\}} \circ \nu_{J-\{i_v\},u}(z_1\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J'')} \omega_{J-\{i_v\}}(z_1\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$= \sum_{u\in J'} (-1)^{u+1}\mu(\omega)_{J-\{i_u\}}(z_1\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}).z_u$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J')} (-1)^{v}\mu(\omega)_{J-\{i_v\}}(z_1\otimes\ldots\otimes[z_u;z_v]\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$+ \sum_{u\in J''} (-1)^{u+1}\omega_{J-\{i_u\}}(z_1\otimes\ldots\otimes\widehat{z_u}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1}).s_u(z_u)$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J'\times J'')\cup A(J'')} (-1)^{v}\omega_{J-\{i_v\}}(z_1\otimes\ldots\otimes(z_u\circ z_v)\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$+ \sum_{(u,v)\in A(J''\times J')} (-1)^{v}\omega_{J_{(u)}-\{i_v\}}(z_1\otimes\ldots\otimes(z_u\circ z_v)\otimes\ldots\otimes\widehat{z_v}\otimes\ldots\otimes z_{p+q+1})$$

$$= d\mu(\omega)_J + \tilde{\Delta}(\omega)_J.$$

4.15. Corollaire : *Si ω est un cocycle (resp. un cobord) de $CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$, alors $\tilde{\Delta}(\omega)$ est un cocycle (resp. un cobord) de $CS^{q,p+1}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$.*

Démonstration : Soit un cocycle $\omega\in CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$. On a $d\phi d\psi(\omega) = d\tilde{\Delta}(\omega) + dd\mu(\omega) = d\tilde{\Delta}(\omega)$. Mais par 3.14. on a $d\psi(\omega)\in F^{p+1}C^{p+q+1}(\mathbf{g};M)$ donc $d\phi d\psi(\omega) = \phi dd\psi(\omega) = 0$. Ainsi $d\tilde{\Delta}(\omega) = 0$.
Soit maintenant $\omega\in CS^{q-1,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$; de nouveau par 3.14. on a $(\psi d - d\psi)(\omega)\in F^{p+1}C^{p+q+1}(\mathbf{g};M)$. On en déduit $\phi d\psi(d\omega) = \phi d(\psi d(\omega) - d\psi(\omega) + d\psi(\omega)) = \phi d(\psi d(\omega) - d\psi(\omega)) + \phi dd\psi(\omega) = d\phi(\psi d(\omega) - d\psi(\omega))$. On a donc $\tilde{\Delta}(d\omega) = d(\phi(\psi d(\omega) - d\psi(\omega)) - \mu(d(\omega)))$.

4.16. Si $[\omega]$ est une classe de cohomologie représentée par un cocycle $\omega\in CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)$ on a $\delta([\omega]) = [\tilde{\Delta}(\omega)] = \Delta([\omega])$.

4.17. Ainsi l'isomorphisme ϕ_1 induit un isomorphisme

$$\phi_2 = \phi_1^* : E_2^{p,q} \to H^p(H^q(CS^{*,*}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M);d),\Delta)$$

5. La structure multiplicative

5.1. Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Leibniz et M et M' deux $\mathbf{g}$ - modules. On rappelle que la structure de $\mathbf{g}$ - module sur $M\otimes M'$ est donnée en posant $(m\otimes m').x=(m.x)\otimes m'+m\otimes(m'.x)$ pour tout $m\in M, m'\in M'$ et $x\in\mathbf{g}$.
On définit une opération

$$\cup : C^p(\mathbf{g};M)\otimes C^q(\mathbf{g};M)\to C^{p+q}(\mathbf{g};M\otimes M')$$

en posant $(f\cup g)(x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q})=\sum\limits_{A\in X(p+q,p)}\epsilon(A)f(x_A)\otimes g(x_{\hat{A}})$ où $X(p+q,p)$ est l'ensemble de toutes les sous-suites de longueur p de la suite $(1,2,...,p+q)$, $\hat{A}$ est le complémentaire de la suite A dans $(1,2,...,p+q)$, $\epsilon(A)$ est la signature du (p,q)-shuffle défini par A et x_A est la restriction de $x=x_1\otimes\ldots\otimes x_{p+q}$ aux indices figurant dans A (voir [C] ou [O] pour les détails). Le cup-produit $\cup$ est associatif et la différentielle d est une dérivation pour cette opération. On en déduit donc une opération

$$\cup : HL^p(\mathbf{g};M)\otimes HL^q(\mathbf{g};M)\to HL^{p+q}(\mathbf{g};M\otimes M')$$

5.2. Soit $\mathbf{h}$ un idéal bilatère de $\mathbf{g}$. La filtration du complexe $C^*(\mathbf{g};M)$ est compatible avec le cup-produit, autrement dit on a une opération

$$\cup : F^jC^p(\mathbf{g};M)\otimes F^kC^q(\mathbf{g};M')\to F^{j+k}C^{p+q}(\mathbf{g};M\otimes M').$$

Il en résulte que pour tout entier $r\geq 0$ on a des opérations

$$\cup : E_r^{p,q}\otimes E_r^{p',q'}\to E_r^{p+p',q+q'}.$$

et les différentielles d_r sont des dérivations pour ces opérations. L'opération sur E_{r+1} est induite par l'opération sur E_r. .

5.3. On va définir maintenant une opération

$$\cup : CS^{q,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\otimes CS^{q',p'}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M')\to CS^{q+q',p+p'}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M\otimes M').$$

Soit $\omega=(\omega_I)_{I\in S_{p+q,p}}$ et $\omega'=(\omega'_J)_{J\in S_{p'+q',p'}}$; alors $\omega\cup\omega'=((\omega\cup\omega')_K)_{K\in S_{p+p'+q+q',p+p'}}$ où, si $z=z_1\otimes\ldots\otimes z_{p+p'+q+q'}\in N^K$, on a posé

$$(\omega\cup\omega')_K(z)=\sum\epsilon(A)\omega_{I_A}(z_A)\otimes\omega'_{\widehat{I_A}}(z_{\hat{A}})$$

la sommation portant sur tous les $A\in X(p+p'+q+q',p+q)$ pour lesquels il existe $I_A\in S_{p+q,p}$ tel que $z_A\in N^{I_A}$ (où $\widehat{I_A}=K-I_A=J_{\hat{A}}\in S_{p'+q',p'}$ et $z_{\hat{A}}\in N^{J_{\hat{A}}}$).

5.4. Lemme :*Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
F^pC^n(\mathbf{g};M)\otimes F^qC^m(\mathbf{g};M') & \xrightarrow{\phi\otimes\phi} & CS^{n-p,p}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M)\otimes CS^{m-q,q}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M') \\
\cup\downarrow & & \downarrow\cup \\
F^{p+q}C^{n+m}(\mathbf{g};M\otimes M') & \xrightarrow[\phi]{} & CS^{n+m-p-q,p+q}(\mathbf{h},\mathbf{g}/\mathbf{h};M\otimes M')
\end{array}$$

Démonstration: Soit $\omega\in F^pC^n(\mathbf{g};M)$ et $\omega'\in F^qC^m(\mathbf{g};M')$; on a $\phi(\omega\cup\omega')=(\phi(\omega\cup\omega')_K)_{K\in S_{n+m,p+q}}$ où $\phi(\omega\cup\omega')_K=(\omega\cup\omega')\circ s_K$.
Soit $z=z_1\otimes\ldots\otimes z_{n+m}\in N^K$; il y a donc dans ce terme $n+m-p-q$ facteurs $z_i\in\mathbf{h}$. On a

$$\phi(\omega\cup\omega')_K(z)=(\omega\cup\omega')(s_Kz)=\sum_{A\in X(n+m,n)}\epsilon(A)\omega((s_Kz)_A)\otimes\omega'((s_Kz)_{\hat{A}}).$$

Soit $A \in X(n+m,n)$. Si A est tel que $n-p+1$ facteurs de $(s_K z)_A$ sont dans $\mathbf{h}$, ou $m-q+1$ facteurs de $(s_K z)_{\hat{A}}$ sont dans $\mathbf{h}$, alors le terme correspondant de la somme est nul. Il ne reste donc dans la somme que les termes tels que $(s_K z)_A$ contient exactement $n-p$ facteurs dans $\mathbf{h}$ (et par suite $(s_K z)_{\hat{A}}$ contient exactement $m-q$ facteurs dans $\mathbf{h}$). Mais cela revient donc à dire qu'il existe $I_A \in S_{n,p}$ tel que $z_A \in N^{I_A}$. On a alors $\omega((s_K z)_A) = \omega \circ s_{I_A}(z_A) = \phi(\omega)_{I_A}(z_A)$. De même on a $\omega'(s_K z)_{\hat{A}}) = \phi(\omega')_{\widehat{I_A}}(z_{\hat{A}})$.
On a alors, la somme portant sur tous les $A \in X(n+m,n)$ pour lesquels il existe $I_A \in S_{n,p}$ tel que $z_A \in N^{I_A}$,

$$\phi(\omega \cup \omega')_K(z) = \sum \epsilon(A)\phi(\omega)_{I_A}(z_A) \otimes \phi(\omega')_{\widehat{I_A}}(z_{\hat{A}}) = (\phi(\omega) \cup \phi(\omega'))_K(z).$$

5.5. Corollaire : *L'isomorphisme $\phi_0 : E_0^{p,q} \to CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$ est multiplicatif, c'est-à-dire pour tout $e \in E_0^{p,q}$ et $e' \in E_0^{p',q'}$ on a $\phi_0(e \cup e') = \phi_0(e) \cup \phi_0(e')$.*

5.6. Corollaire : *La différentielle d du complexe $CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$ est une dérivation.*

5.7. Il en résulte qu'on a une opération

$$\cup : H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)) \otimes H^{q'}(CS^{*,p'}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M')) \to H^{q+q'}(CS^{*,p+p'}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M \otimes M')).$$

5.8. Corollaire : *L'isomorphisme $\phi_1 : E_1^{p,q} \to H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))$ est multiplicatif, c'est-à-dire pour tout $\epsilon \in E_1^{p,q}$ et $\epsilon' \in E_1^{p',q'}$ on a $\phi_1(\epsilon \cup \epsilon') = \phi_1(\epsilon) \cup \phi_1(\epsilon')$.*

5.9.Corollaire : *La différentielle*

$$\Delta : H^q(CS^{*,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)) \to H^q(CS^{*,p+1}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))$$

est une dérivation.

5.10. Il en résulte une opération

$$\cup : H^p(H^q(CS^{*,*}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))) \otimes H^{p'}(H^{q'}(CS^{*,*}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M'))) \to H^{p+p'}(H^{q+q'}(CS^{*,*}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M \otimes M'))).$$

5.11. Corollaire : *L'isomorphisme $\phi_2 : E_2^{p,q} \to H^p(H^q(CS^{*,*}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M))$ est multiplicatif.*

Appendice : Les formules de Cartan

A.1. Soit $\mathbf{g}$ une algèbre de Leibniz, $\mathbf{h}$ un idéal bilatère de $\mathbf{g}$ et M un $\mathbf{g}$ - module.
L'opérateur $d : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q+1,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$ a été défini au no 3.3.

A.2. Pour tout $x \in \mathbf{g}$ on définit un opérateur

$$\theta(x) : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$$

de la façon suivante: si $\omega = (\omega_I)_{I \in S_{p+q,p}}$ alors $\theta(x)(\omega) = (\theta(x)(\omega)_I)_{I \in S_{p+q,p}}$ où, pour tout $z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q} \in N^I$, on a posé

$$\theta(x)(\omega)_I(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}) = \omega_I(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}).x - \sum_{1 \leq i \leq p+q} \omega_I(z_1 \otimes \ldots \otimes (z_i.x) \otimes \ldots \otimes z_{p+q})$$

($z_i.x$ désignant l'action de $\mathbf{g}$ sur $\mathbf{h}$ si $i \in I'$ et l'action de $\mathbf{g}$ sur $\mathbf{g}/\mathbf{h}$ si $i \in I''$).
En particulier si $y \in \mathbf{h}$ on a

$$\theta(y)(\omega)_I(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}) = \omega_I(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}).y - \sum_{i \in I'} \omega_I(z_1 \otimes \ldots \otimes [z_i; y] \otimes \ldots \otimes z_{p+q}).$$

A.3. Proposition : *Pour tout $x, x' \in \mathbf{g}$ on a*

$$\theta([x; x']) = [\theta(x'); \theta(x)]$$

et

$$[\theta(x); d] = 0.$$

Démonstration : Il suffit de vérifier la première formule au niveau des composantes; le calcul se fait alors exactement comme dans [L-P].
La vérification de la deuxième formule se fait par calcul direct au niveau des composantes.

A.4. Pour tout $y \in \mathbf{h}$ et tout entier $1 \leq k \leq p+q$ (avec $q \geq 1$), on définit un opérateur

$$i_k(y) : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q-1,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$$

de la façon suivante : si $\omega = (\omega_I)_{I \in S_{p+q,p}}$ alors $i_k(y)(\omega) = (i_k(y)(\omega)_J)_{J \in S_{p+q-1,p}}$,où on a posé

$$i_k(y)(\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q-1}) = (-1)^{k+1} \omega_{J_k}(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{k-1} \otimes y \otimes z_k \otimes \ldots \otimes z_{p+q-1})$$

si $l_{q-1} < k$ et $i_k(y)(\omega)_J = 0$ sinon.

A.5. Finalement on définit encore un opérateur

$$\theta_k(y) : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$$

en posant, pour tout $J \in S_{p+q,p}$, $\theta_k(y)(\omega)_J = \theta(y)(\omega)_J$ si $l_k \leq k$, $\theta_k(y)(\omega)_J = 0$ si $k \leq l_{q-1}$ et

$$\theta_k(y)(\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q}) = (-1)^{l_q+1} \theta(z_{l_q}) i_k(y)(\omega)_{J-\{i_{l_q}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_q}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q})$$

si $l_{q-1} < k \leq l_q - 1$.

A.6. Lemme : *Pour tout $y \in \mathbf{h}$ et tout $1 \leq k \leq p+q$ on a*

$$i_{k+1}(y) \circ d + d \circ i_k(y) = \theta_k(y).$$

Démonstration : La démonstration se fait par calculs directs au niveau des composantes, à condition de faire les observations suivantes.
Soit $J \in S_{p+q,p}$. On a évidemment $J_{k+1} - \{i_{k+1}\} = J$. Soit $w \in J'$;on a $J - \{i_w\} \in S_{p+q-1,p}$. Posons $(J - \{i_w\})' = \{l'_1; ...; l'_{q-1}\}$; si $w \neq l_q$ on a $l'_{q-1} = l_q - 1$ et si $w = l_q$ on a $l'_{q-1} = l_{q-1}$.
Si $l_q < k+1$ on a donc $l'_{q-1} < k$ et $(J - \{i_w\})_k = J_{k+1} - \{i_w\}$.
Supposons $l_q \geq k+1$; si $w \neq l_q$ ou si $w = l_q$ et $k \leq l_{q-1}$ on a $l'_{q-1} \geq k$.
Enfin si $l_{q-1} < k \leq l_q - 1$ on a $(J - \{i_{l_q}\})_k = J_k - \{i_{l_q+1}\}$.

A.7. Proposition : $d^2 = 0$

Démonstration : Posons $d_q = d : CS^{q,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) \to CS^{q+1,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$.
La démonstration se fait par récurrence sur q.
Soit $\omega \in CS^{0,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M) = C^p(\mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$; on a $d_1 d_0(\omega) = (d_1(d_0\omega)_J)_{J \in S_{p+2,p}}$.
Soit $J \in S_{p+2,p}$ avec $J' = \{l_1; l_2\}$. On a

$$d_1(d_0\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+2}) =$$

$$(-1)^{l_1+1}(d_0\omega)_{J-\{i_{l_1}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_1}} \otimes \ldots \otimes z_{l_2} \otimes \ldots \otimes z_{p+2}).z_{l_1}$$

$$+(-1)^{l_2+1}(d_0\omega)_{J-\{i_{l_2}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{l_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_2}} \otimes \ldots \otimes z_{p+2}).z_{l_2}$$

$$+(-1)^{l_2}(d_0\omega)_{J-\{i_{l_2}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes [z_{l_1}; z_{l_2}] \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_2}} \otimes \ldots \otimes z_{p+2}) =$$

$$(-1)^{l_1+l_2+1}(\omega_{J-\{i_{l_1}; i_{l_2}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_1}} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_2}} \otimes \ldots \otimes z_{p+2}).z_{l_2}).z_{l_1}$$

$$+(-1)^{l_1+l_2}(\omega_{J-\{i_{l_1}; i_{l_2}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_1}} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_2}} \otimes \ldots \otimes z_{p+2}).z_{l_1}).z_{l_2}$$

$$+(-1)^{l_1+l_2+1}\omega_{J-\{i_{l_1}; i_{l_2}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_1}} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_2}} \otimes \ldots \otimes z_{p+2}).[z_{l_1}; z_{l_2}] = 0$$

compte tenu des propriétés de l'action de $\mathbf{h}$ sur M.
Soit maintenant un entier $q \geq 2$ et supposons que $d_{q-1} d_{q-2} = 0$.
Soit $\omega = (\omega_I)_{I \in S_{p+q-1,p}} \in CS^{q-1,p}(\mathbf{h}, \mathbf{g}/\mathbf{h}; M)$; on a $d_q d_{q-1}(\omega) = (d_q(d_{q-1}\omega)_J)_{J \in S_{p+q+1,p}}$.

Soit $J \in S_{p+q+1,p}$ avec $J' = \{l_1; ...; l_{q+1}\}$.
Soit $z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1} \in N^J$; on a $z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1} \in N^{J-\{i_{l_{q+1}}\}}$ où $J - \{i_{l_{q+1}}\} \in S_{p+q,p}$ et $(J - \{i_{l_{q+1}}\})' = \{l_1; ...; l_q\}$.
On a $l_q < l_{q+1}$ donc compte tenu de la définition A.4. et du lemme A.6. on peut écrire

$$d_q(d_{q-1}\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) =$$
$$(-1)^{l_{q+1}+1} i_{l_{q+1}}(z_{l_{q+1}}) d_q(d_{q-1}\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) =$$
$$(-1)^{l_{q+1}+1}(\theta_{l_{q+1}-1}(z_{l_{q+1}}) d_{q-1}(\omega) - d_{q-1} i_{l_{q+1}-1}(z_{lq+1}) d_{q-1}(\omega))_{J-\{i_{l_{q+1}}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).$$

Or $l_q \leq l_{q+1} - 1$; donc compte tenu de la définition A.5., de la deuxième formule de A.3., du lemme A.6. et de l'hypothèse de récurrence on a

$$d_q(d_{q-1})\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) =$$
$$(-1)^{l_{q+1}+1}(d_{q-1} \circ \theta(z_{l_{q+1}})(\omega) - d_{q-1} \circ \theta_{l_{q+1}-2}(z_{l_{q+1}})(\omega) + d_{q-1} d_{q-2} i_{l_{q+1}-2}(z_{l_{q+1}})(\omega))_{J-\{i_{l_{q+1}}\}}(\ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots) =$$
$$(-1)^{l_{q+1}+1}(d_{q-1} \circ \theta(z_{l_{q+1}})(\omega) - d_{q-1} \circ \theta_{l_{q+1}-2}(z_{l_{q+1}})(\omega))_{J-\{i_{l_{q+1}}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).$$

Maintenant si $w \in J' - \{l_{q+1}\}$ et si on pose $(J - \{i_{l_{q+1}}\})' = \{l'_1; ...; l'_{q-1}\}$, on a $l'_{q-1} < l_q$, donc $l'_{q-1} \leq l_{q+1} - 2$. On a alors, compte tenu de la définition A.5.

$$d_{q-1} \circ \theta_{l_{q+1}-2}(z_{l_{q+1}})(\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) =$$
$$\sum_{u \in (J-\{i_{l_{q+1}}\})'} (-1)^{u+1} \theta_{l_{q+1}-2}(z_{l_{q+1}})(\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}; i_u\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_u} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).z_u$$
$$+ \sum_{(u,v) \in A((J-\{i_{l_{q+1}}\})')} (-1)^v \theta_{l_{q+1}-2}(z_{l_{q+1}})(\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}; i_v\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes [z_u; z_v] \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) =$$
$$\sum_{u \in (J-\{i_{l_{q+1}}\})'} (-1)^{u+1} \theta(z_{l_{q+1}})(\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}; i_u\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_u} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).z_u$$
$$+ \sum_{(u,v) \in A((J-\{i_{l_{q+1}}\})')} (-1)^v \theta(z_{l_{q+1}})(\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}; i_v\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes [z_u; z_v] \otimes \ldots \otimes \widehat{z_v} \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) =$$
$$d_{q-1} \circ \theta(z_{l_{q+1}})(\omega)_{J-\{i_{l_{q+1}}\}}(z_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{z_{l_{q+1}}} \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}).$$

On a donc $d_q(d_{q-1}\omega)_J(z_1 \otimes \ldots \otimes z_{p+q+1}) = 0$.

Bibliographie

[C] C:CUVIER *Homologie des algèbres de Leibniz*
Ann.Sc.Ecole Norm. Sup. 4me série, 27, 1994, 1-45

[H-S] G.HOCHSCHILD - J.P.SERRE *Cohomology of Lie algebra*
Annals of Math. Vol 57, no 3, 1953, 591-603

[L1] J.L.LODAY *Cyclic Homology*
Grund. math. Wiss. 301, Springer Verlag 1992

[L2] J.L.LODAY *Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz*
L'Enseignement mathématique 39, 1993, 269-293

[L-P] J.L.LODAY - T.PIRASHVILI *Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology*
Math. Ann. 296, 1993, 139-158

[O] J.M.OUDOM *La diagonale en homologie des algèbres de Leibniz*
C.R. Acad. Sci. Paris, tome 320, Série I, 1995, 1165 - 1170

Pierre-Paul Grivel
Section de mathématiques
Université de Genève
2-4 rue du Lièvre
CH-1211 Genève 24 Switzerland