Série 5 – Correction

Exercice 1. Calculer la torsion pour l'hélice $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), at)$, $t \in \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante.

Correction: *On rappelle que si C est une courbe de paramétrage normale γ, la torsion au point $\gamma(s)$ est par définition le réel $\tau(\gamma(s))$ tel que $b'(s) = -\tau(\gamma(s))n(t)$, où $(t(s), n(s), b(s))$ est le repère de Frenet au point $\gamma(s)$.*

Lemme 1. *Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ est un paramétrage régulier (mais pas forcément normal) d'une courbe C, alors la torsion $\tau(P)$ au point $P = \gamma(s)$ est donnée par la formule suivante :*

$$\tau(P) = \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|^2}.$$

Démonstration. Notons $\gamma_{\text{n}} : [0, l(C)] \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage normale de la courbe C et $\psi\colon\ : [a, b] \to [0, l(C)]$ tel que $\gamma = \gamma_{\text{n}} \circ \psi$. On a :

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= \psi'(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)),\\
\gamma''(s) &= \psi''(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) + \psi'(s)^2\gamma_{\text{n}}''(\psi(s)) \quad \text{et}\\
\gamma'''(s) &= \psi'''(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) + 3\psi'(s)\psi''(s)\gamma_{\text{n}}''(\psi(s)) + \psi'(s)^3\gamma_{\text{n}}'''(\psi(s)).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)) &= \det\big(\psi'(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)), \psi''(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) + \psi'(s)^2\gamma_{\text{n}}''(\psi(s)),\\
&\qquad \psi'''(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) + 3\psi'(s)\psi''(s)\gamma_{\text{n}}''(\psi(s)) + \psi'(s)^3\gamma_{\text{n}}'''(\psi(s))\big)\\
&= \det\big(\psi'(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)), \psi'(s)^2\gamma_{\text{n}}''(\psi(s)), \psi'(s)^3\gamma_{\text{n}}'''(\psi(s))\big)\\
&= \psi'(s)^6 \det\left(\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)), \gamma_{\text{n}}''(\psi(s)), \gamma_{\text{n}}'''(\psi(s))\right)
\end{aligned}$$

et

$$|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|^2 = \psi^6|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))|^2$$

Ainsi :

$$\frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|^2} = \frac{\det\left(\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)), \gamma_{\text{n}}''(\psi(s)), \gamma_{\text{n}}'''(\psi(s))\right)}{|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))\|^2}$$

Revenons maintenant à la définition de la torsion au point $\gamma(s) = \gamma_{\text{n}}(\psi(s))$:

$$\tau(\gamma(s)) = -b'(\gamma(s)) \cdot n(\gamma(s)).$$

Or on a :

$$b(\psi(s)) = \frac{\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))}{|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))|}$$

donc

$$\begin{aligned}
b'(\psi(s)) &= \frac{|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))|\left(\gamma_{\text{n}}''(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s)) + \gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}'''(\psi(s))\right) + f(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))}{|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))|^2}\\
&= \frac{|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))|\left(\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}'''(\psi(s))\right) + f(s)\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))}{|\gamma_{\text{n}}'(\psi(s)) \times \gamma_{\text{n}}''(\psi(s))|^2},
\end{aligned}$$

où $f(s)$ est une fonction à valeurs réelles. Ainsi

$$\begin{aligned}
b'(\psi(s))\cdot n(\psi(s)) &= \frac{|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|}{|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|^2|\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|}(\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}'''(\psi(s)))\cdot\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))\\
&= \frac{|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|}{|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|^2|\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|}\det(\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s)),\gamma_{\mathrm{n}}'''(\psi(s)),\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s)))\\
&= \frac{\det(\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s)),\gamma_{\mathrm{n}}'''(\psi(s)),\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s)))}{|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))|^2}
\end{aligned}$$

Le dernière égalité vient du fait que $|\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))\times\gamma_{\mathrm{n}}''(\psi(s))| = |\gamma_{\mathrm{n}}'(\psi(s))|$.

On a donc bien

$$\tau(P) = -b'(\gamma(s))\cdot n(\gamma(s)) = \frac{\det(\gamma'(s),\gamma''(s),\gamma'''(s))}{\|\gamma'(s)\times\gamma''(s)\|^2}.$$

□

On considère le paramétrage $\gamma(t) = (\cos(t),\sin(t),at)$ On calcule les dérivées de γ :

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= (-\sin(t),\cos(t),a)\\
\gamma''(t) &= (-\cos(t),-\sin(t),0)\\
\gamma'''(t) &= (\sin(t),-\cos(t),0)
\end{aligned}$$

On a donc

$$\det(\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)) = \det\begin{bmatrix}-\sin(t) & -\cos(t) & \sin(t)\\ \cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t)\\ a & 0 & 0\end{bmatrix} = a.$$

Par ailleurs,

$$|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2 = |(-a\sin(t),-a\cos(t),1)|^2 = 1+a^2$$

Donc la torsion de l'hélice au point $P = (\cos(t),\sin(t),at)$ est égale à $\frac{a}{1+a^2}$.

Exercice 2. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $1<a<b$. Calculer la courbure et la torsion pour la courbe $\mathbb{R}_{>0}\ni t\mapsto(t,t^a,t^b)$. Y a-t-il des points de courbure nulle ?

Correction: *On considère le paramétrage $\gamma(t) = (t,t^a,t^b)$. On calcule les dérivées de γ :*

$\gamma'(t) = (1,at^{a-1},bt^{b-1}), \gamma''(t) \quad = (0,a(a-1)t^{a-2},b(b-1)t^{b-2}), \gamma'''(t) = (0,a(a-1)(a-2)t^{a-3},b(b-1)(b-2)t^{b-3}).$

On a

$$\begin{aligned}
\gamma'(t)\times\gamma''(t) &= (ab(b-a)t^{a+b-3},-b(b-1)t^{b-2},a(a-1)t^{a-2})\quad \textit{et}\\
\det(\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t)) &= \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ at^{a-1} & a(a-1)t^{a-2} & a(a-1)(a-2)t^{a-3}\\ bt^{b-1} & b(b-1)t^{b-2} & b(b-1)(b-2)t^{b-3}\end{bmatrix}\\
&= abt^{a+b-6}\det\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ t^2 & (a-1)t & (a-1)(a-2)\\ t^2 & (b-1)t & (b-1)(b-2)\end{bmatrix}\\
&= ab(a-1)(b-1)(b-a)t^{a+b-5}
\end{aligned}$$

Au point $P=\gamma(t)$, on a donc :

$$\begin{aligned}
\kappa(P) &= \frac{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|}{|\gamma'(t)|^3}\\
&= \frac{\sqrt{a^2b^2(b-a)^2t^{2a+2b-6}+a^2(a-1)^2t^{2a-4}+b^2(b-1)^2t^{2b-4}}}{(1+a^2t^{2a-2}+b^2t^{2b-2})^{\frac{3}{2}}}\\
\tau(P) &= \frac{\det(\gamma'(t),\gamma''(t),\gamma'''(t))}{|\gamma'(t)\times\gamma''(t)|^2}\\
&= \frac{ab(a-1)(b-1)(b-a)t^{a+b-5}}{a^2b^2(b-a)^2t^{2a+2b-6}+a^2(a-1)^2t^{2a-4}+b^2(b-1)^2t^{2b-4}}
\end{aligned}$$

Un point $\gamma(t)$ a courbure nulle si et seulement si $\gamma'(t)\times\gamma''(t)=0$. Or, vu les hypothèses sur a, b et t cela n'arrive jamais.

Exercice 3. Donner un exemple d'une courbe élémentaire lisse $C \subset \mathbb{R}^3$ ayant des points de torsion strictement positive et des points de torsion strictement négative.

Correction: *On considère la courbe définie par le paramétrage :*

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma\colon & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), t^2). \end{array}$$

Cette courbe est lisse en effet γ est lisse et $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t dans $[-\pi, \pi]$. De plus cette fonction est clairement injective.

On a

$$\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) = \det \begin{bmatrix} -\sin(t) & -\cos(t) & \sin(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t) \\ 2t & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2t$$

Pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, la torsion en $\gamma(t)$ est strictement négative et pour $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, la torsion en $\gamma(t)$ est strictement positive.

Exercice 4. Démontrer qu'une courbe élémentaire lisse $C \subset \mathbb{R}^3$ de torsion nulle est contenue dans un plan.

Correction: *Considérons $\gamma : [0, l(C)]$ un paramétrage normal de C. La nullité de la torsion implique que le vecteur binormal est constant. Notons b ce vecteur. On va montrer que la fonction $f : t \mapsto b \cdot \gamma(t)$ est constante. On a :*

$$f'(t) = b \cdot \gamma'(t) = 0.$$

La deuxième égalité vient du fait que le vecteur binormal est orthogonal au vecteur tangent et donc à $\gamma'(t)$. Donc la fonction f est constante notons λ cette constante. Ainsi tous les points de $(\gamma(t))$ de la courbe C satisfont :

$$\gamma(t) \cdot b = \lambda,$$

ils sont donc dans le plan d'équation

$$(x, y, z) \cdot b = \lambda.$$

Exercice 5. Trouver une courbe élémentaire lisse $C \subset \mathbb{R}^3$ de longueur $L < 2\pi$ dont la courbure est constante égale à 1 et la torsion est constante égale à 0. Existe-t-il une telle courbe si $L \geq 2\pi$?

Correction: *On peut prendre l'arc de cercle unité paramétré par*

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma\colon & [0, L] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), 0). \end{array}$$

Il est clair que la torsion est nulle (la courbe est planaire) et que la courbure est 1 (on a déjà fait le calcul plusieurs fois). La fonction γ est clairement injective car $L < 2\pi$.

On va montrer qu'il n'est pas possible de trouver une courbe élémentaire de courbure constante égale à 1, de torsion nulle et de longueur $L \geq 2\pi$. Supposons qu'on trouve une telle courbe C. Donnons nous $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ un paramétrage normale de C. Les restrictions de γ $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ sont des courbes C_1 et C_2 de longueur $\frac{3\pi}{2}$ de courbure constante égale à 1 et de torsion constante égale à 0. D'après le début de la question on sait que de telles courbes peuvent être obtenues par des arcs de cercles de rayon 1 et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Or par le théorème d'unicité du cours, on peut conclure que C_1 et C_2 sont des arcs de cercles de rayons 1 et d'angles $\frac{3\pi}{2}$. Quitte à composer par une isométrie de $\mathbb{R}^3$, on peut supposer que C_1 est en fait la courbe paramétrée par

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma_1\colon & \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), 0). \end{array}$$

Les courbes C_1 et C_2 s'intersectent. Leur intersection est $C\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Cette courbe est elle-même un arc de cercle de rayon 1 et d'angle π. Ainsi, C_1 et C_2 sont sur le même cercle. La courbe C_2 est donc paramétrée par :

$$\begin{array}{rcrcl} \gamma_2\colon & \left[\frac{\pi}{2}, 2\pi\right] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t), 0). \end{array}$$

Or $\gamma(2\pi) = \gamma_2(2\pi) = \gamma_1(0) = \gamma(0)$. Donc γ n'est pas injective et donc C n'est pas une courbe élémentaire.

Exercice 6. Trouver une courbe élémentaire lisse $C \subset \mathbb{R}^3$ de longueur $L > 0$, de courbure constante égale à A et de torsion constante égale à B, pour $L, A \in \mathbb{R}_{>0}$ et $B \in \mathbb{R}^*$ quelconques.

Correction: *On considère l'hélice paramétrée par*

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & [0,l] & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & (a\cos(t), a\sin(t), bt). \end{array}$$

On calcule la courbure et la torsion. Pour cela on calcule les dérivées de γ :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (-a\sin(t), a\cos(t), b), \\ \gamma''(t) &= (-a\cos(t), -a\sin(t), 0), \\ \gamma'''(t) &= (a\sin(t), -a\cos(t), 0). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)) &= \det \begin{bmatrix} -a\sin(t) & -a\cos(t) & a\cos(t) \\ -a\cos(t) & -a\sin(t) & -a\cos(t) \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= ba^2, \\ |\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2 &= |(ba\sin(t), -ba\cos(t), a^2)|^2 \\ &= a^2(a^2+b^2). \end{aligned}$$

On a donc pour $P = \gamma(t)$

$$\begin{aligned} \kappa(P) &= \frac{\sqrt{a^2(a^2+b^2)}}{|\gamma'(t)|^3} = \frac{\sqrt{a^2(a^2+b^2)}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a|}{a^2+b^2} \\ \tau(P) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{|\gamma'(t) \times \gamma''(t)|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Pour avoir une courbure constante égale à A et une torsion constante égale à B il suffit d'avoir

$$A = \frac{|a|}{a^2+b^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

On peut alors poser :

$$a = \frac{A}{A^2+B^2} \qquad b = \frac{B}{A^2+B^2}.$$

La longueur de la courbe est facile à calculer, en effet $|\gamma'(t)| = \sqrt{a^2+b^2}$. La courbe a donc longueur $l\sqrt{a^2+b^2}$. Il suffit donc de poser $l = \frac{L}{\sqrt{a^2+b^2}} = L\sqrt{A^2+B^2}$. Finalement la courbe que l'on cherchait a pour paramétrage :

$$\begin{array}{rccl} \gamma\colon & \left[0, L\sqrt{A^2+B^2}\right] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \frac{1}{A^2+B^2}(A\cos(t), A\sin(t), Bt). \end{array}$$

Il est clair que γ est injective (on peut par exemple regarder la dernière coordonnée).

Exercice 7. Soit U un ouvert connexe par arc d'une sphère $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$. Démontrer que si U contient deux point antipodaux de Σ alors $U \subset \mathbb{R}^3$ n'est pas une surface élémentaire.

Correction: *Pour simplifier, on suppose que Σ est la sphère unité (il suffit de dilater et translater pour obtenir le cas général).*

On va tout d'abord montrer que si V est un ouvert de Σ est aussi une surface élémentaire, alors V ne contient aucun point de $\Sigma \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$.

En effet, supposons que $(\cos(t_0), \sin(t_0), 0)$ appartienne à V. Comme V est ouvert, on peut trouver $1 > \epsilon > 0$, tel que

$$\Big\{(\sqrt{1-\epsilon^2}\cos(t_0), \sqrt{1-\epsilon^2}\sin(t_0), \epsilon) \in V (\sqrt{1-\epsilon^2}\cos(t_0), \sqrt{1-\epsilon^2}\sin(t_0), -\epsilon) \in V$$

V ne peut donc pas être une surface élémentaire de paramétrage $z = f(x,y)$.

On sait que U contient deux point antipodaux $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $P_2 = (-x_1, -y_1, -z_1)$. Si l'un de ces points (donc les deux) est dans le plan $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, on est sûr que U n'est pas une surface élémentaire.

Si ces deux point antipodaux ne sont pas dans le plan plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$, on a $z_1 \neq 0$. Mais U étant connexe par arc, on peut trouver un chemin continu de P_1 à P_2. Ce chemin passe nécessairement par le plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ (théorème des valeurs intermédiaires). On trouve donc un point dans $U \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$. Et donc U n'est pas une surface élémentaire de paramétrage $z = f(x, y)$.

Plus généralement, choisissons un autre système de coordonnés, c'est à dire une base (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $(b_1, b_2, b_3) = \rho(e_1, e_2, e_3)$ où ρ est une rotation euclidienne. Avoir un paramétrage de U dans ce système de coordonnées est essentiellement la même chose qu'avoir un paramétrage de $\rho^{-1}(U)$ de la forme $z = f(x, y)$. Or les hypothèses sur U sont invariante par rotation euclidienne. Ainsi U n'admet pas de paramétrage élémentaire et n'est donc pas une surface élémentaire.