

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Doctorat d'Université

(arrêté du 30 mars 1992)

spécialité : **Mathématiques**,

par

Olivier Courcelle

Cascades d'orbites périodiques en dimension 1 et 2 : hyperbolicité et renormalisation.

Soutenue le 8 janvier 1996

devant la commission d'examen :

V. Baladi	Rapporteur
F. Blanchard	Examineur
J.-M. Gambaudo	Examineur
G. Iooss	Président
R. S. Mackay	Examineur
Ch. Tresser	Rapporteur

à Pierre Courcelle,

Remerciements

Je remercie Gérard Iooss non seulement parce qu'il a bien voulu faire partie du jury de cette thèse, mais aussi parce qu'il m'a accueilli à Nice dans un laboratoire où j'ai pu étudier dans des conditions optimales.

Les phénomènes d'universalité dans la transition vers le chaos par dédoublement de période ont été à l'origine de ma venue à Nice. On comprendra donc que je sois extraordinairement flatté que Charles Tresser ait accepté de rapporter mes travaux et je le remercie vivement.

Viviane Baladi fut l'autre de mes rapporteurs, je l'en remercie et je la remercie aussi pour des raisons où la Suisse n'est pas étrangère.

J'exprime également toute ma gratitude à Robert Mackay, dont la conversation m'a toujours inspiré, et à François Blanchard qui ont bien voulu accepter de faire partie de ce jury.

Jean-Marc Gambaudo, aux leçons de qui j'ai tant appris, a accepté, pour le meilleur et pour le pire, de diriger cette thèse, je lui en suis profondément reconnaissant.

Je profite également de ce lieu pour remercier les membres de l'équipe de Jean-Marc : Slimane ben Miled, Jérôme Ferenbach, François Gautero, Boris Kolev, Jérôme Los, Elisabeth Pécou et Marie-Christine Pérouème, vous m'avez apporté plus que vous le pensez.

Je ne peux pas terminer sans évoquer la compagnie de mes collègues apprentis chercheurs. La place manque pour vous citer individuellement mais je vous remercie tous.

Combien d'hommes existe-t-il en un seul être ?
Autant qu'il est d'étoiles dans une goutte
de rosée sous le ciel limpide de la nuit.
Et si nous agrandissions cette goutte
afin de nous pouvoir mirer en sa profondeur,
nous y verrions les milliers d'étoiles du ciel ;
et chacune serait un monde,
chaque monde aurait ses planètes,
chaque planète ses pays, ses peuples,
et chaque peuple porterait l'histoire de son épopée
inscrite dans sa mémoire - un univers
dans une goutte éphémère.

*Mihaïl Eminescu : Le pauvre Dionis (1872),
traduit du roumain par Michel Wattremez,*

Actes Sud, 1993

Sommaire

0.1	<i>La malédiction</i>	6
0.2	Introduction	9
0.2.1	Résultats en dimension 1	10
0.2.2	Résultats en dimension 2	12
1	Cascades d'orbites périodiques en dimension 1	14
1.1	Cascades de bifurcations	14
1.2	Cascades de cycles	22
1.2.1	Quelques définitions	22
1.2.2	Cascades de cycles et entropie topologique	24
1.2.3	Cascades q -modales	25
1.2.4	Les q -horseshoes	25
1.3	Cascades d'orbites périodiques hyperboliques	32
1.3.1	Cascades hyperbolisables	32
1.3.2	Hyperbolisation	37
1.4	Renormalisation	40
1.4.1	Applications infiniment renormalisables et renormalisation fonctionnelle	40
1.4.2	Opérateurs de renormalisation	42
1.4.3	Signature d'une cascade d'orbites périodiques	44
1.4.4	Cascades points fixes	49
2	Cascades d'orbites périodiques en dimension 2	52
2.1	Cascades de tresses	52
2.1.1	Tresses et types de tresse	52

2.1.2	Réductibilité et cascades de tresses	56
2.1.3	Signature d'une cascade de tresses	59
2.2	Cascades d'orbites périodiques hyperboliques	62
2.3	Renormalisation	70

0.1 La malédiction

Newton qui inventa (avec Leibniz) le calcul infinitésimal et découvrit la loi de la gravitation universelle peut être considéré comme le père fondateur de la théorie moderne des systèmes dynamiques. Si Newton sut résoudre le problème des deux corps (ellipse), jamais il ne put mettre le mouvement de la lune en accord avec sa fameuse équation et la solution du problème des trois corps lui échappa toujours. Les irrégularités de l'orbite lunaire ne lui causaient que maux de tête et insomnies. C'est au cours d'une de ces nuits sans sommeil, alors que la lune était si pleine qu'elle semblait encore mieux le narguer que Newton, ce féru d'ésotérisme rendu plus irascible que d'habitude, aurait utilisé ses connaissances diverses pour jeter ce sort qui planera éternellement sur les mathématiciens : *Il faudra d'abord trébucher pour réussir là où j'ai échoué. Je veux que parmi les plus dignes continuateurs de cette nouvelle théorie que je laisse aux hommes, il s'en trouve un par siècle qui ne puisse faire de progrès décisifs sans se tromper de manière éclatante auparavant. Que ma volonté soit faite pour les siècles et les siècles.*

C'est Clairaut (1713-1765) qui sut le premier calculer si finement que le mouvement théorique de la lune correspondit enfin avec son mouvement réel. Il fallait donc que ce soit lui qui subisse d'abord la terrible malédiction de Newton. Ce sort est d'autant plus cruel que personne ne fit plus que Clairaut pour convaincre les français des avantages du système newtonien sur le système des tourbillons de Descartes. Quand Clairaut s'intéresse au mouvement de la lune, ce prodige, académicien dès l'âge de dix-huit ans, était déjà revenu de Laponie où il avait confirmé expérimentalement que la terre était aplatie aux pôles comme le prévoyait Newton. Il n'avait pas encore donné le rendez-vous que la comète de 1759 (Halley) honora avec tant de précision que plus personne ne devait douter de la vérité de la loi de l'attraction. On conçoit donc l'importance du problème de la lune à cette époque non consensuelle. Les meilleurs mathématiciens du temps s'y consacrent, tous égaux devant l'échec. Pour expliquer la divergence entre l'orbite calculée et l'orbite réelle D'Alembert penche pour une force spécifique à la lune, Euler invoque des tourbillons d'inspiration cartésienne et Clairaut, poussé par le mauvais génie que l'on sait, propose solennellement, lors de la séance du 15 novembre 1747 de l'Académie des Sciences de Paris, de modifier la célèbre loi du carré. Les cartésiens ricanent, les newtoniens se déchirent et Clairaut, newtonien de la première heure, gêné de semer la discorde dans son propre camp

retourne à ses calculs. Ce n'est qu'un an plus tard, après avoir retrouvé le terme qu'il avait eu le tort de négliger, qu'il se rétractera et annoncera qu'il a enfin déduit le mouvement correct de la lune de la seule loi de l'attraction. Intrigué, Euler qui ne parvient toujours pas à ce résultat, suggère à l'Académie de St Petersburg de choisir la théorie de la lune comme sujet de concours, reçoit le manuscrit de Clairaut (qui gagnera haut la main) et ne cache pas son admiration : *Pour moi je vous félicite en connaissance de cause, et j'ose même dire, que je regarde cette découverte, comme la plus importante et la plus profonde, qui ait été jamais faite en mathématique [JT].*

Qui d'autre que Poincaré au dix-neuvième siècle, pouvait encourir les foudres posthumes de Newton ? Entre autres choses, il est en effet considéré comme le fondateur de la théorie contemporaine des systèmes dynamiques et ses phrases les plus célèbres sont à l'exergue de tous nos livres. Il sut nous faire renoncer à l'espoir longtemps caressé d'obtenir des solutions analytiques du problème des trois corps et nous proposa à la place une théorie qualitative d'un intérêt de premier ordre. Il nous montra comment ramener l'étude d'une équation différentielle au voisinage d'une orbite périodique à l'étude de l'itération d'une application continue sur un espace un peu plus petit. L'itération entraîna ainsi de plein pied dans la théorie des systèmes dynamiques et y prit une place croissante pour acquérir de nos jours un statut autonome. Poincaré fut aussi le premier qui mit en évidence l'existence de points homoclines (passé=futur) dans le problème des trois corps et qui nota la dynamique compliquée que leur présence entraînaient. La phrase est bien connue : *On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de la dynamique... Aujourd'hui, sous des hypothèses convenables, la présence de points homoclines est synonyme de chaos. Comme Clairaut, c'est sur ce fameux problème des trois corps que Poincaré devait trébucher. Dans l'édition corrigée de *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique : Mémoire couronné par le prix de S.M. le roi Oscar de Suède le 21 janvier 1889* se trouve la ligne suivante où Poincaré, évoquant le collègue qui relut avec soin son mémoire, écrit que c'est même lui qui, appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et rectifier une importante erreur. L'erreur dut être importante, au moins à ses yeux, car on dit que Poincaré dépensa bien plus d'argent que ne lui en avait rapporté le prix pour racheter tous les exemplaires de l'édition erronée.*

Parmi toutes les mains qui cherchèrent à dessiner la figure à laquelle Poincaré faisait allusion, une main fut si sûre qu'elle traça fermement la forme d'un fer à cheval. Cette simple image donnait tant d'information sur la complexité de la dynamique engendrée par les points homoclines que Newton ne pouvait le tolérer qu'à l'expresse condition que ce fer à cheval fut le point d'orgue de la chute de cet insolent dessinateur.

Stephen Smale a débuté dans le métier en retournant des sphères par la seule force de sa pensée avant de démontrer la "conjecture de Poincaré" en dimension grande puis de s'illustrer dans un nombre impressionnant de divers domaines des mathématiques [HMS] dont la théorie des systèmes dynamiques. Smale s'est tout bonnement proposé de caractériser les systèmes qui existent dans la nature, les systèmes structurellement stables, c'est-à-dire ceux qui légèrement perturbés conservent qualitativement la même dynamique. Le croche-pied séculaire de Newton fit conjecturer à Smale en 1959 que ces systèmes avaient tous une dynamique particulièrement simple puisque tout devait converger vers un nombre fini d'orbites périodiques. On l'a vu, c'est en étudiant la dynamique au voisinage d'un point homocline que Smale trouva son fameux fer à cheval qui devint le premier exemple de difféomorphisme structurellement stable avec une infinité d'orbites périodiques. Smale ne s'est pas contenté de répondre négativement à sa conjecture, il sut donner la bonne caractérisation des difféomorphismes structurellement stables (Axiom A + Transversalité) bien que la démonstration de son intuition se soit étalée sur plusieurs décennies et fit appel à de nombreux mathématiciens dont Ricardo Mañé qui (essentiellement) clôtura ce sujet en un théorème que l'on a coutume de résumer par la formule : stabilité = hyperbolicité.

0.2 Introduction

Un système dynamique sera pour nous la donnée d'un espace topologique (compact) X et d'une application continue $f : X \longrightarrow X$. L'orbite d'un point x de X est l'ensemble $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ où f^n désigne l'itérée n -ième de f . Un point x est périodique s'il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n(x) = x$. Le plus petit entier p vérifiant cette propriété est appelé la période de x . L'orbite de x est dite périodique, elle est finie de cardinal p .

Deux systèmes dynamiques $f : X \longrightarrow X$ et $f' : X' \longrightarrow X'$ ont qualitativement la même dynamique s'ils sont topologiquement conjugués c'est-à-dire s'il existe un homéomorphisme $h : X \longrightarrow X'$ tel que $f' = hfh^{-1}$. Les points périodiques de f se transportent alors par h pour donner des points périodiques de f' de même période. Plus généralement, l'objet de la théorie qualitative des systèmes dynamiques est l'étude des propriétés invariantes par conjugaison topologique. On est donc naturellement amené à rechercher des invariants topologiques, c'est-à-dire des quantités $I(f)$ qui vérifient $I(f) = I(hfh^{-1})$.

L'une de ces quantités, un réel positif, est l'entropie topologique qui fut introduite par Adler, Konheim et Mc Andrew. On peut alors étudier les propriétés dynamiques d'un système selon la valeur de son entropie.

Nous allons nous intéresser exclusivement aux deux classes de systèmes dynamiques formées des applications continues et différentiables de l'intervalle $I = [0, 1]$ d'une part et des difféomorphismes du disque $D = \{z \in C; |z| \leq 1\}$ préservant l'orientation d'autre part. Nous mènerons ces deux études de manière parallèle afin d'insister sur les similitudes des dynamiques de ces deux classes de systèmes.

L'un de ces points communs est la présence, quand l'entropie topologique est strictement positive (application chaotique), d'une infinité d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$ structurée sous forme de *cascade* en un sens qui sera précisé dans le courant du texte. L'étude de ces cascades est l'objet de cette thèse.

En dimension 1, les cascades les plus connues sont les cascades de dédoublement qui apparaissent quand une famille paramétrée d'applications de l'intervalle "transite vers le chaos par dédoublement de période". La plus célèbre de toutes est sans conteste celle créée quand chaque application de la famille est unimodale (un seul extremum relatif) à cause de l'universalité de la vitesse de création des orbites périodiques de la cascade.

Cette universalité inattendue a pu être expliquée par l'étude d'un point fixe d'un "opérateur

de renormalisation” agissant sur des applications “infiniment renormalisables”. Il se trouve qu’aux applications infiniment renormalisables, tant en dimension 1 qu’en dimension 2, sont naturellement associées des cascades d’orbites périodiques et l’étude de celles correspondant à des points fixes d’opérateurs de renormalisation seront l’objet de nos soins attentifs. Auparavant, nous allons nous intéresser aux cascades d’orbites périodiques hyperboliques car elles résistent aux perturbations.

Cette thèse est divisée en deux chapitres traitant respectivement de la dimension 1 et de la dimension 2

0.2.1 Résultats en dimension 1

En dimension 1, une cascade d’orbites périodiques se caractérise par une suite (cascade) de cycles que l’on peut alors considérer comme un objet abstrait.

On se propose dans un premier temps de déterminer toutes les cascades de cycles qui peuvent exister dans une application de l’intervalle de façon que la fermeture des points périodiques qui lui correspondent soit un ensemble hyperbolique (cascades hyperbolisables). A cette fin, nous introduisons la notion de nombre de points critiques d’une cascade de cycle qui est le nombre minimum (éventuellement infini) de points critiques que doit posséder une application différentiable de l’intervalle pour exhiber cette cascade et nous montrons le théorème suivant :

Théorème 1.13 : *Une cascade de cycle est hyperbolisable si et seulement si son nombre de points critiques est fini.*

Quand le nombre de points critiques d’une cascade de cycles est fini et vaut q , on dira que la cascade est q -modale. On montre notamment que toutes les cascades q -modales sont présentes dans les application q -modales (i.e exactement q extrémums relatifs) suggérée sur la figure 1 auxquelles on se réfèrera sous le nom de q -horseshoes unidimensionnels.

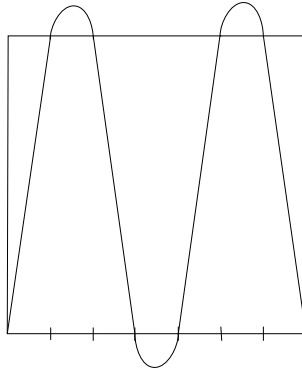


Figure 1

Dans un second temps, nous nous intéresserons aux phénomènes qui se produisent quand une cascade passe d'un état non hyperbolique à un état hyperbolique, notamment dans le cas des cascades de dédoublement obtenues lorsque une famille d'applications q -modale transite vers le chaos par dédoublement de période. Utilisant des résultats de Hu et Tresser et moyennant quelques hypothèses de non-dégénérescence (points critiques non plats), nos observations peuvent se résumer par la formule lapidaire suivante :

Corollaire 1.22 : *Une familles d'application q -modales qui transite vers le chaos par dédoublement de période transite vers l'hyperbolicité par dédoublement de cantor.*

Finalement, pour clore ce chapitre consacré à la dynamique unidimensionnelle, on s'intéresse aux cascades de cycles q -modales qui sont associées à des applications de l'intervalle q -modales points fixes d'opérateurs de renormalisation. A cet effet, on introduit dans ce travail la notion de signature qui est un vecteur à $q + 1$ composantes dont la k -ième composante est la suite $\{\Phi(k, n)/p_n\}_{n \geq 0}$ où $\Phi(k, n)$ est le nombre de points périodiques de période p_n de la cascade situés dans le k -ième intervalle de monotonie de l'application. On montre que quand cette application est point fixe d'un opérateur de renormalisation, la cascade associée a une signature qui comporte des aspects périodiques. Plus précisément, posant $r(k, n) = \Phi(k, n + 1) - p_{n+1}/p_n \Phi(k, n)$ pour tout n et tout k entre 0 et q , on montre le résultat suivant qui sera utile en dimension 2 :

Théorème 1.31 : *Une cascade de cycles q -modale associée à une application q -modale point fixe d'un opérateur de renormalisation a une signature qui vérifie pour tout n suffisamment grand et tout k entre 0 et q : $r(k, n + q^*) = r(k, n)$ où q^* est un entier indépendant de k et n .*

On se référera par la suite à ces cascades sous le nom de "cascades points fixes".

0.2.2 Résultats en dimension 2

En dimension 2, une cascade d'orbites périodiques d'un difféomorphisme du disque préservant l'orientation se caractérise par une suite ou cascade de (types de) tresses. Concernant l'hyperbolisation, nos résultats sont moins aboutis qu'en dimension 1. Le fait que toutes les cascades unidimensionnelles hyperbolisables soient présentes dans des q -horseshoes unidimensionnels peut laisser penser que les cascades bidimensionnelles hyperbolisables sont exactement celles exhibées par les applications inspirées par le fer à cheval de Smale [Sm] (*figure 2*) auxquelles on se référera sous le nom d'épaississements de q -horseshoes unidimensionnels ou encore de horseshoes généralisés.

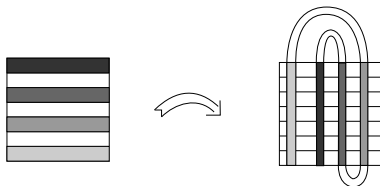


Figure 2

A ce stade de nos travaux, nous n'avons pu qu'étudier les propriétés communes des cascades de types de tresses obtenues en épaississant les cascades de cycles q -modales de dédoublement représentées par les q -horseshoes unidimensionnels pour tenter de dégager une obstruction topologique à l'hyperbolisation des cascades de tresses.

Comme en dimension 1, on introduit la notion de signature d'une cascade de tresses qui est une suite de réels qui mesure la "vitesse de rotation" de l'orbite périodique de génération $n + 1$ autour de l'orbite de génération n [GST]. La propriété commune aux cascades de dédoublement épaissies est la suivante :

Théorème 2.12 : *Une cascade de types de tresses obtenue en épaississant une cascade de cycle q -modale de dédoublement a une signature qui converge exponentiellement vite en oscillant.*

Finalement, on étudie les cascades de tresses du point de vue de la renormalisation et on verra que les opérateurs de renormalisation agissent sur les signatures des cascades de tresses essentiellement comme l'opérateur de décalage. L'épaississement d'une cascade de cycles q -modale évoquée plus haut est un moyen de passer de la dimension 1 à la dimension 2 et donc de dégager

des éventuels liens entre la renormalisation en dimension 1 et 2. Nos travaux suggèrent qu'une cascade de cycles q -modale point fixe s'épaissit pour donner une orbite périodique des opérateurs de renormalisation sur les cascades de types de tresses, la période de cette orbite périodique étant en général plus grande que 1 à la seule exception de la fameuse cascade unimodale qui s'épaissit (fer à cheval de Smale) pour donner un point fixe d'un opérateur de renormalisation sur les tresses.

De fait on montre seulement le théorème suivant :

Théorème 2.15 : *Une cascade de cycles q -modale de dédoublement point fixe s'épaissit pour donner une orbite prépériodique¹ des opérateurs de renormalisation sur les cascades de tresses.*

Signalons pour terminer que la lecture des démonstrations de tous ces résultats, si nous avons insisté sur leurs aspects les plus combinatoires, aurait rebuté le mieux disposé de nos lecteurs. Nous avons donc choisi de débiter cette thèse par une section concernant les cascades obtenues par bifurcation de dédoublement de période. Cette partie est inutile sur le plan strictement technique mais elle justifie l'emploi d'une terminologie qui permet alors une rédaction moins austère.

¹après un nombre fini d'itérations, le point devient périodique.

Chapitre 1

Cascades d'orbites périodiques en dimension 1

Le mieux pour introduire la notion de cascade d'orbites périodiques de l'intervalle est probablement de se souvenir de la célèbre cascade de bifurcations qui apparaît dans une famille d'applications unimodales convenablement paramétrée et qui permit à Couillet-Tresser et Feigenbaum de découvrir "l'universalité dans la transition vers le chaos par dédoublement de période" [CT, Fe].

1.1 Cascades de bifurcations

Considérons une application $F : R \times I \longrightarrow R, (\mu, x) \longrightarrow F(\mu, x)$, F différentiable, que l'on note f_μ pour mieux montrer qu'à la valeur μ du paramètre, on itère $x \longrightarrow F(\mu, x) = f_\mu(x)$.

Supposons que pour la valeur μ_0 , f_{μ_0} admette un point fixe $x(\mu_0)$. En vertu du théorème des fonctions implicites, si $f'_{\mu_0}(x(\mu_0)) \neq 1$, pour des valeurs μ proches de μ_0 , f_μ admet un point fixe $x(\mu)$ qui dépend régulièrement de μ , ce point fixe existant en fait tant que $f'_\mu(x(\mu)) \neq 1$.

Un point fixe $x(\mu_0)$ bifurque à la valeur du paramètre μ_0 si pour toute valeur μ aussi proche soit-elle de μ_0 , soit le point fixe disparaît, soit une orbite périodique (distincte du point fixe) apparaît, aussi proche que l'on veut du point fixe pourvu que μ soit assez proche de μ_0 . Toujours en raison du théorème des fonctions implicites (appliqué en considérant aussi les itérées de f_{μ_0}) un point fixe ne peut bifurquer que si $|f'_{\mu_0}(x(\mu_0))| = 1$.

Dans le cas où cette dérivée est 1, comme pour μ suffisamment proche de μ_0 , f_μ est croissante

au voisinage de $x(\mu)$, si une orbite périodique apparaît, c'est obligatoirement un point fixe (bifurcation noeud-col).

Si au contraire la dérivée du point fixe est -1 , on ne peut pas créer d'autres points fixes car pour μ suffisamment proche de μ_0 , f_μ est décroissante au voisinage de $x(\mu)$ alors que f_μ devrait préserver l'ordre de ces points fixes. Cette propriété de décroissance implique aussi que seules des orbites de période 2 peuvent apparaître. Si c'est le cas, les deux points périodiques de période 2 sont dits *frères*, *fil*s de leur *père* qui est le point fixe. Comme l'enveloppe convexe des deux frères est incluse dans son image par f_μ , f_μ possède un point fixe entre les deux frères qui est forcément le point fixe $x(\mu)$. On a donc la propriété généalogique suivante : *le père est entre ses deux fils*. Ce fait est conservé tant que ces orbites périodiques existent car ces trois points dépendent continûment du paramètre μ .

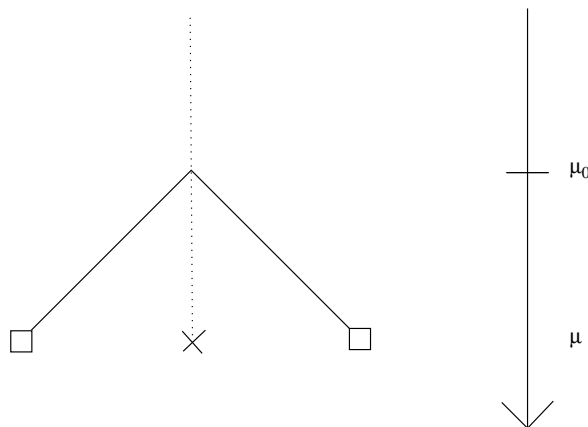


Figure 3

Signalons enfin qu'il suffit que des coefficients bien précis du développement limité de F au voisinage de $(\mu_0, x(\mu_0))$ ne soient pas nuls pour que cette orbite de période 2 apparaisse effectivement, la situation que l'on vient de décrire est générique et porte le nom de *bifurcation de dédoublement de période* [dMvS].

En considérant $f_{\mu_0}^p$ et en changeant ce qui doit être changé, on peut adapter ces notions et résultats à une orbite de période p au lieu d'un point fixe. Une telle orbite qui bifurque ne peut que disparaître ou créer des orbites de même période (si la dérivée de l'orbite périodique

$(f_{\mu_0}^p)'(x(\mu_0)) = 1$ où $x(\mu_0)$ est un des points de l'orbite, la dérivée ne dépendant pas du choix de ce point) ou créer des orbites de période $2p$ si $(f_{\mu_0}^p)'(x(\mu_0)) = -1$.

Dans ce dernier cas, chaque point de l'orbite de période p (*un père*) est situé entre deux points de l'orbite de période $2p$ (*ses fils, deux frères*) qui sont aussi proches que l'on veut du point de période p pourvu que μ soit assez proche de μ_0 (*figure 4*).

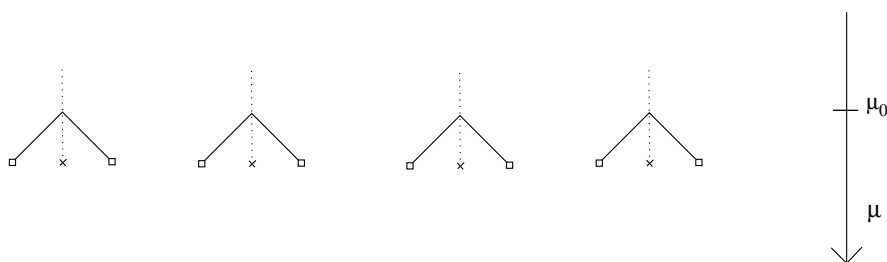


Figure 4

On a donc la propriété généalogique suivante, conservée tant que les orbites existent : *l'intérieur de l'enveloppe convexe d'un couple de frères ne contient qu'un de leur ascendant qui est leur père.*

Remarquons aussi que la permutation associée à l'orbite de période $2p$ envoie un couple de frères sur un couple de frères et permute ces couples comme les points de l'orbite de période p sont permutés. Ce fait nous permettra plus tard d'abstraire la notion de cascade d'orbites périodiques.

On peut maintenant donner la définition d'une cascade de bifurcations où un point fixe bifurque pour donner une orbite de période 2 qui va bifurquer pour donner naissance à une orbite de période 4...

Définition 1.1 Une famille paramétrée d'applications de l'intervalle $(f_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ possède une cascade de bifurcations de dédoublement de période s'il existe une suite (bornée) de valeur du paramètre $\mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_n < \dots < \mu_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ telle que :

Pour tout n , pour tout $\mu > \mu_n$, f_μ possède une orbite périodique $\Theta_n(\mu)$ de période 2^n où $\Theta_{n+1}(\mu)$ est née du dédoublement de $\Theta_n(\mu)$ à la valeur du paramètre μ_n , $\Theta_n(\mu)$ ne bifurquant plus pour des valeurs $\mu > \mu_n$ (*figure 5*).

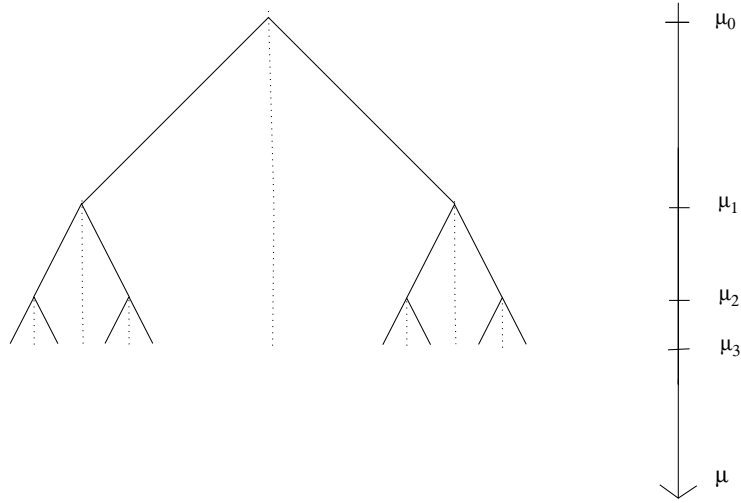


Figure 5

Pour ne pas alourdir les notations, on marque Θ_n pour $\Theta_n(\mu)$ ce qui est sans grandes conséquences puisque la façon dont sont ordonnés sur l'intervalle les points périodiques de la cascade (ainsi que la façon dont ils sont permutés) ne varie plus une fois qu'ils sont apparus.

Les termes généalogiques seront toujours pris dans leur sens commun, à titre d'exemple une lignée est une suite $\{x_n \in \Theta_n\}_{n \geq 0}$ où pour chaque n , x_{n+1} est le père de x_n .

Comme d'habitude, on a la propriété généalogique : à chaque génération, l'intérieur de l'enveloppe convexe d'un couple de frères ne contient qu'un de leur ascendant qui est leur père. On a vu que cette propriété était vraie à la génération 1, on l'établit dans le cas général en se plaçant juste après que les frères sont apparus.

On sait par ailleurs que de telles cascades existent, par exemple dans la famille d'applications unimodales $+-$, $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ qui pour tout $\mu > 0$ ne possède qu'un point critique $c(\mu) = 1/2$ et qui est croissante sur $I^+ = [0, c]$ et décroissante sur $I^- = [c, 1]$. Cet exemple bien connu nous sera très instructif.

Quand le point fixe bifurque, il est dans I^- car sa dérivée doit être -1 et juste après la bifurcation ses deux fils sont donc aussi dans I^- . A ce stade l'orbite de période 2 ne peut bifurquer puisque sa dérivée est positive (environ $-1 \times -1 = 1$). Pour bifurquer un des fils du point fixe devra devenir critique pour se trouver ensuite dans I^+ , ce fils étant forcément celui qui était le plus proche du point critique juste après la première bifurcation. Son père (ainsi que son frère) ne peut pas devenir critique car sinon ce couple père-fils s'enverrait de façon croissante alors qu'il s'envoyait de façon décroissante juste après la première bifurcation. La

position mutuelle de tous ces points est schématisée sur la figure 6.

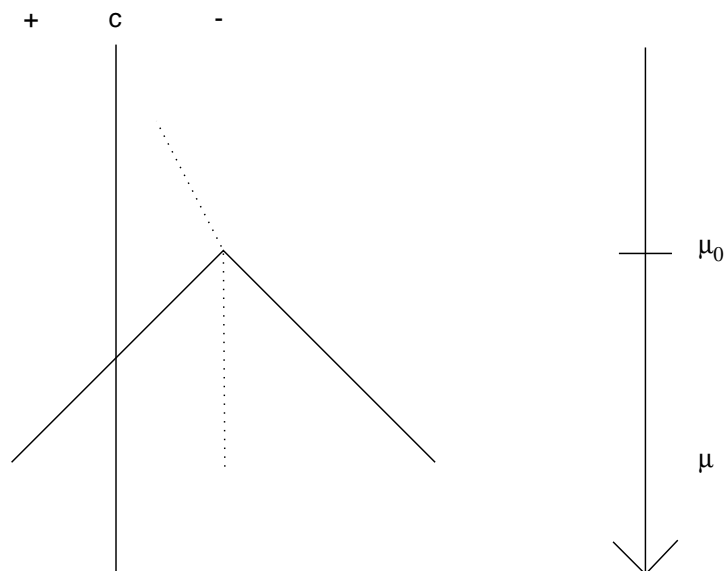


Figure 6

L'orbite Θ_2 est maintenant en état de bifurquer et elle le fait. Juste un peu après l'orbite de période 4 a deux points dans I^+ et deux points dans I^- . Pour des raisons déjà exposées, un de ces points doit devenir critique et changer d'intervalle de monotonie pour pouvoir bifurquer et donner naissance à l'orbite de période 8. Ce point est forcément un des fils du point de période 2 qui avait jadis passé le point critique puisque les autres sont "bloqués" par le point fixe ; et c'est celui qui était le plus proche du point critique, son père ne pouvant plus devenir critique. On peut répéter ces arguments indéfiniment pour obtenir le diagramme suivant :

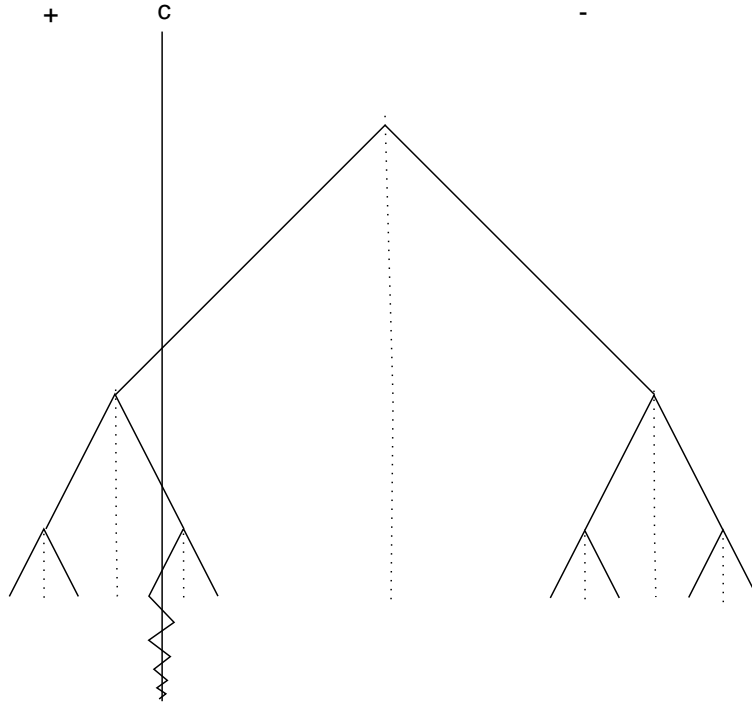


Figure 7

Notant $\Phi(0, n)$ et $\Phi(1, n)$, le nombre de points de Θ_n respectivement dans I^+ et I^- quand toutes les orbites périodiques de la cascade sont apparues, on a $\Phi(0, 0) = 0$, $\Phi(1, 0) = 1$ et pour tout n :

$$\Phi(0, n + 1) = 2\Phi(0, n) + (-1)^n$$

$$\Phi(1, n + 1) = 2\Phi(1, n) - (-1)^n$$

Remarquons par ailleurs que ce diagramme permet de connaître la façon dont sont permutés les points périodiques (par récurrence, en se plaçant juste après que l'orbite naisse et en tenant compte de l'intervalle de monotonie où se trouvent les couples de frères).

Notons que jamais nous n'avons utilisé la formule analytique de f_μ mais uniquement le fait que, pour toute valeur du paramètre, f_μ ne possède qu'un point critique, qu'elle est d'abord croissante puis décroissante (type $+ -$) et que cette famille possède une cascade de bifurcations. On obtient donc les mêmes résultats pour n'importe quelle famille qui vérifie ces propriétés.

Le cas où la famille serait de type $- +$, c'est-à-dire que f_μ serait d'abord décroissante ensuite croissante, se traite de manière analogue, son diagramme est présenté ci-après.

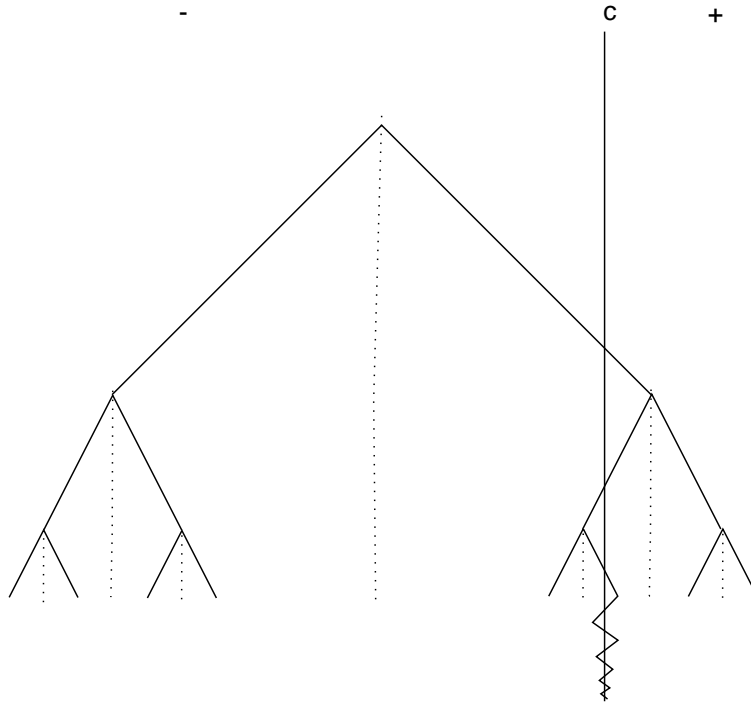


Figure 8

Proposons-nous maintenant d'étudier les cascades de bifurcations de dédoublement de période qui apparaissent dans des familles d'applications multimodales. Une application continue de l'intervalle f est q -modale si elle a exactement q extremums relatifs $c_1 < c_2 < \dots < c_q$. Posant $c_0 = 0$ et $c_{q+1} = 1$, les $q + 1$ intervalles $[c_i, c_{i+1}]$ sont appelés intervalles de monotonie de f . Par famille d'applications q -modales, on entend que pour chaque valeur μ du paramètre, f_μ est q -modale.

Supposons maintenant qu'une telle famille possède une cascade de bifurcations de dédoublement de période et plaçons-nous à une valeur du paramètre proche de μ_n quand Θ_{n+1} vient de naître. La dérivée de Θ_{n+1} est positive proche de 1 alors qu'elle doit être négative à la prochaine bifurcation. A nouveau un point de Θ_{n+1} doit devenir critique et changer d'intervalle de monotonie. Contrairement au cas unimodal, il y a maintenant le choix puisque l'application possède plusieurs points critiques. En fait, plusieurs points de Θ_{n+1} peuvent devenir critiques et pire encore, ils peuvent franchir plusieurs points critiques (*figure 9*).

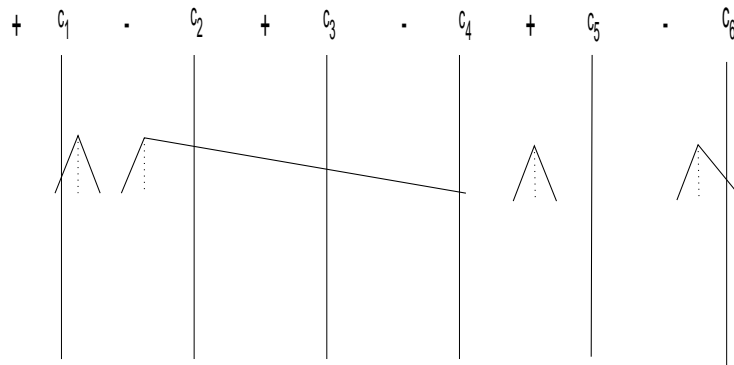


Figure 9

Pour ajouter à la confusion, il n'est pas exclu que des ascendants de points de Θ_{n+1} changent eux aussi d'intervalle de monotonicité (figure 10).

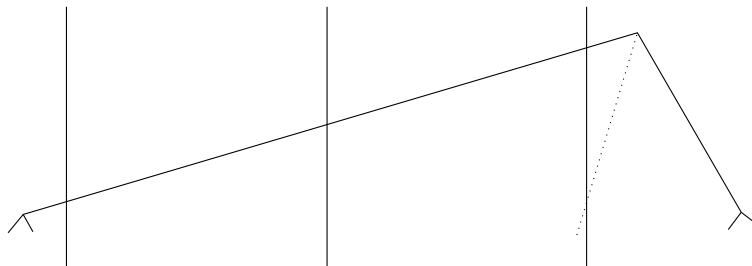


Figure 10

C'est la propriété généalogique (*A chaque génération, l'intérieur de l'enveloppe convexe d'un couple de frères ne contient qu'un de leur ascendant qui est leur père*) qui va nous permettre de dégager des résultats généraux mais il est maintenant temps de conceptualiser la notion de cascade d'orbites périodiques afin de nous affranchir des phénomènes de bifurcation et des familles paramétrées à l'usage si malaisé.

1.2 Cascades de cycles

1.2.1 Quelques définitions

Le lecteur pourra avantageusement consulter *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one* [ALM] pour ce qui concerne les cycles associés aux orbites périodiques d'une application de l'intervalle.

Dans notre contexte, il est commode d'identifier tous les ensembles totalement ordonnés de même cardinal fini, ce que nous ferons implicitement. Si $P_p = \{x_1 < x_2 < \dots < x_p\}$ est un tel ensemble, un bloc de taille k est un ensemble de k points consécutifs de p . Les blocs disjoints de P_p sont naturellement ordonnés par la formule $B < B'$ si $\max B < \min B'$. Les blocs de taille 1 et p sont dits triviaux. Un cycle π de P_p est renormalisable (ou réductible, ou ayant une structure de blocs) s'il laisse invariant une partition de P_p par des blocs non triviaux. Les blocs de la partition ont alors tous la même taille et leur nombre divise p . La façon dont sont permutés les blocs d'une telle partition définit un autre cycle qui est dit induit par π .

Définition 1.2 *Une cascade de cycles est une suite $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ de cycles renormalisables où pour tout n , π_n est un cycle induit par π_{n+1} .*

Notant p_n l'ordre des cycles π_n , comme p_n divise p_{n+1} , on a $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$ où $b_{n+1} > 1$. Pour avoir des formules plus homogènes on pose $b_0 = p_0$. Si $b_n = 2$ pour tout n , la cascade est dite de dédoublement.

Remarquons qu'un cycle renormalisable, en général, laisse invariant plusieurs partitions par des blocs non triviaux. Toutefois, la donnée d'une cascade de cycles $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ permet de retrouver pour tout n la partition de $P_{p_{n+1}}$ dont les p_n blocs sont permutés comme π_n . On se référera à cette partition de $P_{p_{n+1}}$ sous le nom de partition standard.

Cette définition est justifiée par la dynamique de l'intervalle, notamment à cause de la propriété de *forçage* suivante : la restriction d'une application continue f de l'intervalle à une de ses orbites périodiques (naturellement ordonnée par l'ordre de l'intervalle) est un cycle. Si celui-ci est un des cycles π_{n+1} d'une cascade de cycles, alors f possède des orbites périodiques Θ_i dont les cycles associés sont π_i pour $i \leq n$ [BGMY] ; on dit que π_{n+1} force π_i . De plus, l'enveloppe convexe de chacun des blocs de la partition standard de Θ_{n+1} contient exactement un point de $\bigcup_{i=0}^n \Theta_i$ qui est dans Θ_n [BGMY]. Les points de Θ_{n+1} situés dans un même bloc de la partition standard sont dits *frères, fils* de leur *père* qui est l'unique point de Θ_n déterminé

par la remarque précédente. Pour tout n on a donc la propriété généalogique: *l'intérieur de l'enveloppe convexe d'un b_{n+1} -uplet de frères ne contient qu'un de leur ascendant qui est leur père.*

La définition suivante est donc naturelle :

Définition 1.3 *Une application continue $f : I \longrightarrow R$ possède une cascade d'orbites périodiques représentant la cascade de cycles $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ si elle a une suite d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ vérifiant pour tout n :*

$$1) f|_{\Theta_n} = \pi_n$$

2) *L'enveloppe convexe de chacun des blocs de la partition standard de Θ_{n+1} contient un unique point de $\bigcup_{i=0}^n \Theta_i$ qui est dans Θ_n (propriété généalogique).*

On dira alors que $(f, \{\Theta_n\}_{n \geq 0})$ représente $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ et même pour faire encore plus court que f représente $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$.

Si $b = \{b_n\}_{n \geq 0}$ est une suite d'entiers strictement supérieurs à 1, on note Σ_b l'ensemble des suites $\{a_n\}_{n \geq 0}$ où pour tout n , $1 \leq a_n \leq b_n$. Il est bien connu que Σ_b , muni de la distance $d(\{a_n\}_{n \geq 0}, \{a'_n\}_{n \geq 0}) = 1/2^{\min\{n; a_n \neq a'_n\}}$ (i.e deux suites sont à une distance $1/2^k$ si elles diffèrent à partir de leur k -ième terme), est un ensemble de Cantor¹.

Si f possède une cascade d'orbites périodiques de période $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$, $b_0 = p_0$, l'espace des lignées $X_b = \{\{x_n \in \Theta_n\}_{n \geq 0} \text{ où pour tout } n, x_n \text{ est le père de } x_{n+1}\}$ s'identifie naturellement à Σ_b en procédant de la manière suivante: x_0 est le le a_0 -ième point de Θ_0 et pour tout n , x_{n+1} est le a_{n+1} -ième point du a_n -ième bloc de la partition standard de Θ_{n+1} . Muni de la distance $d(\{x_n\}_{n \geq 0}, \{x'_n\}_{n \geq 0}) = 1/2^{\min\{n; x_n \neq x'_n\}}$, l'espace des lignées X_b est donc un ensemble de Cantor. D'après la définition même d'une cascade de cycles, f envoie une lignée sur une autre lignée (de façon bijective car les cycles le sont) et induit sur X_b un homéomorphisme (une isométrie) que l'on appelle odomètre². Ces remarques sur la topologie des lignées nous seront utiles pour

¹compact, parfait et totalement déconnecté.

²parce qu'il est topologiquement conjugué à "l'odomètre" $\alpha_b : \Sigma_b \longrightarrow \Sigma_b$ où

$$\alpha_b(a_0, a_1, \dots) = \begin{cases} (\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{l-1}, a_l + 1, a_{l+1}, \dots) & \text{si } a_l < b_l \text{ et } a_i = b_i \text{ pour } i < l \\ (1, 1, \dots) & \text{si } a_i = b_i \text{ pour tout } i \end{cases}$$

décrire la topologie des points d'accumulation d'une cascade d'orbites périodiques.

1.2.2 Cascades de cycles et entropie topologique

Le concept d'entropie topologique, on l'a vu, a été élaboré par Adler, Konheim et Mc Andrew [AKM]. La définition qui suit est due à Bowen [Bow].

Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \longrightarrow X$ une application continue. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$, on dira que $S \subset X$ est un ensemble (n, ϵ) séparé si :

$$\forall (x, y) \in S^2 \text{ avec } x \neq y, \exists m ; 0 \leq m < n \text{ tel que } d(f^m(x), f^m(y)) \geq \epsilon$$

C'est-à-dire que si toutes les mesures sont faites avec une précision ϵ , toutes les orbites de S sont distinguables quand on les suit pendant n itérations. Comme X est compact, S a un nombre fini d'éléments que l'on note $\#S$. Posant alors $s(n, \epsilon) = \sup\{\#S; S \text{ est } (n, \epsilon) \text{ séparé}\}$, on montre que :

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon)$$

existe (eventuellement ∞).

Définition 1.4 *Le nombre $h(f)$ est l'entropie topologique de f . L'application f est dite chaotique si son entropie topologique est strictement positive.*

Quand $X = M$ est une variété différentiable, on note $C^k(M)$ l'ensemble des applications C^k de M dans M muni de la topologie C^k . La C^k frontière du chaos est l'ensemble des applications $f \in C^k(M)$ dont tout (C^k) -voisinage contient à la fois une application d'entropie nulle et une application d'entropie positive.

L'étude des cascades de cycles ou cascades d'orbites périodiques est en partie motivée par les théorèmes suivants qui précisent comment l'entropie est liée aux cascades de dédoublement.

Théorème 1.5 [M] *Une application continue de l'intervalle chaotique possède une cascade de dédoublement.*

Théorème 1.6 [M, BF] *Si une application continue d'entropie nulle possède une cascade, c'est une cascade de dédoublement.*

Théorème 1.7 [M, BF] *Une application C^1 de l'intervalle à la C^1 -frontière du chaos possède une cascade de dédoublement.*

Pour ces raisons, les cascades de cycles de dédoublement sont aussi fréquemment appelées cascades sans entropie. Les cascades qui ne sont pas des cascades de dédoublement existent aussi en dynamique de l'intervalle comme nous allons le constater. Définissons auparavant le nombre de points critiques d'une cascade.

1.2.3 Cascades q -modales

Si π est une permutation de $P_p = \{0 = x_1 < x_2 < \dots < x_p = 1\} \subset I = [0, 1]$, l'application affine par morceaux qui envoie chaque $[x_i, x_{i+1}]$ sur l'intervalle de bornes $\pi(x_i)$ et $\pi(x_{i+1})$ a un certain nombre d'extrémaux relatifs, ceux-ci sont des points de P_p , on les appelle les points critiques de π , leur nombre est noté $C(\pi)$ et la permutation est dite $C(\pi)$ -modale. Si une application continue de l'intervalle possède une orbite périodique dont le cycle associé est π , elle a au moins $C(\pi)$ extrémaux relatifs, si elle est différentiable, elle a au moins autant de points critiques.

Si $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est une cascade de cycles, à cause de la propriété de forçage, $\{C(\pi_n)\}_{n \geq 0}$ est une suite croissante. Sa borne supérieure (au moins 1, éventuellement infinie) est appelée le nombre de points critiques de la cascade. Si ce nombre est fini, il est atteint pour tout n suffisamment grand.

Définition 1.8 *Une cascade de cycles est q -modale si son nombre de points critiques est fini et vaut q .*

Le problème de l'existence d'une application C^k de l'intervalle qui représente une cascade de cycles donnée est délicat quand le nombre de points critiques de la cascade est infini (voir cependant [TW]). En revanche, une cascade q -modale est représentée par une application C^∞ [dMvS]. Nous retrouverons ce résultat d'existence en montrant que toutes les cascades q -modales sont représentées par des applications C^∞ avec q points critiques, affines sur des intervalles qui contiennent tous les points de la cascade. A cette fin nous introduisons maintenant les q -horseshoes linéaires unidimensionnels qui nous seront fort utiles pour la suite.

1.2.4 Les q -horseshoes

Soit $q \geq 1$. On considère le recouvrement de $I = [0, 1]$ par les familles d'intervalles d'intérieurs disjoints $I_k = [\frac{2k}{2q+1}, \frac{2k+1}{2q+1}]$, $k = 0, 1, \dots, q$ et $J_k = [\frac{2k-1}{2q+1}, \frac{2k}{2q+1}]$, $k = 1, 2, \dots, q$.

Sur chaque I_k , on considère l'application affine f_k qui envoie I_k sur I en préservant l'orientation si k est pair, en la renversant sinon. Celle-ci est donnée par l'équation $f_k(x) = (2q+1)x - 2k$ dans le premier cas et par $f_k(x) = -(2q+1)x + 2k$ dans le second. L'application ainsi définie sur la réunion des I_k s'étend clairement en une application C^∞ , avec q extremums relatifs $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où $f(\overset{\circ}{J}_k) \cap I = \emptyset$ pour tout k (figure11).

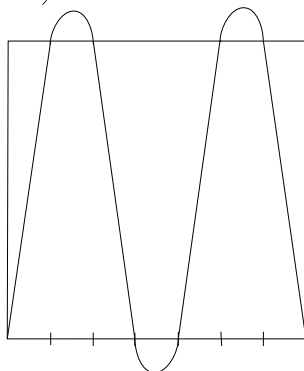


Figure 11

Une telle extension est appelée un q -horseshoe linéaire unidimensionnel de type +, les horseshoes de type - étant obtenus en remplaçant pair par impair dans la définition précédente (figure 12).

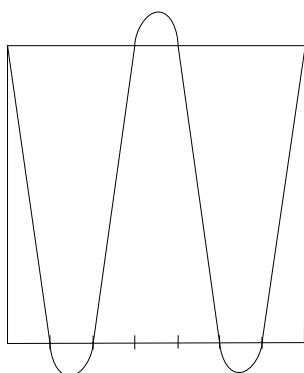


Figure 12

Ces horseshoes unidimensionnels sont notés Γ_q^+ , Γ_q^- ou simplement Γ_q selon la précision de l'information désirée.

Si Γ_q est un tel horseshoe, il est bien connu que $\Lambda_q = \bigcap_{n \geq 0} \Gamma_q^{-n}(I)$, l'ensemble des points de I que l'on peut itérer indéfiniment, muni de la topologie induite par l'intervalle, est homéomorphe à l'espace des suites de $q+1$ symboles $\Sigma_q = \{0, 1, \dots, q\}^{\mathbb{N}}$ muni de la distance $d(\{a_n\}_{n \geq 0}, \{a'_n\}_{n \geq 0}) = 1/2^{\min\{n; a_n \neq a'_n\}}$. Plus précisément, l'application itinéraire $i_{\Gamma_q} : \Lambda_q \longrightarrow \Sigma_q, x \longmapsto \{a_i\}_{i \geq 0}$ où $a_i = k$ si et seulement si $\Gamma_q^i(x) \in I_k$ est un homéomorphisme qui conjugue la dynamique de Γ_q à celle de l'opérateur de décalage $\{a_i\}_{i \geq 0} \longrightarrow \{a_{i+1}\}_{i \geq 0}$.

Notons que pour retrouver le cycle associé à une orbite périodique Θ de Γ_q à partir de son code $i_{\Gamma_q}(\Theta)$, il suffit de connaître l'ordre sur Σ_q pour lequel i_{Γ_q} est croissante. Cet ordre est obtenu en procédant de la manière suivante [MT, dMvS]: on affecte chaque symbole k de Σ_q d'un signe $\epsilon(k) = +1$ ou -1 selon que Γ_q est croissante ou décroissante sur I_k . On prend $i_{\Gamma_q}(x) = \{a_i\}_{i \geq 0} \neq i_{\Gamma_q}(x') = \{a'_i\}_{i \geq 0}$, on note l le plus petit indice pour lequel $a_l \neq a'_l$ et l'ordre en question est donné par la formule :

$$(*) \quad i_{\Gamma_q}(x) < i_{\Gamma_q}(x') \iff \left(\prod_{i=0}^{l-1} \epsilon(a_i) \right) a_l < \left(\prod_{i=0}^{l-1} \epsilon(a'_i) \right) a'_l$$

(si $l = 0$, on sous-entend $a_0 < a'_0$).

Théorème 1.9 *Toute cascade q -modale est représentée par un q -horseshoe.*

Preuve : Soit $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ une cascade de cycles q -modale et notons $\{P_n\}_{n \geq 0}$ l'ensemble des points sur lesquels elle agit. Si n est suffisamment grand, ce que nous supposons désormais, π_n a exactement q points critiques $c_1^n < c_2^n < \dots < c_q^n$. Pour avoir des formules plus homogènes, on note c_0^n (resp. c_{q+1}^n) le plus petit (resp. le plus grand) point de P_n . On appelle bloc de monotonie de π_n les $q+1$ blocs d'extrémités c_i^n (inclus) et c_{i+1}^n (exclus sauf si $i = q$).

Dans un premier temps, on place dans I_k le k -ième bloc de monotonie de π_n . A la permutation π_n , on peut désormais associer un code périodique grâce à l'application "itinéraire" $i_{\pi_n} : P_n \longrightarrow \Sigma_q = \{0, 1, \dots, q\}^{\mathbb{N}}, x \longmapsto i_{\pi_n}(x) = a_0 a_1 \dots$ où $a_i = k$ si et seulement si $\pi_n^i(x) \in I_k$. De plus π_n agit sur $i_{\pi_n}(P_n)$ comme l'opérateur de décalage.

A ce stade, il se peut que i_{π_n} ne soit pas injective. Si c'est le cas, c'est qu'il y a un bloc non trivial B , situé dans un même bloc de monotonie, dont tous les points ont même itinéraire. Ce bloc B est nécessairement de taille 2 car sinon, en itérant un point x à "l'intérieur" de B jusqu'à ce qu'il devienne critique, on trouverait que les points adjacents situés de part et d'autre

de x n'auraient pas le même itinéraire. Quitte donc à déplacer un point critique c_k^n de I_k dans I_{k+1} , on peut supposer i_{π_n} injective.

Pour retrouver π_n à partir de son code, il suffit de connaître le seul ordre sur $i_{\pi_n}(P_n)$ pour lequel i_{π_n} est croissante. Cet ordre est déterminé par la formule (*) décrite plus haut en remplaçant Γ_q par π_n .

Supposons maintenant que π_n est croissante sur son premier bloc de monotonie (propriété indépendante de n). Il existe une orbite périodique Θ_n de Γ_q^+ et donc un cycle associé π'_n qui a le même itinéraire que π_n . Comme l'ordre sur $i_{\Gamma_q^+}(\Theta_n)$ est le même que celui sur $i_{\pi_n}(P_n)$ (cf formule (*)), on en déduit que $\pi'_n = \pi_n$. Ainsi, pour n suffisamment grand, Γ_q^+ possède une orbite périodique dont le cycle associé est π_n . La propriété de forçage implique que ce résultat est vrai pour tout n . Si π_n était décroissante sur son premier bloc de monotonie, nous aurions montré de manière analogue que la cascade était représentée par Γ_q^- \diamond

Remarquons au passage que nous avons montré que tous les cycles q -modaux étaient représentés par un q -horseshoe. Comme ce résultat est notable, on le met sous forme de corollaire :

Corollaire 1.10 *Soit π un cycle q -modal. Il existe une orbite périodique Θ d'un q -horseshoe Γ_q (Γ_q^+ ou Γ_q^-) tel que $\Gamma_{q|\Theta} = \pi$*

Dans un autre ordre d'idées, pour $q' < q$, nous aurions pu placer les $q' + 1$ blocs de monotonie d'une cascade q' -modale dans les intervalles I_k d'un q -horseshoe, et ce de différentes manières. Un q -horseshoe possède donc toutes les cascades q' -modales, $q' < q$, en nombre d'autant plus grand que q est grand et q' petit. En ce sens, les cascades unimodales sont les plus présentes de toutes.

En fait, quitte à identifier deux orbites périodiques dont les points sont permutés de la même façon, toutes les orbites périodiques d'un q -horseshoe font partie d'une (infinité de) cascade(s). Pour s'en convaincre, en utilisant le théorème précédent, il suffit de montrer le résultat suivant qui a par ailleurs le mérite d'assurer l'existence de cascades de cycles q -modales.

Proposition 1.11 *Soient $q \geq 1$, π un cycle q -modal d'ordre p_0 et une suite $\{b_n \geq 1\}_{n \geq 1}$. Il existe une cascade de cycles q -modale $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$ où $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$ pour tout n , vérifiant $\pi_0 = \pi$*

Preuve: Il suffit de montrer que pour tout $b \geq 1$, il existe un cycle renormalisable π' q -modal d'ordre $p_1 = bp_0$ qui induit le cycle π , la cascade entière étant obtenue par récurrence à partir de ce résultat.

Le cycle π est représenté par un q -horseshoe Γ_q (corollaire 1.10). On considère donc une orbite périodique Θ de Γ_q dont la permutation associée est π et, au voisinage de chacun de ses points, on place un bloc de taille b de façon à ce que le bloc tout entier soit dans le même intervalle que le point de Θ qui lui est associé (figure 13).

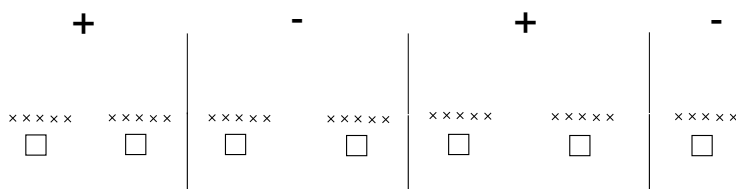


Figure 13

On définit une permutation π'' sur ces $p_1 = bp_0$ points en disant que le i -ième bloc s'envoie sur le $\pi(i)$ -ième en préservant l'ordre de ses points s'il est dans un intervalle de monotonie où Γ_q est croissante, en le renversant sinon. Cette permutation est évidemment q -modale mais elle n'est pas toujours un cycle. On modifie donc π'' sur le bloc correspondant au premier point critique de π , que l'on suppose d'abord être un maximum relatif, en demandant que ce bloc critique B s'envoie sur le bloc de jadis mais en permutant les points selon la permutation circulaire $\sigma(i) = (i + 1) \bmod b$. Par cette notation on sous-entend que l'on a identifié comme d'habitude le bloc B à son image alors il vaut mieux regarder la figure 14.

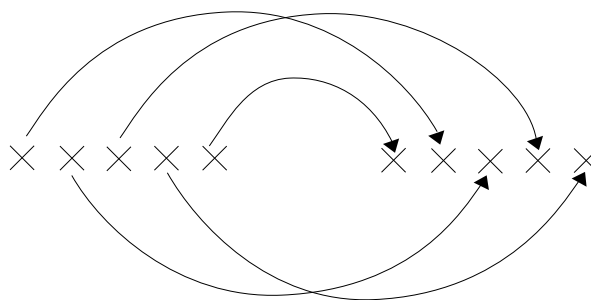


Figure 14

Cette permutation est unimodale, d'abord croissante ensuite décroissante (figure 15) c'est-à-dire que notre nouvelle permutation, notons-la π' , est elle aussi q -modale.

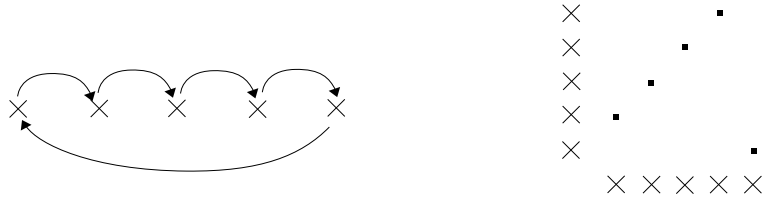


Figure 15

Cette permutation est un cycle car, sauf sur B , elle est monotone sur chacun des blocs de taille b , c'est-à-dire qu'au renversement de l'ordre près, l'application de premier retour $\pi|_B^{p_0}$ est la permutation circulaire qui est un cycle. Par construction, le cycle π' est renormalisable et induit le cycle π , il a donc toutes les qualités voulues.

Si maintenant le premier point critique de π est un minimum relatif, soit on modifie π'' comme précédemment mais au voisinage du deuxième point critique de π qui est un maximum relatif ; soit on demande que le bloc correspondant au premier point critique de π s'envoie sur le bloc de jadis en permutant les points selon le cycle dessiné figure 16 \diamond

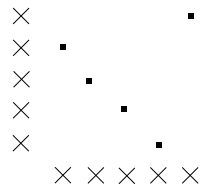


Figure 16

La fin de cette preuve convaincra le lecteur que même à période $\{p_{n+1} = b_{n+1}p_n\}_{n \geq 0}$ fixée, il existe une infinité de cascades q -modales de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$ dès que $q \geq 2$ puisque l'on peut modifier π'' au voisinage de n'importe quel point critique, obtenant ainsi des cycles π' distincts.

Au contraire, comme on l'a suggéré dans la section concernant les cascades de bifurcations, au renversement de l'ordre près, il n'y a qu'une cascade de dédoublement unimodale. En ce sens, la cascade la plus abondante est aussi la plus précieuse.

1.3 Cascades d'orbites périodiques hyperboliques

L'objet de cette section est de caractériser les cascades de cycles qui sont représentées de façon hyperbolique par des applications de l'intervalle. Nous discuterons ensuite des phénomènes qui se produisent quand une cascade passe d'un état non hyperbolique à un état hyperbolique.

1.3.1 Cascades hyperbolisables

Rappelons qu'un compact K invariant par une application différentiable $f : I \rightarrow R$ est hyperbolique (dilatant) s'il existe $C > 0, \lambda > 1$ tel que $|Df_x^n| \geq C\lambda^n$, pour tout x de K et tout $n > 0$.

Définition 1.12 *Une cascade de cycles sera dite hyperbolisable si elle est représentée par $(\{\Theta_n\}_{n \geq 0}, f)$, f différentiable, où $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n}$ est hyperbolique.*

Théorème 1.13 *Une cascade de cycles est hyperbolisable si et seulement si son nombre de points critiques est fini.*

Preuve : Soit $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ une cascade de cycles. Si son nombre de points critiques est fini et vaut q , elle est représentée par un q -horseshoe en vertu du théorème 1.9, elle est donc hyperbolisable ($C = 1, \lambda = 2q + 1$)

On suppose maintenant que son nombre de points critiques est infini et on montre qu'elle n'est pas hyperbolisable. Si cette cascade n'est représentée par aucune application différentiable de l'intervalle, elle n'est sûrement pas hyperbolisable. Dans le cas contraire, l'application f en question a un nombre infini de points critiques et, en gardant les notations précédentes, on va montrer que l'un de ces points critiques appartient à K , ce qui impliquera le résultat. Supposons donc qu'aucun des points de K ne soient critiques pour f . Alors autour de chaque point de K , il existe un petit intervalle ouvert où f ne possède aucun point critique. Du recouvrement du compact K ainsi obtenu, on en extrait un sous recouvrement fini de cardinal q . Sur ces nouveaux intervalles, f est monotone et les applications affines par morceaux associées à chacun des cycles π_n ont donc un nombre d'extremaux relatifs inférieur à q , la cascade a donc un nombre fini de points critiques ce qui est en contradiction avec notre hypothèse \diamond

A partir de maintenant, on se donne une cascade de cycles que l'on supposera représentée par une application différentiable de l'intervalle f . On notera $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ la cascade d'orbites périodiques de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$ qui lui correspond et K sa fermeture. Rappelons que nous avons défini le concept de père, de fils et qu'une lignée est une suite $\{x_n \in \Theta_n\}_{n \geq 0}$ où pour tout n , x_n est le père de x_{n+1} . Nous n'osons répéter la propriété généalogique de peur de lasser.

La notion d'hyperbolicité faisant intervenir les points d'accumulation de la cascade, il est bon de les étudier.

Lemme 1.14 *Si une application continue de l'intervalle f possède une cascade d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ alors :*

- 1) *Les points périodiques $\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n$ sont des points isolés de K .*
- 2) *Deux lignées distinctes s'accumulent sur des points distincts.*
- 3) *Une lignée a un ou deux points d'accumulation.*

Preuve :

1) Soit $x_r \in \Theta_r$, r donné, notons $\{x_n \in \Theta_n\}_{n \leq r}$ ses ascendants et montrons que x_r est isolé.

On pose $x_n^+ = x_n^- = x_n$ pour $n \leq r$ et $x_n^+ = \max\{x \in \Theta_n; x < x_r\}$, $x_n^- = \min\{x \in \Theta_n; x_r < x\}$ pour $n \geq r + 1$.

A cause de la propriété généalogique, $\{x_n^+\}_{n \geq 0}$ et $\{x_n^-\}_{n \geq 0}$ sont des lignées, respectivement croissante et décroissante pour $n \geq r + 1$ (voir figure 17).

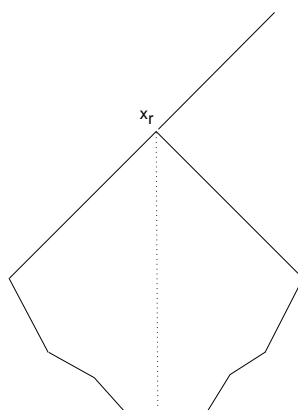


Figure 17

Par conception, si x_r est accumulé par des points de $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n}$, ce que nous supposons désormais, il est point limite d'au moins une de ces suites.

Supposons donc, sans nuire à la généralité du raisonnement que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^+ = x_r$ et aboutissons à une contradiction.

On considère $\{f^{p_{r+1}}(x_n^+)\}_{n \geq 0}$. C'est une lignée qui vérifie $f^{p_{r+1}}(x_n^+) = x_n^+$ pour $n \leq r + 1$ et $f^{p_{r+1}}(x_{r+2}^+) < x_{r+2}^+$ d'après la définition de $\{x_n^+\}_{n \geq 0}$ et donc $f^{p_{r+1}}(x_n^+) < x_{r+2}^+$ pour tout $n \geq r + 2$ du fait de la propriété généalogique. Faisant tendre n vers l'infini, on obtient l'inégalité $f^{p_{r+1}}(x_r) = f^{b_r p_r}(x_r) = x_r \leq x_{r+2}^+ < x_r$ qui est absurde.

2) Soient $\{x_n\}_{n \geq 0}$ et $\{x'_n\}_{n \geq 0}$ deux lignées distinctes, soit n_0 le plus petit entier pour lequel $x_{n_0} \neq x'_{n_0}$ et supposons par exemple $x_{n_0} < x'_{n_0}$.

Par suite de la propriété généalogique on a les quatre possibilités suivantes

$$x_n < x_{n_0} < x'_n < x'_{n_0} \text{ pour tout } n > n_0$$

$$x_n < x_{n_0} < x'_{n_0} < x'_n \text{ pour tout } n > n_0$$

$$x_{n_0} < x_n < x'_{n_0} < x'_n \text{ pour tout } n > n_0$$

ou

$$x_{n_0} < x_n < x'_n < x'_{n_0} \text{ pour tout } n > n_0$$

c'est-à-dire, pour tout point d'accumulation x de $\{x_n\}_{n \geq 0}$ et x' de $\{x'_n\}_{n \geq 0}$:

$$x \leq x_{n_0} \leq x' \leq x'_{n_0}$$

$$x \leq x_{n_0} < x'_{n_0} \leq x'$$

$$x_{n_0} \leq x \leq x'_{n_0} \leq x'$$

ou

$$x_{n_0} \leq x \leq x' \leq x'_{n_0}$$

Comme les points périodiques x_{n_0} et x'_{n_0} sont isolés en raison du résultat précédent, dans les trois premiers cas, $x \neq x'$. Le dernier cas se traite en itérant les lignées $\{x_n\}_{n \geq 0}$ et $\{x'_n\}_{n \geq 0}$ par un multiple de p_{n_0} jusqu'à se retrouver dans un des autres cas.

3) Soit $\{x_n\}_{n \geq 0}$ une lignée.

On montre que si $\{x_n\}_{n \geq 0}$ n'est pas monotone à partir d'un certain rang, il existe une suite extraite $\{x_{\varphi(n)}\}_{n \geq 0}$ croissante et une suite extraite $\{x_{\varphi'(n)}\}_{n \geq 0}$ décroissante telles que $\{x_n\}_{n \geq 0} = \{x_{\varphi(n)}\}_{n \geq 0} \cup \{x_{\varphi'(n)}\}_{n \geq 0}$ et vérifiant :

$$x_{\varphi(0)} < x_{\varphi(1)} < \dots < x_{\varphi(n)} < \dots x \leq x' < \dots < x_{\varphi'(n)} < \dots < x_{\varphi'(1)} < x_{\varphi'(0)}$$

où x et x' sont les limites respectives de $\{x_{\varphi(n)}\}_{n \geq 0}$ et $\{x_{\varphi'(n)}\}_{n \geq 0}$.

Supposons que $\{x_n\}_{n \geq 0}$ ne soit pas monotone et soit $n_0 \geq 1$ tel que

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{n_0-1} < x_{n_0+1} < x_{n_0}$$

ou

$$x_{n_0+1} < x_{n_0} < x_{n_0-1} < \dots < x_1 < x_0$$

(x_{n_0} est forcément entre x_{n_0-1} et x_{n_0+1} à cause de la propriété généalogique)

Dans le premier cas, on pose $\varphi(i) = i$ pour i entre 0 et $n_0 - 1$, $\varphi'(0) = n_0$ et dans le second $\varphi(0) = n_0$, $\varphi'(i) = i$ pour i entre 0 et $n_0 - 1$.

Plus généralement, supposant que pour $n \geq n_0$, il existe s_n et s'_n tel que $\{x_i\}_{i \leq n} = \{x_{\varphi(i)}\}_{i \leq s_n} \cup \{x_{\varphi'(i)}\}_{i \leq s'_n}$ avec

$$x_{\varphi(0)} < x_{\varphi(1)} < \dots < x_{\varphi(s_n)} < x_{n+1} < x_{\varphi'(s'_n)} < \dots < x_{\varphi'(1)} < x_{\varphi'(0)},$$

on montre que l'on a la même propriété pour $n + 1$.

A cause de la propriété généalogique, x_{n+2} est entre $x_{\varphi(s_n)}$ et $x_{\varphi'(s'_n)}$ à gauche ou à droite de x_{n+1} . Prenant $s'_{n+1} = s'_n + 1$ et $\varphi'(s'_{n+1}) = n + 1$ dans le premier cas et $s_{n+1} = s_n + 1$, $\varphi(s_{n+1}) = n + 1$ dans le second, on a la propriété annoncée.

De plus, si φ (resp. φ') n'est pas définie sur N entier, c'est que $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est croissante (resp. décroissante) à partir d'un certain rang, d'où le lemme \diamond

Le lemme précédent permet d'associer de manière canonique à un point d'accumulation d'une cascade d'orbites périodiques l'unique lignée qui l'accumule. Cette application est évidemment surjective (une lignée a toujours un point d'accumulation) et elle est injective si et seulement si toutes les lignées convergent.

Définition 1.15 *Une cascade d'orbites périodiques sera dite convergente si et seulement si toutes ses lignées convergent*

Une cascade non convergente sera dite divergente et dans ce cas, chaque lignée a au plus deux préimages. Cette surjection, dite surjection canonique, est continue car, du fait de la propriété généalogique, deux lignées sont d'autant plus proches que leurs points d'accumulation sont proches. Comme l'application f envoie les points d'accumulation d'une lignée sur les points d'accumulation de l'image de la lignée, on a le résultat suivant :

Théorème 1.16 *La dynamique des points d'accumulation d'une cascade d'orbites périodiques est semi-conjuguée à un odomètre par la surjection canonique dont chaque fibre a au plus deux éléments. Cette surjection est une conjugaison si et seulement si la cascade est convergente.*

Les cascades convergentes existent (nous verrons plus tard que leur présence est équivalente au fait que l'application soit infiniment renormalisable). On sait par exemple qu'à la valeur du paramètre $\mu = \mu_\infty$, la cascade de dédoublement représentée par la famille unimodale $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ a toutes ses lignées convergentes (voir par ex. [HT]).

En revanche, ces cascades ne sont pas hyperboliques :

Théorème 1.17 *Une cascade d'orbites périodiques convergente d'une application différentiable contient un point critique dans sa fermeture.*

Preuve : Si $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n}$ ne contient aucun point critique, comme K est compact, autour de chaque point critique on peut trouver un petit intervalle qui ne contient aucun point de K . De ce recouvrement de l'ensemble des points critiques qui est compact, on en extrait un sous recouvrement fini et on note ϵ le diamètre du plus petit de ces intervalles. Tout est conçu pour que f soit monotone sur l'enveloppe convexe de deux points de K situés à une distance plus petite que ϵ . Comme par hypothèse toutes les lignées convergent, pour n suffisamment grand, tous les couples père-fils vérifient cette dernière propriété. L'enveloppe convexe de l'un de ces couples, s'enverra alors sur elle même de façon monotone par une itérée de f et ne pourra donc pas contenir tous les descendants dont l'existence est pourtant assurée par la propriété généalogique \diamond

1.3.2 Hyperbolisation

Reprenons notre famille unimodale $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ et augmentons la valeur du paramètre jusqu'à $\mu = \mu^*$ où la bosse est si haute qu'elle sort de l'intervalle et que les points qui n'en sortent pas ont tous une pente supérieure à 1 en valeur absolue. La cascade de dédoublement est alors hyperbolique et n'est donc plus convergente en vertu du résultat précédent.

Il s'est produit le phénomène suivant : une lignée qui était convergente ($\mu = \mu_\infty$) a deux points d'accumulation ($\mu = \mu^*$), la surjection canonique est passée d'un homéomorphisme à une surjection où certains points ont deux préimages, en d'autres termes le Cantor formé des points d'accumulation de la cascade s'est dédoublé (figure 18).

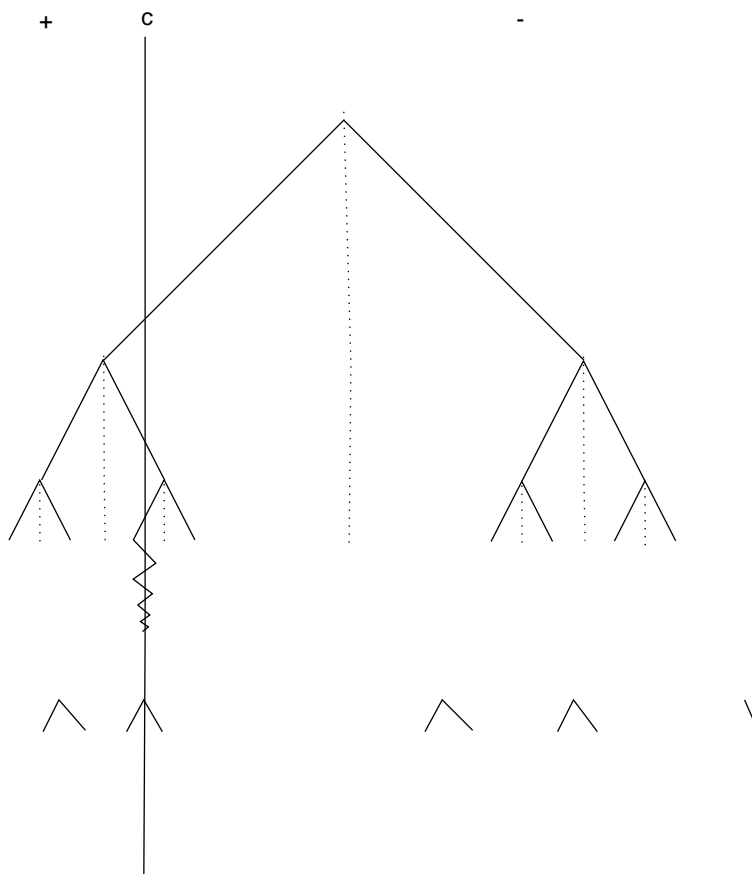


Figure 18

La lignée qui a des points alternativement situés à droite et à gauche du point critique (lignée

critique) converge quand $\mu = \mu_\infty$ et le point critique est dans la fermeture de cette lignée mais dès qu'il n'y est plus, la lignée critique (ainsi que ses préimages) a deux points d'accumulation.

Il s'est produit par ailleurs un véritable changement qualitatif de la dynamique. En effet, pour $\mu = \mu^*$, la lignée critique (deux points d'accumulation) s'envoie par f_μ sur la plus grande lignée $\{\max \Theta_n\}_{n \geq 0}$ qui est croissante et n'a donc qu'un point d'accumulation. En d'autres termes, l'application n'est plus inversible sur les points d'accumulation de la cascade alors qu'elle l'était pour $\mu = \mu_\infty$ (odomètre).

Ce phénomène de "dédoublément de Cantor" peut être généralisé à des familles q -modales moyennant quelques hypothèses de non-dégénérescence.

Définition 1.18 *Soit f une application C^2 de l'intervalle.*

1) *Un point critique c de f est non-plat si il existe un C^2 -difféomorphisme local Φ vérifiant $\Phi(c) = 0$ tel que $f(x) - f(c) = \pm |\Phi(x)|^\alpha$ où $\alpha \geq 2$.*

2) *L'application f est non-dégénérée si elle a un nombre fini de points critiques, tous non-plats.*

Ces hypothèses sont essentielles notamment à cause du théorème suivant:

Théorème 1.19 [*dMvS*] *Une application non dégénérée n'a pas d'intervalle errant*³.

Hu et Tresser ont montré le résultat suivant:

Théorème 1.20 [*HT*] *Toutes les cascades d'une application non-dégénérée de l'intervalle à la C^1 frontière du chaos sont convergentes.*

La preuve de ce théorème fait appel à un résultat de Misiurewicz [M2] qui affirme que les seuls compacts invariants infinis topologiquement transitifs d'une application à la frontière de l'entropie sont précisément les points d'accumulation d'une cascade de dédoublément et que la dynamique de l'application sur un tel compact est semi-conjugée à un odomètre. Hu et Tresser parviennent à montrer que sous les hypothèses de non-dégénérescence évoquées plus haut, cette semi-conjugaison est en fait une conjugaison.

Il est alors plus que temps de définir ce que l'on entend par "transition vers le chaos par dédoublément de période" :

³une application de l'intervalle a un intervalle errant s'il existe un intervalle non trivial J tel que les intervalles $J, f(J), \dots, f^n(J), \dots$ soient disjoints et $f^n(J)$ ne converge pas vers une orbite périodique.

Définition 1.21 Une famille d'applications C^2 de l'intervalle $(f_\mu)_{\mu \in R}$ transite vers le chaos par dédoublement de période si elle possède une cascade de bifurcations de dédoublement de période (c.f. définition 1.1) où :

- 1) $h(f_\mu) = 0$ pour $\mu < \mu_\infty$.
- 2) f_{μ_∞} est à la C^1 -frontière du chaos.

De plus, la famille (f_μ) sera dite non-dégénérée si f_{μ_∞} est non-dégénérée.

Si maintenant on veut bien dire que la cascade de bifurcations d'une famille d'applications q -modale non-dégénérée qui transite vers le chaos transite vers l'hyperbolicité si pour une valeur $\mu^* > \mu_\infty$ la cascade est hyperbolique ; si l'on veut bien appeler *dédoublement de Cantor* le passage d'un état où la cascade a sa surjection canonique inversible à un autre état où cette surjection a au moins un point avec deux préimages, alors le résultat déjà cité de Hu et Tresser permet de mettre nos observations sous la forme suivante :

Corollaire 1.22 La cascade d'une famille d'applications q -modales non-dégénérée qui transite vers le chaos par dédoublement de période transite vers l'hyperbolicité par dédoublement de Cantor.

1.4 Renormalisation

1.4.1 Applications infiniment renormalisables et renormalisation fonctionnelle

Une application continue de l'intervalle est infiniment renormalisable si pour tout n , elle permute p_n intervalles fermés disjoints (ni vides ni réduits à un point) $J_n, f(J_n), \dots, f^{p_n-1}(J_n), f^{p_n}(J_n) = J_n$; chaque intervalle de génération n contenant exactement $b_{n+1} > 1$ intervalles de génération $n + 1$ (figure 19).

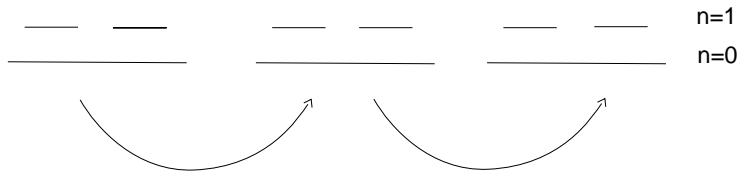


Figure 19

On a donc $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$ pour tout n et notant π_n la façon dont sont permutés les p_n intervalles de génération n (intervalles de renormalisation) naturellement ordonnés par l'ordre de l'intervalle, on voit que $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est une cascade de cycles. En fait, en utilisant le théorème de Brouwer, on constate qu'une application infiniment renormalisable possède une cascade d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$, chaque intervalle de renormalisation de génération n contenant exactement un point de Θ_n , dont la cascade de cycles correspondante est précisément $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$. Comme une application non-dégénérée de l'intervalle ne contient pas d'intervalle errant, si elle est infiniment renormalisable, les intervalles de renormalisation doivent tendre vers un point au fil des générations et la cascade d'orbite périodique associée est convergente. La réciproque est vraie aussi :

Proposition 1.23 *Une application non-dégénérée est infiniment renormalisable si et seulement si elle possède une cascade d'orbites périodiques convergente.*

Preuve : Nous venons de voir qu'une application non-dégénérée infiniment renormalisable possédait une cascade d'orbites périodiques convergente. Soit maintenant f une application q -modale qui possède une cascade d'orbites périodiques convergente $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de périodes $\{p_n\}_{n \geq 0}$

où pour tout n , $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$. On montre que f est infiniment renormalisable. Nous avons vu que sous ces hypothèses, l'ensemble des points d'accumulation de la cascade $K' = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n}$ – $\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n$ était homéomorphe à l'espace des lignées via l'homéomorphisme p qui à chaque point de K' associe l'unique lignée qui l'accumule. Le temps de cette démonstration on munit K' de la distance d_* issue des lignées : si $x, y \in K'$, notant $p(x) = \{x_n\}_{n \geq 0}$ et $p(y) = \{y_n\}_{n \geq 0}$, d_* est définie par $d_*(x, y) = d(p(x), p(y)) = 2^{-\min\{n; x_n \neq y_n\}}$. Avec cette distance, K' a exactement p_n boules distinctes de rayon $1/2^n$, elles sont disjointes, cycliquement permutées et chaque boule de rayon $1/2^n$ contient b_{n+1} boules de rayon $1/2^{n+1}$. Les intervalles de renormalisation recherchés sont les enveloppes convexes de ces boules pour n suffisamment grand. Le fait que ces intervalles soient disjoints est une conséquence immédiate de la propriété généalogique et ils sont correctement emboîtés en vertu de la remarque précédente. Il reste à voir qu'un point de l'enveloppe convexe d'une de ces boules ne peut pas s'envoyer en dehors de l'enveloppe convexe de l'image de cette boule. Comme les extrémités d'un tel intervalle sont des points de K' , c'est immédiat si f y est monotone ou si tous les extremums relatifs de f dans cet intervalle sont des points de K' , ce qui est le cas dès que n est suffisamment grand puisqu'alors, tous les points critiques de f qui ne sont pas dans K' sont évités \diamond

Renormaliser consiste à choisir un des $b_0 = p_0$ intervalles de renormalisation, l'envoyer de manière affine (en préservant l'orientation) sur $[0, 1]$ et considérer l'application induite par l'application de premier retour. Il y a donc b_0 façons de renormaliser. Une fois que l'on a renormalisé, on peut à nouveau renormaliser, encore et encore, le choix des intervalles sur lequel on renormalise étant équivalent à la donnée d'un élément de Σ_b avec notre terminologie antérieure. Nous aurions aussi pu renormaliser en demandant que l'application affine reverse l'orientation au lieu de la préserver et définir ainsi des opérateurs de renormalisation \mathcal{R}_a^+ et \mathcal{R}_a^- où $a \in \Sigma_b$.

Ce concept de renormalisation a été introduit en théorie des systèmes dynamiques indépendamment par Feigenbaum [Fe] et Couillet-Tresser [CT]. L'opération fut un succès puisqu'elle permit d'expliquer l'universalité dans la transition vers le chaos pour les applications unimodales en terme de point fixe et de valeur propre d'un opérateur de renormalisation. La renormalisation a ensuite été utilisée dans d'autres domaines des systèmes dynamiques. On pourra consulter [dMvS] pour ce qui concerne la dynamique unidimensionnelle. Les travaux les plus profonds sont probablement ceux de Sullivan [Su] dont les résultats ne s'appliquent pourtant qu'aux ap-

plications unimodales. Nous avons pris ici le parti de tenter de caractériser les cascades d'orbites périodiques représentées par les points fixes de ces opérateurs de renormalisation fonctionnels.

1.4.2 Opérateurs de renormalisation

Soit $b = \{b_n \geq 1\}_{n \geq 0}$. On note $Cas(b)$ l'ensemble des cascades de cycles $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ d'ordre $\{p_n\}_{n \geq 0}$ où $p_0 = b_0$ et $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$ pour tout n . Le cycle π_1 permute donc la partition formée de b_0 blocs et d'après la définition d'une cascade de cycles, pour tout $n \geq 1$, π_n permute aussi la partition en b_0 blocs des points sur lesquels elle agit. On notera $B_{i,n}$ les b_0 blocs de cette partition. Si P est un ensemble fini totalement ordonné, on notera S_P la bijection décroissante de P (symétrie) ou même S quand le contexte le permettra sans risque de confusion. Enfin, si $e = \{e_n\}_{n \geq 0}$ est une suite, on notera σ l'opérateur de décalage défini par $\sigma(e) = \{e_{n+1}\}_{n \geq 0}$.

On définit maintenant les opérateurs de renormalisation suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^+ : \Sigma_b \times Cas(b) &\longrightarrow \Sigma_{\sigma(b)} \times Cas(\sigma(b)) \\ (a, \{\pi_n\}_{n \geq 0}) &\longrightarrow (\sigma(a), \{\pi_{n+1}^{b_0}|_{B_{a_0, n+1}}\}_{n \geq 0}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^- : \Sigma_b \times Cas(b) &\longrightarrow \Sigma_{\sigma(b)} \times Cas(\sigma(b)) \\ (a, \{\pi_n\}_{n \geq 0}) &\longrightarrow (\sigma(a), \{S_{B_{a_0, n+1}} \pi_{n+1}^{b_0}|_{B_{a_0, n+1}} S_{B_{a_0, n+1}}\}_{n \geq 0}) \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on interprète ces opérateurs de renormalisation comme la restriction des opérateurs de renormalisation fonctionnels décrits plus haut aux cascades d'orbites périodiques associées à une application infiniment renormalisable.

Les points fixes de ces opérateurs vérifient $\sigma(b) = b$, c'est-à-dire $p_n = p_0^{n+1} = b_0^{n+1}$ pour tout n , et $\sigma(a) = a$, c'est-à-dire que $\{a_n\}_{n \geq 0}$ est une suite constante.

Comme nous nous bornerons à l'étude des points fixes, on peut reformuler, avec des notations qui se comprennent, nos opérateurs de renormalisation de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_i^+ : Cas(p_0) &\longrightarrow Cas(p_0) \\ \{\pi_n\}_{n \geq 0} &\longrightarrow \{\pi_{n+1|B_{i,n+1}}^{p_0}\}_{n \geq 0}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_i^- : Cas(p_0) &\longrightarrow Cas(p_0) \\ \{\pi_n\}_{n \geq 0} &\longrightarrow \{S_{B_{i,n+1}} \pi_{n+1|B_{i,n+1}}^{p_0} S_{B_{i,n+1}}\}_{n \geq 0}\end{aligned}$$

pour i entre 1 et p_0 .

Les points fixes de ces opérateurs de renormalisation ont déjà été étudiés dans le cas des cascades de dédoublement ($p_0 = 2$) [GLOT, LGT, OT, O]. On a notamment le théorème suivant que l'on peut apprécier en disant qu'il n'y a pas d'obstacle combinatoire à l'existence d'une application q -modale point fixe d'un opérateur de renormalisation fonctionnel :

Théorème 1.24 [O]

- 1) Pour tout $q \geq 1$, il existe une cascade de cycles q -modale point fixe de \mathcal{R}_1^- et une cascade de cycles q -modale point fixe de \mathcal{R}_2^- .
- 2) Pour tout $q \neq 2, 3, 4$, il existe une cascade de cycles q -modale point fixe de \mathcal{R}_1^+ et une cascade de cycles q -modale point fixe de \mathcal{R}_2^+ .

En particulier les deux cascades de dédoublement unimodales ($+ -$ et $- +$) sont des points fixes d'opérateurs de renormalisation ($\mathcal{R}_0^-, \mathcal{R}_1^+$ pour la première et $\mathcal{R}_0^+, \mathcal{R}_1^-$ pour la seconde)

On peut aussi interpréter ces opérateurs de renormalisation comme les opérateurs de renormalisation fonctionnels décrits plus haut où l'on aurait identifié les intervalles de renormalisation $J_n^1 < J_n^2 < \dots < J_n^{p_n}$ à leur indice.

Pour caractériser les cascades d'orbites périodiques associées aux applications infiniment renormalisables points fixes de ces opérateurs de renormalisation fonctionnels, nous introduisons maintenant la notion de signature d'une cascade d'orbites périodiques sur laquelle nous allons un temps nous attarder.

1.4.3 Signature d'une cascade d'orbites périodiques

Soit $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ une cascade de cycles d'ordre $\{p_n\}_{n \geq 0}$ représentée par $(\{\Theta_n\}_{n \geq 0}, f)$ où f est q -modale. On note $I_0 < I_1 < \dots < I_q$ les intervalles de monotonie de f .

Définition 1.25 La signature de $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ relativement à f est le $q + 1$ -uplet de suites

$$(\{\Phi(0, n)/p_n\}_{n \geq 0}, \{\Phi(1, n)/p_n\}_{n \geq 0}, \dots, \{\Phi(q, n)/p_n\}_{n \geq 0})$$

où $\Phi(k, n) = \#(\Theta_n \cap I_k)$ est le nombre de points de Θ_n dans I_k .

On peut interpréter $\Phi(k, n)/p_n$ comme la probabilité pour un point de Θ_n d'être dans I_k et la limite, dont on va montrer l'existence, comme la proportion des points d'accumulation de la cascade situés dans I_k .

La signature d'une cascade d'orbites périodiques est un invariant topologique. Plus précisément, si une application q -modale f possède une cascade d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ et si h est un homéomorphisme de l'intervalle, les signatures de la cascade $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de f et celle de $\{h(\Theta_n)\}_{n \geq 0}$ de hfh^{-1} seront identiques si h préserve l'orientation, sinon une signature se déduit de l'autre en renversant l'ordre de ses $q + 1$ composantes.

Comme les points de Θ_n situés dans I_k , à l'exception peut-être de deux d'entre eux (le plus petit et le plus grand), ont leurs fils dans le même intervalle I_k , il est judicieux de poser

$$\Phi(k, n + 1) = b_{n+1} \Phi(k, n) + r(k, n)$$

pour tout n . On peut interpréter $r(k, n)$ en affectant chaque extremum relatif $c_1 < \dots < c_k < \dots < c_q$ de f d'un coefficient $R(k, n)$ défini de la façon suivante (figures 20, 21):

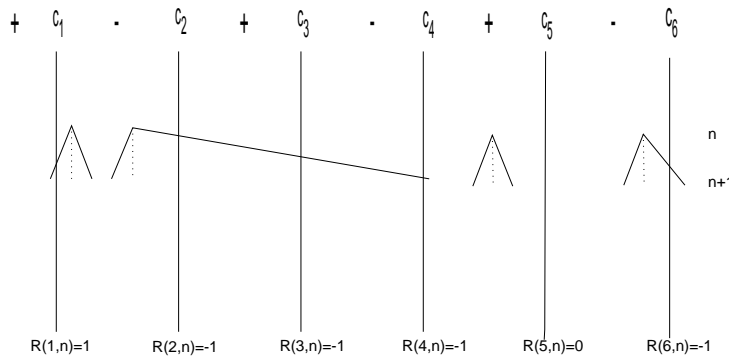


Figure 20

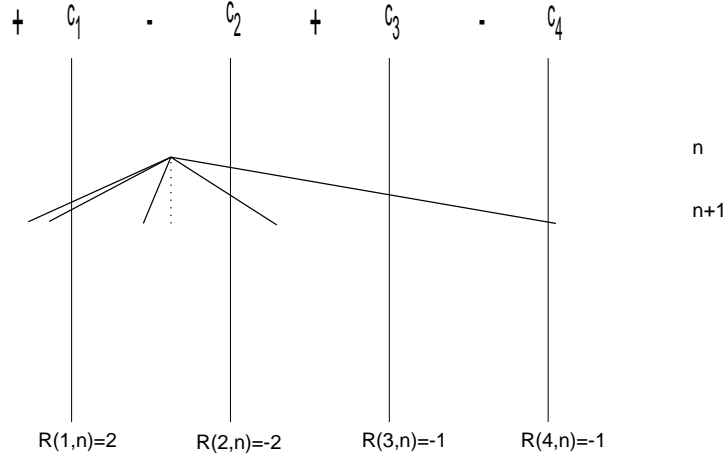


Figure 21

$R(k, n) = r > 0$ si un point de Θ_n situé à droite de l'extremum relatif c_k a exactement r fils situés à gauche de cet extremum,

$R(k, n) = -r$ si un point de Θ_n situé à gauche de l'extremum relatif c_k a exactement r fils situés à droite de cet extremum,

$R(k, n) = 0$ si aucune de ces situations ne se produit.

On pose finalement $R(0, n) = R(q+1, n) = 0$ pour tout n afin d'obtenir la formule homogène :

$$\Phi(k, n+1) = b_{n+1}\Phi(k, n) + R(k+1, n) - R(k, n)$$

pour tout k entre 0 et q et tout n .

Théorème 1.26 *La signature d'une cascade d'orbites périodiques converge exponentiellement vite.*

Preuve : Posons $\bar{\Phi}(k, n) = \Phi(k, n)/p_n$.

On a la formule : $\bar{\Phi}(k, n+1) = \bar{\Phi}(k, n) + (R(k+1, n) - R(k, n))/p_{n+1}$ car $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$.

Comme par définition $R(k, n) < b_{n+1}$ pour tout k , on a :

$$|\bar{\Phi}(k, n+1) - \bar{\Phi}(k, n)| < 2b_{n+1}/p_{n+1} = 2/p_n < 2/2^{n+1} = 1/2^n \text{ d'où le résultat } \diamond$$

Remarquons que nous aurions pu définir une signature abstraite associée à une cascade de cycles q -modale $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ en comptant le nombre de points de chaque bloc de monotonie de π_n (quand n est assez grand de façon à ce que π_n ait exactement q points critiques) définissant ainsi des $\Phi^a(k, n)$. Par rapport à la signature de cette même cascade relativement à une certaine

application q -modale f , on aurait eu la relation $|\Phi^a(k, n) - \Phi(k, n)| \leq 2$, cette différence étant due à la position des points critiques de π_n qui peuvent être à droite ou à gauche des extremums relatifs de f . On a donc le résultat suivant :

Proposition 1.27 *La limite d'une signature d'une cascade de cycles ne dépend pas de l'application qui la représente.*

En fait, on a mieux, au moins pour les cascades de dédoublement :

Proposition 1.28 *A partir d'une certaine génération, la signature d'une cascade de dédoublement ne dépend plus de l'application qui la représente.*

Preuve : Soit $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ une cascade de cycle q -modale de dédoublement représentée par $(f, \{\Theta_n\}_{n \geq 0})$ et $(f', \{\Theta'_n\}_{n \geq 0})$ où f et f' sont q -modales. On note $\Phi(k, n)$ et $\Phi'(k, n)$ le nombre de points de Θ_n et Θ'_n dans le k -ième intervalle de monotonie de f et f' et on montre que pour tout n suffisamment grand $\Phi(k, n) = \Phi'(k, n)$.

Soit n_0 tel que π_{n_0} ait exactement q points critiques et supposons qu'il existe $n \geq n_0$ et k entre 0 et q tel que $\Phi(k, n) \neq \Phi'(k, n)$. Il y a donc un point critique de π_n , disons le k -ième sinon ce serait le $k + 1$ -ième, qui est à gauche du k -ième extremum relatif d'une des deux applications, disons f et qui est à droite du k -ième extremum relatif de f' (figure 22).

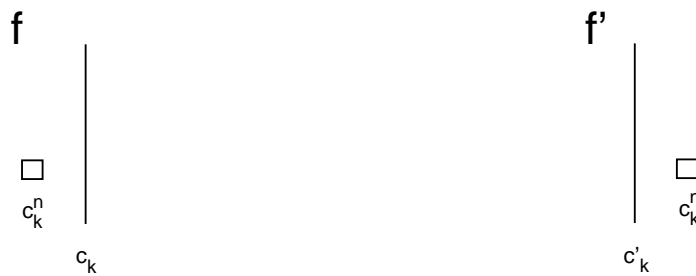


Figure 22

On regarde maintenant les fils de ce k -ième point critique de π_n que l'on suppose, toujours sans nuire à la généralité du raisonnement, être un maximum relatif de π_n . Toutes les configurations possibles sont esquissées figure 23.

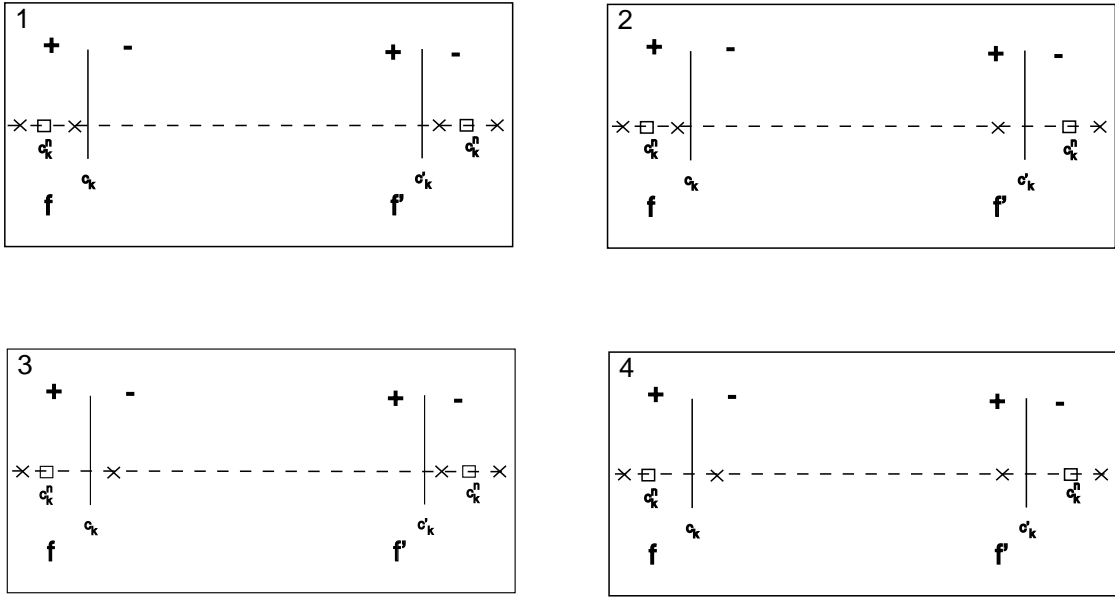


Figure 23

Dans tous les cas, le couple de frères s'envoie en préservant son ordre par f . C'est évident dans le premier et deuxième cas, c'est aussi vrai pour les autres car le père doit s'envoyer entre ses fils par f . Pour les mêmes raisons, le couple de frères doit s'envoyer en renversant son ordre par f' dans les quatre cas. Toutes ces configurations sont donc impossibles car les points sont permutés de la même manière par f et f' d'où le résultat \diamond

On montre maintenant une sorte de réciproque un peu plus faible de la précédente proposition : deux cascades de cycles de dédoublement qui ont même premiers termes pendant suffisamment longtemps mais qui sont néanmoins différentes ont des signatures distinctes.

Proposition 1.29 *Soient f et f' deux applications q -modales possédant chacune une cascade de cycles q -modale de dédoublement $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\pi'_n\}_{n \geq 0}$ où $\Phi(k, n) = \Phi'(k, n)$ pour tout k entre 0 et q et tout n . Soit n_0 le plus petit entier tel que π_{n_0} et π'_{n_0} aient q points critiques. Si $\pi_n = \pi'_n$ pour tout $n \leq n_0$ alors $\pi_n = \pi'_n$ pour tout n .*

Preuve : Sous les hypothèses précédentes, on montre que si $\pi_n = \pi'_n$ pour $n \geq n_0$ alors $\pi_{n+1} = \pi'_{n+1}$. Grâce à cette hypothèse de récurrence on sait que le i -ème couple de frères s'envoie par π_{n+1} et par π'_{n+1} sur le $\pi_n(i)$ -ième. Il reste à voir que la façon dont est permuté ce couple de points (ordre préservé ou renversé) est la même par π_{n+1} et π'_{n+1} . C'est évident si

ce couple de point est tout entier dans un intervalle de monotonicité I_k de f (et donc le k -ième intervalle de monotonicité I'_k de f'), c'est aussi vrai dans le cas où ce couple est à cheval sur un extremum relatif c_k de f (et donc à cheval sur le k -ième point critique c'_k de f') pour des raisons déjà évoquées dans la démonstration de la proposition précédente : pour que le père situé entre ces deux fils s'envoie par f et f' entre l'image de ses fils, il faut que l'ordre du couple de frères soit préservé si le père est dans un intervalle où f (et donc f') est croissante et soit renversé si au contraire le père est dans un intervalle de monotonicité où f (et f') est décroissante (figure 24) \diamond

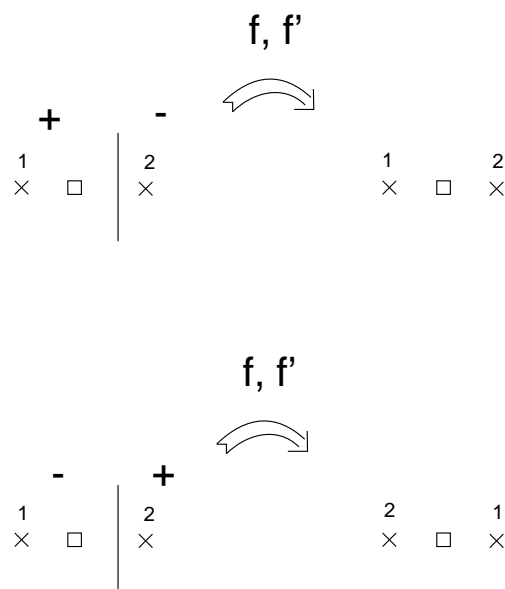


Figure 24

Finalement, pour les cascades de dédoublement, on calcule plus finement $\Phi(k, n + 1)$ en fonction de $\Phi(k, n)$. Le lemme qui suit nous sera utile dans le chapitre concernant la dimension 2.

Lemme 1.30 Soit $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ une cascade de dédoublement représentée par $(f, \{\Theta_n\}_{n \geq 0})$ où f est q -modale. Pour tout k entre 0 et q et tout n , on a :

$$\Phi(k, n + 1) = 2\Phi(k, n) + r(k, n) \text{ où}$$

$$\forall p, p' \geq 0, \left| \sum_{m=p}^{p+p'} r(k, m) \right| \leq 2.$$

Preuve : Soit n et k entre 0 et q . On a $\Phi(k, n + 1) = 2\Phi(k, n) + r(k, n)$ où $r(k, n) = R(k + 1, n) - R(k, n)$ d'après la définition des $R(k, n)$.

Par ailleurs, si pour n et k , $R(k, n) \neq 0$ et si il existe $n' > n$ tel que $R(k, n') \neq 0$ alors pour le plus petit entier $n'' > n$ qui vérifie cette propriété on a $R(k, n'') = -R(k, n)$. En effet, les descendants x_{n+p+1} de x_{n+1} forment une suite monotone tant que $R(k, n + p) = 0$, croissante si $R(k, n) = 1$, décroissante sinon (figure 25).

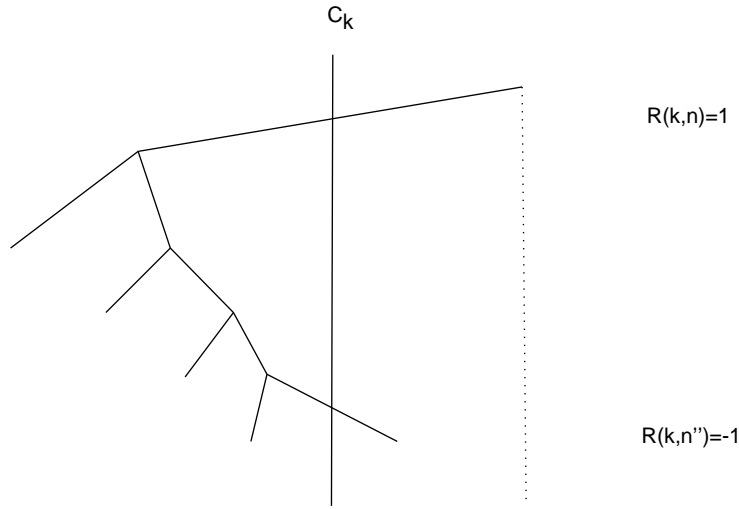


Figure 25

Par suite, on a la relation $|\sum_{m=p}^{p+p'} R(k, m)| \leq 1$ pour tout $p, p' \geq 0$ et donc le résultat annoncé avec $r(k, n) = R(k + 1, n) - R(k, n) \diamond$

1.4.4 Cascades points fixes

A partir de maintenant, par cascade q -modale point fixe d'un opérateur de renormalisation \mathcal{R}_i^+ ou \mathcal{R}_i^- , on entendra une cascade q -modale correspondant à une application q -modale infiniment renormalisable f point fixe d'un \mathcal{R}_i^+ ou d'un \mathcal{R}_i^- interprété comme opérateur fonctionnel. Considérant sa signature relativement à f , avec les notations précédentes, on est en mesure de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.31 *Il existe q^* tel que pour tout n suffisamment grand et tout k entre 0 et $q + 1$, $R(k, n + q^*) = R(k, n)$.*

Preuve : Soit f une application q -modale point fixe de \mathcal{R}_i^+ , i entre 1 et p_0 . On note J_i l'intervalle de renormalisation correspondant et $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ la cascade d'orbites périodiques et la cascade de cycles qui sont associées à f .

Une lignée $\{x_n \in \Theta_n\}_{n \geq 0}$ est critique si pour tout n suffisamment grand, x_n est point critique de π_n . Une cascade q -modale possède donc q lignées critiques.

Les lignées critiques de $\mathcal{R}_i^+(\{\pi_n\}_{n \geq 0})$ sont de la forme $\{x'_n\}_{n \geq 0} = \{f^{-l}(x_n)\}_{n \geq 0}$ où $\{x_n\}_{n \geq 0}$ est une lignée critique de $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ qui est dans $f^l(J_i)$.

Comme $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ est aussi point fixe de \mathcal{R}_i^+ , la cascade renormalisée a elle aussi q lignées critiques, c'est-à-dire que quand on a itéré en arrière une lignée critique de $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ jusqu'à ce qu'elle arrive dans J_i , elle ne s'est jamais envoyée sur une autre lignée critique de $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$; en d'autres termes, une lignée critique du renormalisé s'envoie de façon monotone quand on l'itère jusqu'à ce qu'elle devienne lignée critique de $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$.

Ordonnons canoniquement les lignées en les identifiant à leurs points d'accumulation : $\{x_n\}_{n \geq 0} < \{y_n\}_{n \geq 0}$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

On note $\{x_n^1\}_{n \geq 0} < \{x_n^2\}_{n \geq 0} < \dots < \{x_n^q\}_{n \geq 0}$ les lignées critiques de $\{\pi_n\}_{n \geq 0}$ et

$\{x_n'^1\}_{n \geq 0} < \{x_n'^2\}_{n \geq 0} < \dots < \{x_n'^q\}_{n \geq 0}$ les lignées critiques de son renormalisé.

On a donc une permutation τ définie par :

$\{x_n'^k\}_{n \geq 0} = \{f^{-l_k}(x_n^{\tau(k)})\}_{n \geq 0}$ où l_k est le nombre de fois qu'il a fallu itérer $\{x_n^{\tau(k)}\}$ en arrière pour arriver dans J_i .

Si on renormalise le renormalisé, la permutation des lignées critiques sera évidemment la même.

Du point de vue fonctionnel, si on note $c_1 < \dots < c_q$ les extremums relatifs de f et $c'_1 < \dots < c'_q$ les extremums relatifs de son renormalisé, on a la relation $c'_k = f^{-l_k}(c_{\tau(k)})$ et de plus f^{l_k} est monotone au voisinage de c'_k . Pour n suffisamment grand, tous les couples père-fils de la cascade renormalisée à cheval sur l'extremum relatif c'_k seront dans ce voisinage et donc, notant $R'(k, n)$ les $R(k, n)$ du renormalisé, on a d'une part $R'(k, n) = \pm R(\tau(k), n + 1)$ et d'autre part $R'(k, n) = R(k, n)$ (point fixe).

Notant \bar{q} l'ordre de la permutation τ , en renormalisant la cascade \bar{q} fois, on a, pour n suffisamment grand $R(k, n) = \pm R(k, n + \bar{q})$.

Posant $q^* = 2\bar{q}$, on a donc le résultat annoncé.

Le cas d'un opérateur de la forme \mathcal{R}_i^- se traite en changeant ce qui doit être changé. Au bout du compte, on obtient la relation $R(k, n) = \pm R(S\tau(k), n + 1)$ d'où l'on déduit le résultat \diamond

Chapitre 2

Cascades d'orbites périodiques en dimension 2

2.1 Cascades de tresses

2.1.1 Tresses et types de tresse

On a vu qu'une orbite périodique d'une application de l'intervalle était caractérisée par le cycle qui lui était associé. En dimension 2, l'objet analogue est le type de tresse. Une tresse étant un objet moins familier qu'une permutation, il n'est pas peut-être pas inutile d'en rappeler la définition. La référence classique en ce domaine est [Bir].

On considère le cylindre solide $D \times I$ et on se donne $P_p = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \subset D$, p points de D . Une tresse géométrique (d'extrémité P_p) est un p -uplet de chemins de $D \times I$ deux à deux disjoints de la forme $(b_i(t), t)$ dont les extrémités $(b_i(0), 0)$ et $(b_i(1), 1)$ sont respectivement dans $P_p \times \{0\}$ et $P_p \times \{1\}$ (figure 26).

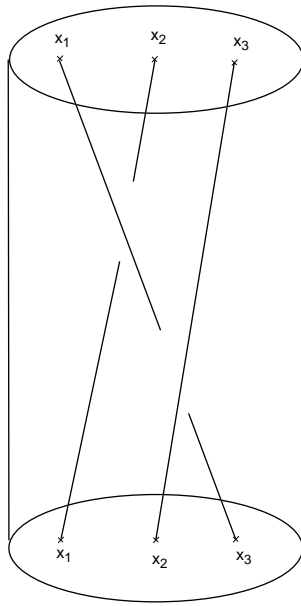


Figure 26

Deux tresses géométriques sont alors dites équivalentes si on peut déformer continûment la première pour arriver sur la seconde en restant dans la classe des tresses géométriques d'extrémité P_p . Le quotient, muni de l'opération de concaténation suggérée figure 17 est un groupe que l'on note $\mathcal{B}(P_p)$ et qui est appelé le groupe des tresses (d'extrémités P_p).

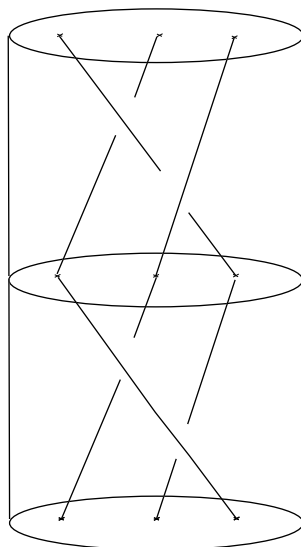


Figure 27

Quand on change le point de base P_p pour un autre P'_p de même cardinal, le groupe obtenu

est isomorphe au premier et si la confusion n'est pas à craindre on notera simplement \mathcal{B}_p ce groupe que l'on appelle le groupe des tresses à p brins.

Notons maintenant $Hom^+(D, P_p)$ le groupe des homéomorphismes du disque préservant l'orientation pour lesquels P_p est un ensemble invariant (c'est-à-dire une réunion finie d'orbites périodiques) et $Aut^+(D, P_p)$ ses classes d'isotopie. Le groupe $Aut^+(D, P_p)$ est isomorphe au groupe des tresses à p brins quotienté par son centre [Bi]. La description (partielle) de cet isomorphisme nous sera profitable.

Tout homéomorphisme du disque préservant l'orientation étant isotope à l'identité, si f est un élément de $Hom^+(D, P_p)$ et f_t une isotopie de l'identité à f , les chemins $(f_t(x_i), t)$ où $x_i \in P_p$ déterminent une tresse géométrique d'extrémité P_p et donc un élément de $\mathcal{B}(P_p)$ (figure 28).

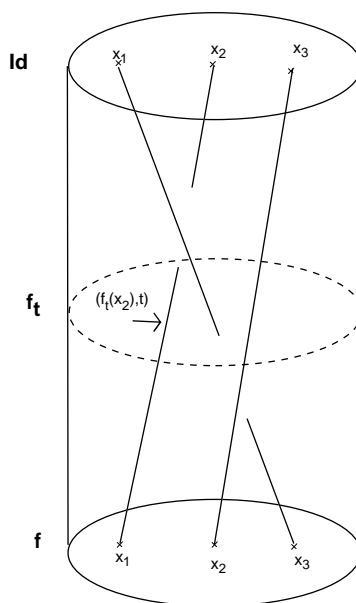


Figure 28

La loi de groupe sur les tresses peut être vue sur les isotopies en procédant de la manière suivante : Si f et g sont deux éléments de $Hom^+(D, P_p)$ et si f_t (resp. g_t) est une isotopie de l'identité à f (resp. g) induisant la tresse α (resp. β), l'isotopie de l'identité à $f \circ g$ obtenue en concaténant f_t à $f \circ g_t$ induit la tresse $\alpha\beta$ (figure 29). De même, l'isotopie de l'identité à f^{-1} donnée par la formule $f^{-1} \circ f_{1-t}$ induit la tresse α^{-1} .

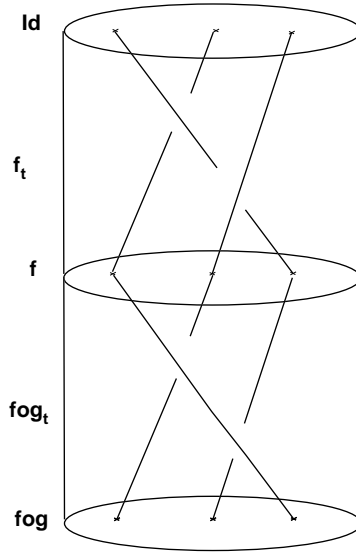


Figure 29

Si maintenant on choisit une autre isotopie f'_t de l'identité à f et si on note α' la tresse qu'elle induit, l'isotopie obtenue en concaténant f_t à $f^{-1} \circ f'_{1-t}$ est une isotopie de l'identité à l'identité qui induit la tresse $\alpha\alpha'^{-1}$. On voit facilement qu'une isotopie de l'identité à l'identité induit la tresse d'une rotation d'angle $2m\pi$ ¹ que l'on note Δ^m et que l'on appelle un m -tours entiers. Ces tours entiers forment le centre du groupe des tresses. Comme on a la relation $\alpha\alpha'^{-1} = \Delta^m$, aux tours entiers près, la tresse associée à $f \in Hom^+(D, P_p)$ ne dépend pas du choix de l'isotopie de l'identité à f .

Pour pouvoir comparer les tresses induites par des orbites périodiques de deux applications différentes, on est amené à considérer les classes de conjugaison de $Hom^+(D, P_p)$. En effet, si $f \in Hom^+(D, P_p)$ et $g \in Aut^+(D, P'_p)$, on peut comparer leur tresses en se donnant un homéomorphisme h du disque (préservant l'orientation) qui envoie P'_p sur P_p et en regardant la tresse induite par hgh^{-1} qui, comme f , est un élément de $Hom^+(D, P_p)$. Le choix d'un autre homéomorphisme préservant l'orientation h' aurait conduit (car hgh^{-1} et $h'gh'^{-1}$ sont topologiquement conjugués), aux tours entiers près, à deux tresses conjuguées.

Une façon particulièrement élégante de visualiser ces classes de conjugaison est de coller les deux extrémités du cylindre pour obtenir le tore solide $D \times S^1 = D \times I / (x,0) \sim (x,1)$ dans lequel

¹ car deux points distincts tournent d'un nombre entier de tours quand on les suit le long d'une isotopie de l'identité à l'identité. Ce nombre de tours est indépendant des deux points distincts choisis car $D \times D - \{(x, x); x \in D\}$ est connexe.

les extrémités de la tresse se recollent pour donner un noeud ² indépendant de la classe de conjugaison de la tresse comme l'évoque la figure 30.

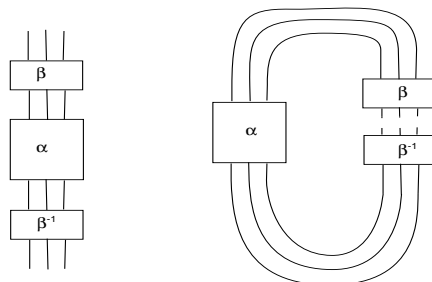


Figure 30

Pour résumer, le type de tresse d'une orbite périodique (ou d'une réunion finie d'orbites périodiques) d'un homéomorphisme du disque préservant l'orientation est la tresse obtenue en suivant l'orbite périodique le long d'une isotopie de l'identité à f , aux tours entiers et à conjugaison près. Désignant par $Z(\mathcal{B}_p)$ le centre du groupe des tresses, on notera $BT_p = \langle \mathcal{B}_p / Z(\mathcal{B}_p) \rangle$ les classes de conjugaison de $\mathcal{B}_p / Z(\mathcal{B}_p)$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les types de tresse et CBT_p l'ensemble des types de tresses correspondant à une seule orbite périodique (et non à plusieurs).

2.1.2 Réductibilité et cascades de tresses

Dans toute la suite f désignera un élément de $Hom^+(D, P_p)$ pour lequel P_p est une orbite périodique. La définition suivante est directement issue des travaux de Thurston sur la classification des homéomorphismes de surfaces à isotopie près [Th, FLP].

Définition 2.1 *Un système de courbes de réduction pour f est une famille de courbes simples fermées disjointes $C_0, C_1, \dots, C_{p'-1}$ de $D - P_p$ bordant des disques disjoints $D_0, D_1, \dots, D_{p'-1}$ telle que :*

- 1) *Les $D_i \cap P_p$ forment une partition de P_p*
- 2) *$f(C_i)$ est isotope à $C_{i+1 \pmod{p'}}$ dans $D - P_p$ pour tout i entre 0 et $p' - 1$.*

² d'habitude un noeud est défini dans S^3 . On peut le définir de manière analogue dans le tore solide.

Remarquons que chacun des disques D_i contient le même nombre b de points de P_p qui vérifie donc $p = bp'$.

Un tel système est dit essentiel (non trivial) si $p' \neq 1$ et $p' \neq p$ et l'application f est dite réductible si elle admet un système de courbes de réduction essentiel. Dans ce cas, le type de tresse qui lui correspond est dit réductible ou renormalisable pour mieux marquer l'analogie avec la dimension 1.

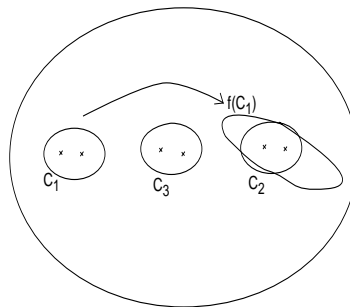


Figure 31

Si f admet un système de courbes de réduction $C_0, C_1, \dots, C_{p'-1}$, on peut trouver un $g \in \text{Hom}^+(D, P_p)$ isotope à f relativement P_p qui fixe ce système de courbes (i.e. $g(C_i) = C_{i+1(\text{mod } p')}$). En appliquant le théorème de Brouwer, on voit que g possède une orbite périodique de période p' avec un point dans chaque disque D_i . Le type de tresse de cette orbite périodique peut être visualisé en suivant les cercles C_i le long d'une isotopie à g et en identifiant les cylindres obtenus aux brins de la tresse (figure 32).

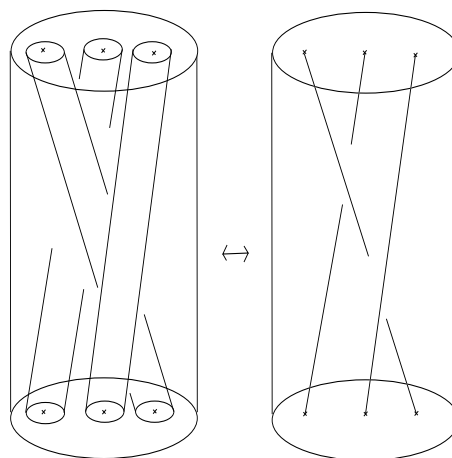


Figure 32

Ce type de tresse β ne dépend pas du choix de l'application g qui fixe les courbes et si α est le type de tresse de $f \in \text{Hom}^+(D, P_p)$, on dit que β est induit par α (pour les courbes $C_0, C_1, \dots, C_{p'-1}$) ; cette terminologie provenant du fait que l'on peut montrer que l'application f elle-même possède une orbite périodique dont le type de tresse est β [AF, Ha].

Définition 2.2 Une cascade de types de tresses est une suite $\{\beta_n \in \text{CBT}_{p_n}\}_{n \geq 0}$ de types de tresses réductibles où pour tout n , β_n est induit par β_{n+1} .

On a évidemment $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$ où $b_{n+1} > 1$ pour tout n , et pour avoir des formules plus homogènes, on note $b_0 = p_0$. Si $b_n = 2$ pour tout n la cascade est dite de dédoublement.

En vertu de ce qui précède, la définition suivante est naturelle :

Définition 2.3 Un homéomorphisme f du disque préservant l'orientation possède une cascade d'orbites périodiques représentant la cascade de types de tresses $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ (figure 33) si elle a une suite d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$ vérifiant pour tout n :

1) $p_{n+1} = b_{n+1}p_n$

2) Le type de tresse de Θ_n est β_n

3) Il existe une collection de courbes simples fermées disjointes $C_0^{n+1}, C_1^{n+1}, \dots, C_{p_n-1}^{n+1}$ de $D - \bigcup_{i=0}^{n+1} \Theta_i$ bordant des disques disjoints $D_0^{n+1}, D_1^{n+1}, \dots, D_{p_n-1}^{n+1}$ vérifiant :

- Chaque D_i^{n+1} contient un point de Θ_n et b_{n+1} points de Θ_{n+1}

- $f(C_i^{n+1})$ est isotope à $C_{i+1 \text{ mod } p_n}^{n+1}$ dans $D - \bigcup_{i=0}^{n+1} \Theta_i$

- $\bigcup_{0 \leq i \leq p_{n+1}-1} D_i^{n+2} \subset \bigcup_{0 \leq i \leq p_n-1} D_i^{n+1}$

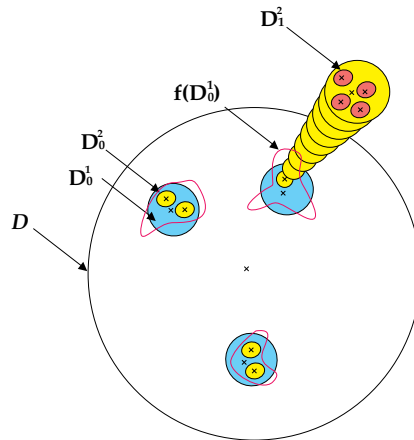


Figure 33

L'unique point de Θ_n qui est dans D_i^{n+1} est appelé le père des b_{n+1} points de Θ_{n+1} qui sont dans ce même disque. Comme en dimension 1, si $b = \{b_n\}_{n \geq 0}$, l'espace des lignées :

$$X_b = \{\{x_n \in \Theta_n\}_{n \geq 0} \text{ où pour tout } n, x_n \text{ est le père de } x_{n+1}\}$$

muni de la distance $d(\{x_n\}_{n \geq 0}, \{x'_n\}_{n \geq 0}) = 1/2^{\min\{n; x_n \neq x'_n\}}$ est homéomorphe à Σ_b .

A n fixé, les b_{n+1} points de Θ_{n+1} qui sont dans un des disques D_{n+1}^i forment une orbite périodique de f^{p_n} . Si pour tout n , le type de tresse de ces orbites périodiques est celui de l'orbite périodique d'une rotation, la cascade est dite de rotation. Par exemple les cascades de dédoublement sont des cascades de rotation (d'angle π). Ces cascades de rotation sont aussi fréquemment appelées cascades sans entropie en vertu du second des théorèmes suivants qui motivent l'étude des cascades de types de tresses pour elles-mêmes.

Théorème 2.4 [GGH] *Un difféomorphisme C^2 chaotique du disque préservant l'orientation possède une cascade de rotation.*

Théorème 2.5 [GvST] *Si un difféomorphisme C^2 du disque préservant l'orientation d'entropie nulle possède une cascade, c'est une cascade de rotation.*

Nous avons vu qu'en dimension 1, le problème de l'existence d'une application C^k représentant une cascade de cycles donnée était délicat quand le nombre de points critiques était infini mais qu'il ne l'était guère dans le cas contraire. De plus, quand une application q -modale représentait une cascade de cycles nous avons pu définir une signature qui convergeait. En dimension 2, comme nous nous concentrons sur les difféomorphismes, il n'y a plus de notion de points critiques. Gambaudo, Sullivan et Tresser [GST] ont procédé à rebours : ils définissent une signature qui, sous bien des aspects, est le pendant de la signature que nous avons défini en dimension 1 et montrent que pour une signature convergente donnée, il existe un difféomorphisme qui possède une cascade d'orbites périodiques avec cette signature.

2.1.3 Signature d'une cascade de tresses

La signature d'une cascade d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de période $\{p_n\}_{n \geq 0}$ d'un homéomorphisme f du disque préservant l'orientation est la suite $\{\lambda_n = l_n/p_{n+1}\}_{n \geq 0}$ où l_n est défini de la manière suivante [GST] :

Soit $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ une isotopie de l'identité à f que l'on étend à une isotopie $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de l'identité à ses itérées en posant : $f_t = f^{[t]} \circ f_{\{t\}}$ (où $[t]$ et $\{t\}$ représentent respectivement les parties entière et décimale de t). Dans un des disques D_i^{n+1} , on choisit un point x_n de Θ_n et un point x_{n+1} de Θ_{n+1} . L'entier l_n est alors le nombre algébrique de tours que fait le vecteur $(f_t(x_{n+1}) - f_t(x_n)) / \|f_t(x_{n+1}) - f_t(x_n)\|$ sur le cercle unité quand t va de 0 à p_{n+1} (où $\|\cdot\|$ est la norme dans \mathbb{R}^2). Il est clair que ce nombre l_n est indépendant des choix du disque D_i^{n+1} et du point x_{n+1} de Θ_{n+1} dans D_i^{n+1} . La figure 34, due à l'extrême obligeance de Slimane ben Miled, suggère l'enlacement des premières orbites périodiques d'une cascade.

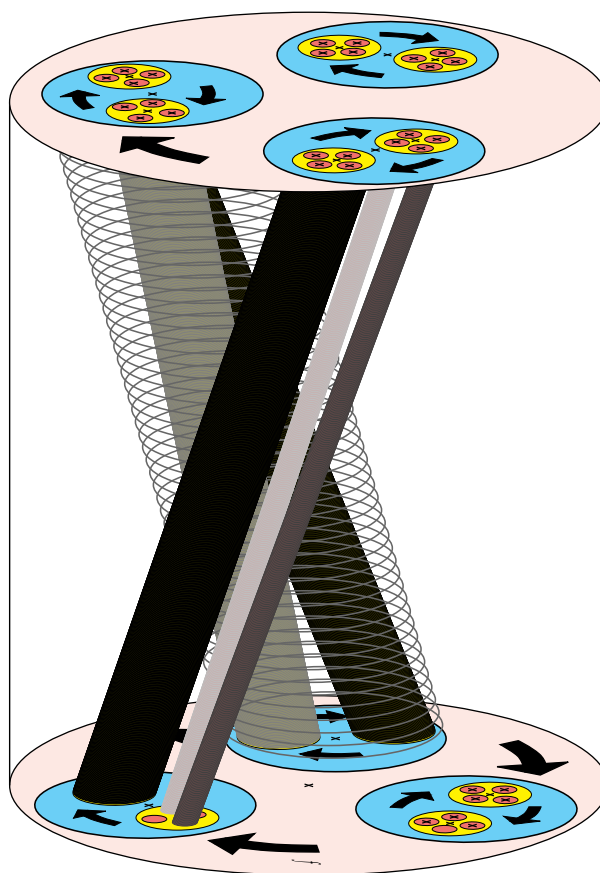


Figure 34

Nous avons vu que le choix d'une autre isotopie $\{f'_t\}_{t \in [0,1]}$ de l'identité à f aurait donné les même tresses, à un nombre m de tours entiers près. Pour cette raison, notant l'_n et λ'_n les quantités définies précédemment et calculées pour $\{f'_t\}_{t \in [0,1]}$, il est facile de montrer qu'il existe

un entier m tel que $l'_n = l_n + mp_{n+1}$ et donc $\lambda'_n = \lambda_n + m$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire qu'à l'addition d'un entier près, ce que nous supposons toujours, cette signature ne dépend pas du choix de l'isotopie de l'identité à f .

Par ailleurs, cette signature est un invariant topologique en ce sens que si h désigne un homéomorphisme du disque préservant l'orientation de disque, la cascade $h(\Theta_n)$ de hfh^{-1} à la même signature, c'est-à-dire, au fond, que la signature ne dépend pas de l'homéomorphisme qui représente une cascade de types de tresses donnée. Si au contraire, le changement de variable h avait renversé l'orientation, la signature correspondante aurait été $\{-l_n/p_{n+1}\}_{n \geq 0}$. Cette signature a enfin l'avantage de caractériser complètement les cascades sans entropie puisque la simple connaissance de la suite des couples (l_n, p_n) permet de retrouver l'unique cascade sans entropie qui a cette signature.

Le théorème est le suivant :

Théorème 2.6 [GST]

- 1) *Toutes les cascades sont représentées par un homéomorphisme du disque préservant l'orientation.*
- 2) *Une cascade sans entropie avec une signature qui converge est représentée par un C^1 -difféomorphisme.*

2.2 Cascades d'orbites périodiques hyperboliques

En dimension 1 nous avons su caractériser les cascades d'orbites périodiques hyperbolisables et nous avons montré qu'un nombre infini de points critiques était la seule obstruction pour une cascade de cycles d'être représentée par une application de l'intervalle de façon hyperbolique. En dimension 2, la situation n'est pas si claire.

Rappelons qu'un compact K invariant par un difféomorphisme f du disque est hyperbolique (contracto-dilatant) si $T_K D$ se décompose continûment en somme directe, invariante par $Df|_K$, de deux sous-espaces $E_K^s \oplus E_K^u$ de dimension 1 et si il existe $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ tels que pour tout n de N :

$$\begin{aligned} \| Df_{(x)}^n u \| &\leq C \lambda^n \| u \| \text{ pour tout } x \in K \text{ et tout } u \in E_x^s \\ \| Df_{(x)}^{-n} u \| &\leq C \lambda^n \| u \| \text{ pour tout } x \in K \text{ et tout } u \in E_x^u \end{aligned}$$

Définition 2.7 *Une cascade de types de tresses est hyperbolisable si elle est représentée par $(\{\Theta_n\}_{n \geq 0}, f)$, f différentiable, où $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n}$ est hyperbolique.*

Nous avons vu que la topologie des points d'accumulation d'une cascade d'orbites périodiques jouait un rôle crucial du point de vue de l'hyperbolicité en dimension 1. Les points périodiques étaient isolés et deux lignées distinctes s'accumulaient sur des points distincts. En dimension 2, on a évidemment le même phénomène car les disques D_n^i sont disjoints. Par contre, alors qu'en dimension 1 une lignée avait au plus deux points d'accumulation, la dimension 2 autorise a priori plus de liberté. A ce stade on a donc seulement le lemme suivant :

Lemme 2.8

- 1) *Les points périodiques $\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n$ sont des points isolés de K .*
- 2) *Deux lignées distinctes s'accumulent sur des points distincts.*

Ce lemme est toutefois suffisant pour nous permettre d'associer à un point d'accumulation de la fermeture de la cascade l'unique lignée qui l'accumule et de définir ainsi une surjection canonique qui est une semi-conjugaison entre la dynamique des points d'accumulation de la cascade et un odomètre. Cette surjection est injective si et seulement si toutes les lignées convergent et dans ce cas, la cascade est dite convergente. Répétons-le, la différence essentielle entre la dimension 1 et 2 est a priori le nombre de préimages de cette surjection qui en dimension 1 ne peut être supérieur à 2. Nous posons donc la question suivante :

Question :

- 1) Une lignée peut-elle avoir une infinité de valeurs d'adhérence ?
- 2) Sinon, peut-elle en avoir un nombre plus grand que 2 ?
- 3) Et si on suppose en plus que la fermeture K de la cascade est hyperbolique ...?

Par ailleurs, les cascades convergentes existent en dimension 2, c'est le cas par exemple des cascades exhibées par Gambaudo, Sullivan et Tresser dans le théorème cité précédemment. En revanche, comme en dimension 1, ces cascades ne peuvent pas être hyperboliques.

Théorème 2.9 *Une cascade d'orbites périodiques hyperbolique ne peut pas être convergente.*

Preuve : Il est bien connu [Sh] que si K est un compact invariant hyperbolique d'un difféomorphisme f , pour ϵ suffisamment petit et $x \in K$, les points y vérifiant $d(f^p(x), f^p(y)) \leq \epsilon$ sont sur la variété stable de x c'est-à-dire que $\lim_{p \rightarrow \infty} d(f^p(x), f^p(y)) = 0$; cette variété stable ne contenant évidemment au plus qu'un point périodique.

Supposons donc qu'un difféomorphisme du disque f possède une cascade d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ convergente dont la fermeture $K = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n}$ est hyperbolique. On pose $K' = \overline{\bigcup_{n \geq 0} \Theta_n} - \bigcup_{n \geq 0} \Theta_n$ l'ensemble des points d'accumulation de la cascade et si $x \in K'$ on note $\{x_n\}_{n \geq 0}$ l'unique lignée qui converge vers x . Comme toute les lignées convergent on a :

$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0 d(x_n, x) \leq \epsilon \forall x \in K'$ et donc $d(f^p(x_n), f^p(x)) \leq \epsilon$ pour tout $p \geq 0$. En d'autres termes, les points périodiques de grandes périodes de la cascade qui accumulent x sont sur la variété stable de x ce qui est une contradiction \diamond

La question reste cependant posée : Quelles sont les cascades de tresses hyperbolisables ?

Une première façon d'aborder ce problème est d'étudier des classes de cascades que l'on sait être représentées de façon hyperbolique et de tenter d'en dégager des propriétés communes qui permettraient de détecter une possible obstruction à l'hyperbolicité. Une seconde manière de procéder consiste à, frappé par les analogies entre la dimension 1 et 2, essayer de jeter des passerelles entre les cascades de cycles hyperboliques et les cascades de tresses en espérant que les cascades de tresses hors de portée de ces passerelles soient précisément les cascades non hyperbolisables.

Notre stratégie, qui combine ces deux approches, a été la suivante : partant d'une cascade

de cycles q -modale (i.e. hyperbolisable), on considère le q -horseshoe unidimensionnel qui la représente et on épaissit cette application de l'intervalle pour obtenir un modèle qui est ce que le fer à cheval de Smale est à l'unimodale. Les cascades d'orbites périodiques correspondantes sont hyperboliques et on peut se demander s'il n'y a pas d'autres cascades de tresses hyperbolisables que celles ainsi obtenues.

Définition 2.10 Soit Γ_q un q -horseshoe unidimensionnel généralisé avec les intervalles I_k et J_k comme dans le premier chapitre. Un épaississement de Γ_q est l'extension à un disque d'un plongement du carré $I \times I$ dans le plan préservant l'orientation qui envoie chaque bande $I \times I_k$ dans le carré de façon à préserver le feuilletage horizontal en contractant les feuilles et de façon à préserver le feuilletage vertical en le dilatant et en permutant ses feuilles comme Γ_q permute les points de l'intervalle. En d'autres termes, sur $I \times I_k$, F est de la forme $F(x, y) = (g(x), \Gamma_q(y))$ où $|g'| < 1$.

Au contraire, sur les bandes $I \times J_k$, le plongement a l'allure suggérée par la figure 35.

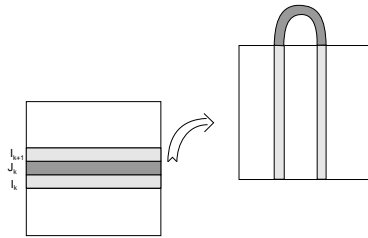


Figure 35

Divers épaississements de Γ_3^+ sont indiqués figure 36.

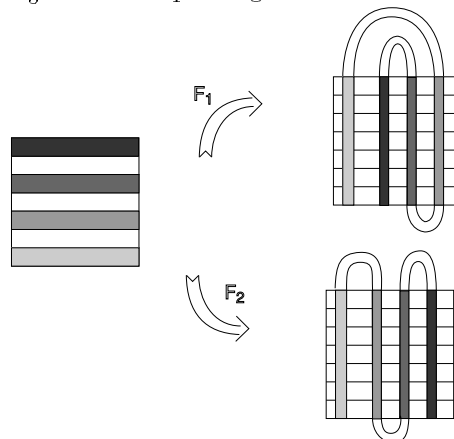


Figure 36

Remarquons que F a autant d'orbites périodiques sur $I \times I$ que Γ_q . Plus précisément, (x, y) est point périodique de F si et seulement si y est point périodique de même période de Γ_q . En effet, comme F contracte le feuilletage horizontal, une feuille de ce feuilletage ne contient au plus qu'un point périodique. Une orbite périodique de F se projette donc sur l'axe vertical pour donner une orbite périodique de Γ_q de même période. Réciproquement, si Γ_q permute cycliquement p points de l'intervalle, F permute p feuilles du feuilletage horizontal en les contractant. Itérant indéfiniment F , ces feuilles convergent vers p points qui forment une orbite périodique de F .

Il vaut mieux avoir les deux faits présents à l'esprit :

1) Il n'est pas impossible a priori qu'un épaississement d'un Γ_q ait des cascades d'orbites périodiques qui se projettent sur l'axe des y pour donner une suite de cycles qui n'est pas une cascade de cycles.

2) Inversement, on peut trouver un exemple de suite d'orbites périodiques d'un épaississement d'un Γ_q qui n'est pas une cascade d'orbites périodiques mais qui se projette sur l'axe vertical pour donner une cascade de cycles de Γ_q . Cependant, Slimane ben Miled à montré dans sa thèse [bM] que ce n'était pas le cas dans le fer à cheval de Smale ($q = 1$).

Définition 2.11 *Une cascade de types de tresses est dite cascade q -modale épaissie si elle est représentée par l'épaississement d'un Γ_q de façon à ce que les points périodiques correspondants se projettent sur l'axe vertical pour donner une cascade de cycles q -modale de Γ_q .*

Comme la théorie est loin d'être aboutie, nous nous bornerons de plus aux cascades de dédoublement.

La propriété commune aux cascades de dédoublement q -modales épaissies est la suivante :

Théorème 2.12 *Une cascade q -modale épaissie de dédoublement de période a a une signature qui converge exponentiellement vite en oscillant. Plus précisément, pour tout n suffisamment grand,*

$$l_{n+1} = 2l_n + r_n$$

où pour tout p

$$\left| \sum_{j=n}^{n+p} r_j \right| \leq q$$

Preuve : Soit F un épaississement d'un Γ_q . Une isotopie "naturelle" de l'identité à F peut être décrite de la manière suivante : Partant du carré $I \times I$, on le contracte le long de l'axe des x , on le dilate le long de l'axe des y , et en q endroits on plie ($\pm 1/2$ tours) successivement la fine et longue bande obtenue (figure 37).

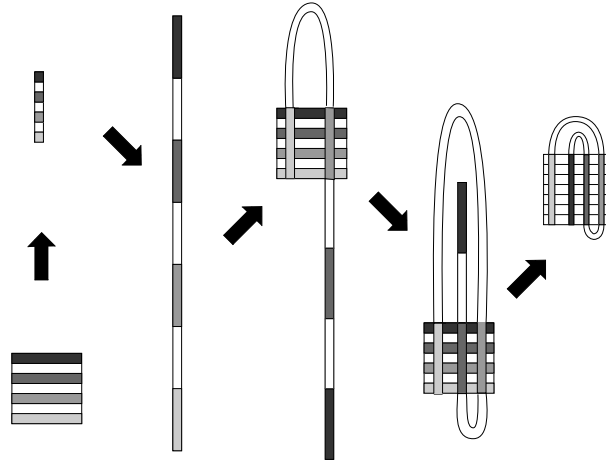


Figure 37

On code l'épaississement par un $(q + 1)$ -uplet d'entiers et de demi-entiers $(m_0, \dots, m_k, \dots, m_q)$ où m_k est le nombre de tours à $\varepsilon < 1/2$ près que fait le vecteur formé par deux points quelconques situés dans une même bande $I \times I_k$ quand on le suit le long de l'isotopie naturelle de l'identité à F . Ce nombre m_k est un entier si Γ_q est croissante sur I_k , c'est un demi-entier si Γ_q est décroissante sur I_k . Divers exemples sont montrés figure 38.

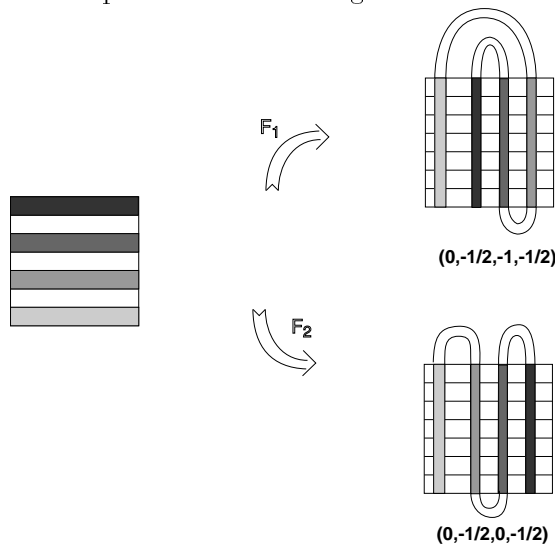


Figure 38

Remarquons que $m_{k+1} = m_k \pm 1/2$ pour tout k entre 0 et $q - 1$ et qu'un vecteur formé d'un couple de points dont l'un est situé dans une bande $I \times I_k$ et l'autre dans une bande "adjacente" $I \times I_{k+1}$ tourne, à $\varepsilon < 1/2$ près d'un angle m_k ou m_{k+1} . Plus précisément, si le projeté sur l'axe vertical de ce couple s'envoie par Γ_q en préservant l'ordre de ces deux points, le couple tourne d'un angle m_k si m_k est entier ou d'un angle m_{k+1} si c'est celui-ci qui est entier, si au contraire le projeté du couple s'envoie en renversant l'ordre des points, le couple tourne d'un angle m_k si m_k est un demi-entier, m_{k+1} sinon.

On considère maintenant une cascade d'orbites périodiques q -modale épaissie $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ représentée par cet épaississement F et, à la manière du premier chapitre, on note $\Phi(k, n)$ le nombre de points de Θ_n situés dans la bande $I \times I_k$.

Il faut d'abord remarquer que le codage de l'épaississement est élaboré de façon que

$$l_n = \sum_{k=0}^q 2m_k \Phi(k, n)$$

pour n suffisamment grand.

En effet, la projection de la cascade $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ sur l'axe vertical donnant une cascade de cycles q -modale de Γ_q , pour une génération suffisamment grande, ce que nous supposons désormais, un père situé dans une bande $I \times I_k$ a l'un de ses fils situé dans la même bande et si son second fils n'est pas dans cette bande, il est dans une bande adjacente $I \times I_{k-1}$ ou $I \times I_{k+1}$.

Comme le projeté, sur l'axe vertical, du triplet formé du père et de ses deux fils doit s'envoyer en préservant ou en renversant son ordre afin que pour le triplet image par Γ_q , le père soit entre ses deux fils, les deux vecteurs formés par les deux couples père-fils tournent tous deux, à $\varepsilon < 1/2$ près, d'un même angle m_k .

Pour un point périodique x de F , on pose $i(x) = k \in \{0, 1, \dots, q\}$ si $x \in I \times I_k$. A priori, en deux itérations, le vecteur formé par un couple père-fils (x, y) tourne d'un angle $m_{i(x)} + m_{i(F(x))} \pm \varepsilon$ où $0 \leq \varepsilon < 1$. En fait $\varepsilon < 1/2$. En effet, si le projeté sur l'axe vertical ce couple s'envoie par Γ_q^2 en préservant l'ordre, d'une part l'angle dont tourne ce couple en deux itérations à moins d'un demi près est un entier et d'autre part, $m_{i(x)} + m_{i(F(x))}$ est le seul entier dans $]m_{i(x)} + m_{i(F(x))} - \varepsilon, m_{i(x)} + m_{i(F(x))} + \varepsilon[$. De même, si le projeté de ce couple s'envoie par Γ_q^2 en renversant l'ordre, d'une part l'angle dont tourne ce couple en deux itérations à moins d'un demi près est un demi-entier et d'autre part, $m_{i(x)} + m_{i(F(x))}$ est le seul demi-entier dans $]m_{i(x)} + m_{i(F(x))} - \varepsilon, m_{i(x)} + m_{i(F(x))} + \varepsilon[$.

En faisant le même raisonnement pour les itérés successifs, on obtient

$$l_n = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} m_{i(F^j(x))} \pm \varepsilon = \sum_{k=0}^q 2m_k \Phi(k, n) \pm \varepsilon$$

où $0 \leq \varepsilon < 1/2$.

Comme l_n et $\sum_{k=0}^q 2m_k \Phi(k, n)$ sont entiers, $\varepsilon = 0$, d'où la formule

$$l_n = \sum_{k=0}^q 2m_k \Phi(k, n)$$

annoncée.

Rappelons maintenant que nous avons défini au premier chapitre des coefficients $R(k, n)$ pour tout k entre 0 et $q+1$ et tout n qui vérifiaient $R(0, n) = R(q+1, n) = 0$ et $\Phi(k, n+1) = 2\Phi(k, n) + R(k+1, n) - R(k, n)$ où pour tout p (lemme 1.30),

$$|\sum_{j=n}^{n+p} R(k, j)| \leq 1.$$

On a donc, pour tout n suffisamment grand :

$$l_{n+1} = \sum_{k=0}^q 2m_k \Phi(k, n+1) = \sum_{k=0}^q 2m_k (2\Phi(k, n) + R(k+1, n) - R(k, n)) = 2l_n + r_n$$

où

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=0}^q 2m_k (R(k+1, n) - R(k, n)) = \sum_{q=1}^q 2m_{k-1} R(k, n) - \sum_{q=1}^q 2m_k R(k, n) \\ &= 2 \sum_{k=1}^q (m_{k-1} - m_k) R(k, n), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que pour tout $p \geq 0$

$$|\sum_{j=n}^{n+p} r_j| = 2 |\sum_{k=1}^q (m_{k-1} - m_k) (\sum_{j=n}^{n+p} R(k, j))| \leq 2 \sum_{k=1}^q |m_{k-1} - m_k| |\sum_{j=n}^{n+p} R(k, j)| \leq q$$

car

$$|m_{k-1} - m_k| = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |\sum_{j=n}^{n+p} R(k, j)| \leq 1.$$

La formule $|\sum_{j=n}^{n+p} r_j| \leq q$ appliquée avec $p = 0$ donne $|r_n| \leq q$, c'est-à-dire que posant $\lambda_n = l_n/2^{n+1}$ on a :

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leq \frac{q}{2^{n+2}}$$

d'où la convergence exponentielle de la signature $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$. Cette même formule implique d'autre part que les r_n doivent être tantôt positifs, tantôt négatifs, d'où la convergence en oscillant de la signature \diamond

Alors, y-a-t'il d'autres cascades de tresses hyperbolisables que celles représentées par ces épaissements d'applications hyperboliques de l'intervalle ? Du point de vue des cascades, la dynamique hyperbolique est-elle essentiellement unidimensionnelle ? La convergence exponentielle en oscillant de la signature est-elle l'indice de l'hyperbolisabilité d'une cascade de dédoublement ? A cet égard, l'exhibition d'un difféomorphisme du disque représentant une cascade de tresses hyperbolique avec une signature $\{l_n = 1\}_{n \geq 0}$ ou encore $\{r_n = -1\}_{n \geq 0}$ avec nos notations antérieures (modèle de Bowen-Franks) qui converge exponentiellement vite de façon monotone infirmerait ces intuitions.

2.3 Renormalisation

On a vu que l'étude des cascades d'orbites périodiques hyperboliques était plus délicate en dimension 2 qu'en dimension 1. Au contraire, nous verrons qu'il est plus facile de renormaliser les cascades de types de tresses que les cascades de cycles.

Considérons un homéomorphisme du disque préservant l'orientation f qui possède une cascade d'orbites périodiques $\{\Theta_n\}_{n \geq 0}$ de période $\{p_{n+1} = b_{n+1}p_n\}_{n \geq 0}$ dont les courbes de réduction C_i^n vérifient $f(C_i^n) = C_{i+1}^n \pmod{p_{n-1}}$ au lieu que $f(C_i^n)$ soit simplement isotope à $C_{i+1}^n \pmod{p_{n-1}}$ dans $D - \bigcup_{i=0}^n \Theta_i$. De tels homéomorphismes existent, c'est le cas par exemple de ceux exhibés par Gambaudo, Sullivan et Tresser et on peut les décréter "indéfiniment renormalisables". Renormaliser un tel homéomorphisme consiste à choisir un des disques D_i^0 qui est donc invariant par f^{p_0} , à choisir un homéomorphisme $h : D \rightarrow D_i^0$ qui préserve l'orientation, le renormalisé de f étant $hf^{p_0}h^{-1}$. Ce renormalisé ne dépend pas du choix de h en ce sens qu'un autre homéomorphisme $h' : D \rightarrow D_i^0$ aurait donné un renormalisé topologiquement conjugué au premier. De même, contrairement à la situation en dimension 1, ce renormalisé de f ne dépend pas du choix du disque D_i^0 dans la mesure où un autre $D_{i'}^0$ aurait lui aussi donné un renormalisé topologiquement conjugué au premier. Dans un autre esprit, au lieu de choisir un changement de variable h qui préserve l'orientation, nous aurions pu en choisir un qui la renversait et définir ainsi deux opérateurs de renormalisation que nous aurions pu nommer \mathcal{R}^+ et \mathcal{R}^- .

Nous resterons fidèle à notre stratégie de ne renormaliser que les cascades de tresses. De ce point de vue, si $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ est la cascade de tresses représentée par f , la cascade de tresses renormalisée $\mathcal{R}^+\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ peut être visualisée en procédant comme suit : f_t désignant une isotopie de l'identité à f que l'on étend en une isotopie de l'identité à f^{p_0} en posant, pour t entre 0 et p_0 , $f_t = f^{[t]} \circ f_{\{t\}}$, un disque D_i^0 étant choisi, la cascade de tresses renormalisée est la suite de tresses obtenue en suivant les $\Theta_{n+1} \cap D_i^0$ le long de cette isotopie étendue. Si $\{l_n/p_{n+1}\}_{n \geq 0}$ désigne la signature de la cascade $\{\beta_n\}_{n \geq 0}$, la signature de la cascade renormalisée $\mathcal{R}^+\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ est $\{l_{n+1}/p_{n+2}\}_{n \geq 0}$, c'est-à-dire que \mathcal{R}^+ agit sur les signatures comme l'opérateur de décalage. De même, pour des raisons évoquées plus haut, la cascade renormalisée $\mathcal{R}^-\{\beta_n\}_{n \geq 0}$ à pour signature $\{-l_{n+1}/p_{n+2}\}_{n \geq 0}$. Comme d'une part ces signatures sont définies à l'addition d'un entier m près à cause du choix de l'isotopie de l'identité à f et que d'autre part les périodes des cascades de tresses points fixes de ces opérateurs de renormalisation doivent vérifier $p_{n+1} = bp_n$ pour tout n , on a le théorème suivant :

Théorème 2.13 *Si une cascade de types de tresses est point fixe de \mathcal{R}^+ alors il existe un entier m tel que sa signature vérifie l'équation :*

$$l_{n+1} = l_n + mb^{n+2} \text{ pour tout } n.$$

Si une cascade de types de tresses est point fixe de \mathcal{R}^- alors il existe un entier m tel que sa signature vérifie l'équation :

$$l_{n+1} = -l_n + mb^{n+2} \text{ pour tout } n.$$

Comme de plus, la signature caractérise complètement une cascade de types de tresses de rotation, on a :

Théorème 2.14 *Une cascade de types de tresse de rotation est point fixe de \mathcal{R}^+ si et seulement si il existe un entier m tel que sa signature vérifie l'équation :*

$$l_{n+1} = l_n + mb^{n+2} \text{ pour tout } n.$$

Une cascade de types de tresse de rotation est point fixe de \mathcal{R}^- si et seulement si il existe un entier m tel que sa signature vérifie l'équation :

$$l_{n+1} = -l_n + mb^{n+2} \text{ pour tout } n.$$

L'existence d'homéomorphismes représentant une cascade de tresses point fixe de ces opérateurs de renormalisation est assurée par le théorème de Gambaudo, Sullivan et Tresser précédemment cité (théorème 2.6).

On peut tout naturellement épaissir les cascades de cycles q -modales point fixe des opérateurs de renormalisation sur les cascades de cycles pour observer le comportement des opérateurs de renormalisation sur les tresses afin de tenter de dégager des liens subtils entre les renormalisations en dimension 1 et 2. On montre le théorème suivant :

Théorème 2.15 *Une cascade de cycles q -modale de dédoublement point fixe d'un \mathcal{R}_i^+ ou d'un \mathcal{R}_i^- s'épaissit pour donner une cascade de tresses prépériodique de \mathcal{R}^+ et \mathcal{R}^- .*

Preuve : Remarquons qu'une cascade de types de tresses de dédoublement est un point périodique de \mathcal{R}^+ si et seulement si il existe deux entiers p et m tels que

$$l_{n+p} = l_n + m2^{n+p+1} \text{ pour tout } n,$$

c'est-à-dire qu'une cascade de dédoublement est prépériodique si sa signature vérifie cette équation pour tout n suffisamment grand. Posant $l_{n+1} = 2l_n + r_n$, on vérifie facilement que cette équation est équivalente $r_{n+p} = r_n$ pour tout n suffisamment grand.

Comme d'une part, avec nos notations de d'habitude, la signature d'une cascade q -modale épaissie de dédoublement vérifie :

$$r_n = \sum_{k=0}^q 2m_k(R(k+1, n) - R(k, n))$$

pour tout n suffisamment grand et que d'autre part, si une cascade de cycle est point fixe d'un \mathcal{R}_i^s , $s = +, -$, il existe un entier q^* tels que pour tout n suffisamment grand (*proposition 1.28, théorème 1.31*):

$$R(k, n + q^*) = R(k, n),$$

l'épaississement d'une cascade q -modale de dédoublement donne bien un point prépériodique de \mathcal{R}^+ .

Pour montrer que c'est aussi un point prépériodique de \mathcal{R}^- , il faut faire le même raisonnement *mutatis mutandis* \diamond

Par exemple, les cascades de dédoublement unimodales ($+ -$ et $- +$) qui sont points fixes d'opérateurs de renormalisation sur les cycles et dont les signatures vérifient $R(k, n+1) = -R(k, n)$ s'épaississent pour donner un point fixe de \mathcal{R}^- . Ce sont probablement les seules cascades de cycles points fixes à s'épaissir ainsi en points fixes des opérateurs sur les types de tresses et non en une orbite de période plus grande. La figure 39 montre une cascade de cycles bimodale qui sur le plan combinatoire est un point fixe de de \mathcal{R}_0^- mais qui ne peut s'épaissir que pour donner une orbite de période 2 de \mathcal{R}^- .

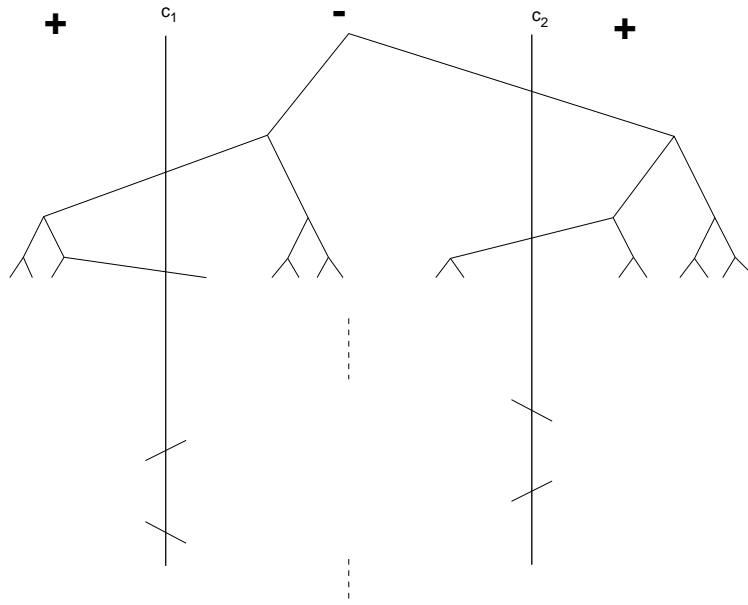


Figure 39

Références bibliographiques

- [AKM] R. L. Adler, A. G. Konheim et M. H. MacAndrew. Topological entropy. *Trans A.M.S.* **114**, pp. 309-319, 1965.
- [ALM] L. Alsedà, J. Llibre et M. Misiurewicz. *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*, Advanced series in nonlinear dynamics, vol 5, Singapore World Scientific, 1993.
- [AF] D. Asimov et J. Franks. Unremovable closed orbits. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro 1981)*, **1007** of *Lecture Notes In Math.* pp. 22-29, 1981.
- [Bir] J. Birman. *Braids, links and mapping class group*, Annals of mathematics studies **82**, Princeton Univ. Press, 1984.
- [BGM] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz et L.-S. Young. Periodic points and topological entropy of one dimensional maps. *Global theory of dynamical systems*, Lecture Notes In Math. **819**, Springer, Berlin, (1980) pp. 18-34.
- [Bow] R. Bowen. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Am. Math. Soc.* **153**, pp. 401-414, 1971.
- [BF] R. Bowen et J. Franks. The periodic points of maps of the disks and interval, *Topology* **15**, pp. 337-342, 1976.
- [CT] P. Coullet et C. Tresser. Itération d'endomorphismes et groupe de renormalisation, *CRAS* **A287**, pp. 577-581, 1978.
- [FLP] A. Fathi, F. Laudenbach et V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Asterisque **66-67**, Soc. Math. France, 1981.
- [Fe] M. J. Feigenbaum, Quantitative universality for a class of non linear transformations, *J. Stat. Phys* **19**, pp. 25-52, 1978.
- [GGH] J.-M. Gambaudo, J. Guashi et T. Hall. Period-multiplying cascades for diffeomorphisms of the disc. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc* **116** (2), pp. 359-374, 1994.
- [GvST] J.-M. Gambaudo, S. van Strien et C. Tresser. The periodic orbit structure of orientation

- preserving diffeomorphisms on D^2 with topological entropy zero. *Ann. Inst. H. Poincaré* **49** pp. 335-346, 1989.
- [GST] J.-M. Gambaudo, D. Sullivan et C. Tresser. Infinite cascades of braids and smooth dynamical systems. *Topology* **33**, pp. 85-94, 1994.
- [GLOT] P. Glendinning, J. Los, V. Otero-Espinar et C. Tresser. Dynamique symbolique pour la renormalisation des endomorphismes d'entropie nulle de l'intervalle. *C. R. Acad. Sc.* **307**, pp. 607-612, 1988.
- [Ha] T. Hall. Unremovable periodic orbits of homeomorphisms. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **110** pp. 523-531, 1991.
- [HMS] M. W. Hirsch, J. E. Marsden et M. Shub, editors. *From topology to computation: Proceedings of the SMALEFEST*. Springer, 1993.
- [HT] J. Hu et C. Tresser. Period doubling, entropy and renormalization. Preprint, 1994.
- [JT] A. P. Juskevic et R. Taton. *Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. D'Alembert et J. L. Lagrange*. Birkhäuser, 1980.
- [LGT] J. Los, J.-M. Gambaudo et C. Tresser. A horseshoe for doubling operator: topological dynamics for metric universality. *Phys. Lett. A* **123**, pp. 60-64, 1987.
- [dMvS] W. de Melo et S. van Strien. *One dimensional dynamics*. Springer, 1993.
- [bM] S. ben Miled. *Dynamique topologique en dimension 2: cascades d'orbites périodiques*. Thèse de doctorat, Nice, 1994.
- [MT] J. Milnor et W. Thurston. On iterated maps of the interval. *Lect. Notes in Math.* **1342**, pp. 465-563, 1988.
- [M] M. Misiurewicz. Horseshoes for mappings of the interval. *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Mat.* **27**, pp. 167-169, 1979.
- [M2] M. Misiurewicz. Invariant measures for continuous transformations of $[0, 1]$ with zero entropy. *Lecture Notes in Math.* **729**, pp. 144-152, 1979.

- [O] V. Otero-Espinar. *Algunos aspectos combinatorios, topologicos y diferenciables de la dinamica sobre el intervalo*. Thesis, Universidade de Santiago de Compostela, 1992.
- [OT] V. Otero-Espinar et C. Tresser. Global complexity and essential simplicity: a conjectural picture of the boundary of chaos for smooth endomorphism of the interval. *Physica D* **39**, pp. 163-168, 1989.
- [Sh] M. Shub. *Global stability of dynamical systems*. Springer, 1987.
- [Sm] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bul. Amer. Math. Soc.* **73** (3), pp. 747-817, 1967.
- [Su] D. Sullivan. Bounds, quadratic differentials and renormalisation conjectures. In *Mathematics into the twenty-first century*, A. M. S Centennial Publications, 1992.
- [Th] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** (2), pp. 417-431, 1988.
- [TW] C. Tresser et A. Wilkinson. Smoothability of infinitely interval-renormalizable endomorphisms. Draft, 1994.

Résumé :

Cette thèse est consacrée aux cascades de cycles représentées par les applications de l'intervalle et aux cascades de tresses représentées par les homéomorphismes du disque préservant l'orientation. Dans un premier temps, on s'intéresse aux cascades hyperbolisables, c'est-à-dire aux cascades qui peuvent être représentées de façon hyperbolique par les applications en question. En dimension 1, on montre qu'une cascade de cycles est hyperbolisable si et seulement si elle a un nombre fini de points critiques, c'est-à-dire si elle est représentée par une application de l'intervalle qui a un nombre fini de points critiques. Nos travaux en dimension 1 suggèrent par ailleurs de s'intéresser aux cascades de tresses obtenues en épaississant des cascades de cycles (cascades de tresses épaissies). On donne un critère que vérifie toutes ces cascades de tresses épaissies qui permet de prouver que toutes les cascades de tresses ne sont pas des cascades de tresses épaissies et on espère que la non vérification de ce critère est la seule obstruction à l'hyperbolisabilité d'une cascade de tresses.

Dans un second temps, on s'intéresse aux cascades du point de vue de la renormalisation. A une application infiniment renormalisable de l'intervalle ou du disque est naturellement associée une cascade et les opérateurs de renormalisation fonctionnels induisent des opérateurs de renormalisation sur les cascades. On montre qu'une cascade de cycles de dédoublement associée à un point fixe d'un opérateur de renormalisation fonctionnel s'épaissit pour donner une orbite prépériodique pour les opérateurs de renormalisation sur les cascades de tresses.

Mots clefs : systèmes dynamiques, dynamique différentiable, dynamique hyperbolique, renormalisation, cascade d'orbites périodiques, fer à cheval.