Série 1 – Correction (corrigée le 26/02/2020)

Exercice 1. Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble de parties de X.

(1) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une tribu, alors $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles.

Correction : *On suppose que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X. On a donc $X \in A$ et si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$. Il s'agit de montrer que si $A, B \in \mathcal{A}$, alors $A \cup B \in \mathcal{A}$. On considère $C \in \mathcal{A}^\omega$ définie par $C_0 = A, C_1 = B$ et $C_n = \emptyset = X^c$ pour tout $n \geq 2$. On a $\bigcup_{n\in\omega} C_n = A \cup B$. De plus comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $\bigcup_{n\in\omega} C_n \in \mathcal{A}$, donc $A \cup B \in \mathcal{A}$. Ainsi, $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles.*

(2) Montrer que si $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles, alors $\mathcal{A}$ est un anneau d'ensembles.

Correction : *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre d'ensemble. Il s'agit de montrer que $\mathcal{A}$ est non-vide — cela fait partie de la définition d'algèbre — et que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, $A \setminus B \in \mathcal{A}$. On considère donc $A, B \in \mathcal{A}$. On a $A \setminus B = (A^c \cup B)^c$. Comme $\mathcal{A}$ est une algèbre, $A^c \in \mathcal{A}$, puis $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ et enfin $A \setminus B \in \mathcal{A}$.*

(3) Donner un exemple d'anneau d'ensembles qui n'est pas une algèbre d'ensembles.

Correction : *On peut prendre, $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$: c'est une algèbre d'ensembles sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur $\mathbb{R}$, car $\mathbb{R} \notin \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. De manière générale, un anneau d'ensembles $\mathcal{A}$ sur X est une algèbre d'ensemble si et seulement si $X \in \mathcal{A}$.*

(4) Soit $X = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ ou } X \setminus A \text{ est fini}\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'ensembles sur X mais pas une tribu.

Correction : *L'ensemble vide est fini par définition, donc $\mathbb{Z} \in \mathcal{A}$ car $\mathbb{Z}^c = \emptyset$.*

Soit $A \in \mathcal{A}$, de deux choses l'une : soit A est fini soit A^c est fini. Si A est fini alors $A = (A^c)^c$ est fini et donc $A^c \in \mathcal{A}$. Si A^c est fini alors $A^c \in \mathcal{A}$.

Soient maintenant $A, B \in \mathcal{A}$, on considère deux cas : A et B finis, et A^c ou B^c (ou les deux) fini. Si A et B sont finis, $A \cup B$ est fini et donc $A \cup B \in \mathcal{A}$. On passe au deuxième cas. On a $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et cet ensemble est manifestement fini, donc $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ainsi, $\mathcal{A}$ est une algèbre.

Pour tout $n \in \omega$, le singleton $\{n\}$ est fini donc $\{n\} \in \mathcal{A}$. Mais $\omega = \bigcup_{n\in\omega}\{n\}$ n'est pas fini et son complémentaire dans $\mathbb{Z}$ non plus, donc $\omega \notin \mathcal{A}$ et donc $\mathcal{A}$ n'est pas une tribu.

Exercice 2. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Montrer l'implication $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

Correction : *Soient $A, B \in \mathcal{A}$. On a : $A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Comme $\mathcal{A}$ est un anneau, $A \cup B$, $(A \setminus B)$ et $(B \setminus A)$ sont dans $\mathcal{A}$, on en déduit que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ et finalement que $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

Exercice 3. Dans cet exercice, on souhaite montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ est engendrée par la famille $\mathcal{F} = \{\mathbb{R}_{>a} \mid a \in \mathbb{Q}\}$, i.e. que $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \sigma(\mathcal{F})$.

(1) Montrer que tout sous-ensemble de la forme $\mathbb{R}_{<b}$ avec $b \in \mathbb{Q}$ est dans $\sigma(\mathcal{F})$.

Correction : *Soit $b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \omega$. L'ensemble $\mathbb{R}_{>\left(b-\frac{1}{n+1}\right)}$ est dans $\mathcal{F}$. Comme $\sigma(\mathcal{F})$ est stable par passage au complémentaire, $\mathbb{R}_{\leq\left(b-\frac{1}{n+1}\right)}$ est dans $\sigma(\mathcal{F})$. Comme ceci est vrai pour tout $n \in \omega$, On en déduit que*

$$\mathbb{R}_{<b} = \bigcup_{n\in\omega} \mathbb{R}_{\leq\left(b-\frac{1}{n+1}\right)} \in \sigma(\mathcal{F}).$$

(2) En déduire que $\sigma(\mathcal{F})$ contient tous les intervalles ouverts bornés à bornes rationnelles.

Correction : *Soient $a < b$ deux rationnels, l'intervalle $]a; b[= \mathbb{R}_{<b} \cap \mathbb{R}_{>a}$, or on sait que $\mathbb{R}_{<b}$ et $\mathbb{R}_{>a}$ sont dans $\sigma(\mathcal{F})$, donc $]a; b[\in \mathcal{F}$.*

(3) Soit W un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$W = \bigcup_{\substack{]a;b[\subset W,\\ a,b\in\mathbb{Q}}}]a; b[.$$

On pourra utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction : *Notons $V = \bigcup_{\substack{]a;b[\subset W,\\ a,b\in\mathbb{Q}}}]a; b[$. On a clairement $V \subseteq W$. On veut montrer l'autre inclusion. Soit $x \in W$, comme W est ouvert, il est voisinage de chacun de ses points, en particulier de x. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon; x+\epsilon[\subseteq W$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut se donner $a, b \in \mathbb{Q}$ tel que*

$$x - \epsilon < a < x < b < x + \epsilon.$$

On a donc $x \in]a; b[\subseteq]x - \epsilon; x + \epsilon[\subseteq W$. De plus, on a clairement $]a; b[\subseteq V$, donc $x \in V$. Ceci montre que $W \subseteq V$ et finalement que $W = V$.

(4) En déduire que tout ouvert W de $\mathbb{R}$ appartient à $\sigma(\mathcal{F})$.

Correction : *D'après la question précédente, tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une union d'intervalles ouvert à bornes rationnelles. Il n'y a qu'un nombre dénombrable de tels intervalles. De plus on sait que chacun de ses intervalles est dans $\sigma(\mathcal{F})$, comme $\sigma(\mathcal{F})$ est une tribu, elle est stable par union dénombrable et donc tout ouvert de $\mathbb{R}$ est dans $\sigma(\mathcal{F})$.*

(5) Conclure.

Correction : *On vient de montrer que la tribu $\sigma(\mathcal{F})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$ donc on a $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Inversement, tous les ensembles dans $\mathcal{F}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}_\mathbb{R}$, et finalement $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_\mathbb{R}$.*

Exercice 4. Soient X un ensemble et $h\colon X \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ une application. Montrer que l'application $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ définie par $\mu(A) = \sum_{x\in A} h(x)$ est une mesure.

Correction : *On rappelle que la notion de somme positive utilisée ici est donnée par la première définition du cours. Avec cette définition, on a bien $\mu(\emptyset) = 0$. Il s'agit maintenant de vérifier que si $A \in \mathcal{P}(X)^\omega$ est disjoint, alors*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n).$$

Par définition, on a :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sup_{\substack{F\subseteq\bigcup_{n\in\omega} A_n\\ F \text{ fini}}} \left\{\sum_{x\in F} f(x)\right\}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\omega}\mu(A_n) &= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sum_{n\in E}\mu(A_n)\right\}\\
&= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sum_{n\in E}\sup_{\substack{F_n\subseteq A_n\\ F_n \text{ fini}}}\left\{\sum_{x\in F_n} f(x)\right\}\right\}\\
&= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sup_{\substack{(F_n)_{n\in E}\\ F_n\subseteq A_n \forall n\in E\\ F_n \text{ fini } \forall n\in E}}\left\{\sum_{n\in E}\sum_{x\in F_n} f(x)\right\}\right\}\\
&= \sup_{\substack{E\subseteq\omega\\ E \text{ fini}}}\left\{\sup_{\substack{(F_n)_{n\in E}\\ F_n\subseteq A_n \forall n\in E\\ F_n \text{ fini } \forall n\in E}}\left\{\sum_{x\in\bigcup_{n\in E}F_n} f(x)\right\}\right\}.
\end{aligned}$$

La troisième égalité est vraie car on fait commuter un somme finie *et un* sup*. Si E est un sous-ensemble fini de ω et si pour tout élément de E, F_n est un sous-ensemble fini de A_n, $\bigcup_{n\in E} F_n$ est un sous-ensemble fini de $\bigcup_{n\in\omega} A_n$. Ceci implique que*

$$\sum_{n\in\omega}\mu(A_n)\leq\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}A_n\right)$$

Réciproquement,

Si F est un sous-ensemble fini de $\bigcup_{n\in\omega} A_n$, en posant $F_n = A_n\cap F$ et $E=\{n\in\omega : F_n\neq\emptyset\}$, on a $F=\bigcup_{n\in E} F_n$ et les ensembles E et F_n sont finis. Ceci montre que

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}A_n\right)\leq\sum_{n\in\omega}\mu(A_n).$$

Finalement,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\omega}A_n\right)=\sum_{n\in\omega}\mu(A_n).$$

Série 2 – Correction (corrigée le 04/03/2020)

Exercice 1. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'on peut recouvrir $\mathbb{Q}$ par une union infinie d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est inférieure strictement à ϵ.

Correction : *On fixe $\epsilon > 0$ et une bijection $\varphi\colon \omega \to \mathbb{Q}$. On considère*

$$W = \bigcup_{n\in\omega} \left]\varphi(n) - \frac{\epsilon}{4^{n+1}}, \varphi(n) + \frac{\epsilon}{4^{n+1}}\right[.$$

L'ensemble W est bien une union d'intervalles ouverts et contient $\mathbb{Q}$. La somme des longueurs des intervalles est

$$2\epsilon \sum_{n\in\omega} \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{2\epsilon}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Exercice 2. Soit X un ensemble et $\varphi\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ valant 0 sur l'ensemble vide et 1 sur tout autre partie de X.

(1) Montrer que φ est une mesure extérieure.

Correction : *On a bien $\varphi(\emptyset) = 0$, pour montrer que φ est une mesure extérieure, il suffit de montrer qu'elle est croissante et qu'elle satisfait la propriété de σ-sous-additivité. La croissance est triviale. Pour la σ-sous-additivité, on se donne $A_n \in \mathcal{P}(X)^\omega$. De deux choses l'une : soit tous les A_n sont vides auquel cas, $\bigcup_{n\in\omega} A_n = \emptyset$. On a alors*

$$0 = \varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n) = \sum_{n\in\omega} 0 = 0$$

et donc $\varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$. Sinon l'un des A_n est non-vide, disons A_{n_0} et alors :

$$1 = \varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \varphi(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$$

et donc $\varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega}$.

(2) Est-ce que φ est une mesure ?

Correction : *La fonction φ est une mesure si et seulement si X a au plus un élément. En effet dans ce cas, c'est une conséquence de l'exercice 4 de la série 1. Si X a au moins 2 éléments, disons x et y, on a : $\{x, y\} = \{x\} \sqcup \{y\}$, mais*

$$1 = \varphi(\{x, y\}) \neq \varphi(\{x\}) + \varphi(\{y\}) = 1 + 1 = 2.$$

(3) Quels sont les ensembles φ-mesurables ?

Correction : *Les seules ensembles φ-mesurables sont X et l'ensemble vide. Montrons le ! Pour toute partie B de X, on a*

$$\varphi(B \setminus \emptyset) + \varphi(B \cap \emptyset) = \varphi(B) + \varphi(\emptyset) = \varphi(B) \quad \text{et}$$
$$\varphi(B \setminus X) + \varphi(B \cap X) = \varphi(\emptyset) + \varphi(B) = \varphi(B).$$

Donc X et $\emptyset$ sont φ-mesurable. Supposons maintenant que A ne soit ni X ni $\emptyset$. On peut donc trouver $x \in A$ et $y \in A^c$. On considère $B = \{x, y\}$. On a

$$\varphi(B \setminus A) + \varphi(B \cap A) = \varphi(\{y\}) + \varphi(\{x\}) = 2 \neq \varphi(B).$$

et donc A n'est pas mesurable.

Exercice 3. Soit $\varphi\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0;+\infty]$ valant 0 sur les parties bornées de $\mathbb{R}^n$ et $+\infty$ sur les autres. Est-ce que φ est une mesure extérieure ?

Correction : *Non, ce n'est pas une mesure extérieur car cette fonction ne satisfait pas la σ-sous-additivité. On commence par munir $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne. Pour $k \in \omega$, on considère $B_k = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leq k\}$. Chacun de ses ensembles est borné et leur union est $\mathbb{R}^n$ tout entier, on a donc*

$$\infty = \varphi\left(\bigcup_{k\in\omega} B_k\right) \not\leq \sum_{k\in\omega} \varphi(B_k) = 0.$$

Exercice 4. Soit X un ensemble et $\{\varphi_i\colon \mathcal{P}(X) \to [0;+\infty]\}_{i\in I}$ un ensemble de mesures extérieures sur X.

(1) Montrer que $\psi := \sup_{i\in I} \varphi_i$ est une mesure extérieure sur X.

Correction : *On a bien $\psi(\emptyset) = 0$. Soient $A \subseteq B$ deux parties de X, on a pour tout $i \in I$, $\varphi_i(A) \leq \varphi_i(B) \leq \psi(B)$, donc $\psi(A) \leq \psi(B)$. Montrons maintenant la σ-sous-additivité. Soient $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{P}(X)^\omega$. Pour tout i, on a :*

$$\psi_i\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \psi_i(A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n),$$

Donc $\varphi\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$. Et donc φ est bien une mesure extérieure.

(2) Montrer que $\rho := \inf_{i\in I} \varphi_i$ est croissante pour l'inclusion.

Correction : *Soient $A \subseteq B$ deux parties de X, on a pour tout $i \in I$, $\rho(A) \leq \varphi_i(A) \leq \varphi_i(B)$, donc, $\rho(A) \leq \rho(B)$.*

(3) Dans le cas particulier $X = \omega$, $I = \omega$, et

$$\varphi_i(A) := \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset, \\ \dfrac{1}{i+1} & \text{si } A \text{ est fini non vide,} \\ +\infty & \text{si } A \text{ est infini,} \end{cases}$$

montrer que φ_i est une mesure extérieure pour tout $i \in \omega$ mais $\rho := \inf_{i\in I} \varphi_i$ n'est pas une mesure extérieure.

Correction : *On fixe un $i \in \omega$, $\varphi_i(\emptyset) = 0$ et φ_i est clairement croissante pour l'inclusion. Montrons qu'elle aussi σ-sous-additive. Soient $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{P}(X)^\omega$. On distingue trois cas : l'ensemble $A := \bigcup_{n\in\omega} A_n$ est soit vide, soit fini non vide soit infini.*

— *Si A est vide et tous les A_n sont vide et alors :*

$$\varphi_i(A) = 0 = \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n).$$

— *Si A est fini non vide, au moins l'un des A_n, disons A_{n_0}, est fini non-vide. On a alors :*

$$\varphi_i(A) = \frac{1}{i+1} = \varphi_i(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n).$$

— *Enfin, si A est infini, soit il existe n_0 tel que A_{n_0} est infini et alors :*

$$\varphi_i(A) = +\infty = \varphi_i(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n),$$

soit il existe une infinité dénombrable d'entier n tel que A_n est non-vide, notons ces indices $(n_k)_{k\in\omega}$. On a alors :

$$\sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n) \geq \sum_{k\in\omega} \varphi_i(A_{n_k}) = \sum_{k\in\omega} \frac{1}{i+1} = +\infty = \varphi_i(A).$$

Ainsi dans tous les cas, on a bien $\varphi_i(A) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi_i(A_n)$ et donc φ_i est σ-sous-additive.

Montrons maintenant que ρ n'est pas une mesure extérieure. Pour $n \in \omega$, on pose $A_n = \{n\}$. Pour tout $n \in \omega$, on a $\rho(A_n) = \inf_{i\in I} \varphi_i(A_n) = \inf_{i\in I} \frac{1}{i+1} = 0$ et $\rho(\omega) = \inf_{i\in I} \varphi_i(\omega) = \inf_{i\in I} +\infty = +\infty$. Ainsi

$$+\infty = \rho\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \not\leq \sum_{n\in\omega} \rho(A_n) = 0.$$

Et ainsi ρ n'est pas une mesure extérieure.

Exercice 5. Soit $d \in \omega\backslash\{0\}$ fixé. On rappelle que si $B \subset \mathbb{R}^d$, son *diamètre* est $\mathrm{diam}(B) := \sup_{a,b\in B} \|a-b\|$, où $\|.\|$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^d$.

Soit $s \in [0, +\infty]$ et $\delta \in]0, +\infty]$. Pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{R}_\delta(A)$ l'ensemble des recouvrements au plus dénombrables de A par des parties ouvertes de $\mathbb{R}^d$ de diamètre inférieur à δ.

On définit alors la *mesure extérieure de Hausdorff de dimension s et de pas δ* par

$$H^s_\delta(A) := \inf_{(F_i)_{i\in I}\in\mathcal{R}_\delta(A)} \sum_{i\in I} (\mathrm{diam}(F_i))^s$$

pour toute partie A de $\mathbb{R}^d$.

(1) Montrer que H^s_δ est bien une mesure extérieure.

Correction : *On a bien $H^s_\delta(\emptyset) = 0$ car on peut recouvrir $\emptyset$ par le recouvrement vide $(F_i)_{i\in\emptyset}$. La fonction H^s_δ est croissante pour l'inclusion car si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^d$, tout recouvrement de B est un recouvrement de A et donc $H^s_\delta(A) \leq H^s_\delta(B)$. Montrons que H^s_δ est σ-sous-additive.*

Soit $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$. Pour chaque n on choisit $(F^n_i)_{i\in I_n} \in \mathcal{R}_\delta(A_n)$. La réunion $(F_i)_{i\in I}$ des F^n est un recouvrement de la réunion des A_n. On a donc :

$$H^s_\delta\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{k\in I} (\mathrm{diam}(F_k))^s = \sum_{n\in\omega}\sum_{i\in I_n} (\mathrm{diam}(F^n_i))^s.$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas des F^n, on a bien

$$H^s_\delta\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) \leq \sum_{n\in\omega} H^s_\delta(A_n).$$

Ainsi H^s_δ est bien une mesure extérieure.

On peut aussi utiliser la Proposition 3 du cours avec la fonction $\rho\colon \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \mathrm{diam}(A)^s$, restreinte aux ensembles de diamètre inférieur à δ.

(2) Montrer que

$$\forall s \geq 0,\ \forall A \subset \mathbb{R}^d,\ \forall \delta, \epsilon > 0, \quad \delta < \epsilon \Longrightarrow H^s_\delta(A) \geq H^s_\epsilon(A).$$

Correction : *On fixe $s \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$ et $\epsilon > \delta$. Soit $(F_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_\delta(A)$, chacun des éléments de F a un diamètre plus petit que δ, donc que ϵ, donc $F \in \mathcal{R}_\epsilon(A)$, ainsi :*

$$H^s_\epsilon(A) \leq \sum_{i\in I} (\mathrm{diam}(F_n))^s.$$

Comme le terme de gauche ne dépend pas de F, on a bien, en prenant l'infimum sur les $F \in \mathcal{R}_\delta(A)$:

$$H^s_\epsilon(A) \leq H^s_\delta(A).$$

(3) En déduire (en se servant de l'exercice précédent) que H^s, la fonction sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$H^s(A) := \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} H^s_\delta(A),$$

est bien définie et que c'est une mesure extérieure. On l'appelle la *mesure extérieure de Hausdorff de dimension s.*

Correction : *La question précédente nous dit que pour tout A et tout s, la fonction $]0,+\infty[\ni \delta \mapsto H^s_\delta(A)$ est décroissante ceci implique (voir le lemme à la fin) non seulement que*

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} H^s_\delta(A)$$

est bien définie (dans $\bar{\mathbb{R}}_+$), mais aussi que

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} H^s_\delta(A) = \sup_{\delta \in]0,+\infty[} H^s_\delta(A).$$

L'exercice précédent nous assure alors que H^s est une mesure extérieure.

Lemme. Soit $f\colon\ ]0,+\infty[\to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ une fonction décroissante. Alors

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \sup\{f(x)\,|x\in]0,+\infty[\} = \sup f.$$

Démonstration. De deux choses l'une : soit f est bornée, soit f est non-bornée.

Si f est non bornée, par définition, $\sup f = +\infty$. Montrons que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Soit $M > 0$, il existe $x_0 \in]0,+\infty[$, tel que $f(x_0) > M$. Comme f est décroissante, pour tout $x \in]0,+\infty[$ tel que $|x-0| < x_0$, $f(x) > M$, et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Si f est bornée, alors par définition, $\ell := \sup f$ est fini. Montrons que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \ell$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe $x_0 \in]0,+\infty[$, tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme f est décroissante, pour tout $x \in]0,+\infty[$ tel que $|x-0| < x_0$, $\ell < f(x) < f(x_0)\ell - \epsilon$, et donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \ell$. □

(4) Pour $s = 0$, montrer que H^0 coïncide avec la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Correction : *Supposons que $X \subseteq \mathbb{R}^d$ est fini et notons $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ses éléments et $\epsilon = \min_{1\leq i<j\leq n} ||x_i - x_j||$. Pour tout δ, la collection $\{x_1\},\ldots,\{x_n\}$ est un recouvrement dans $\mathcal{R}_\delta(X)$, ceci montre que $H^0_\delta(X) \leq n$ pour tout δ. Pour $\delta < \epsilon$, si $F \in \mathcal{R}_\delta$, tout ensemble de F contient au plus un élément de X, donc F est constitué d'au moins n partie de $\mathbb{R}^d$ et donc $H^0_\delta(X) \geq n$. Ceci montre que pour δ suffisament petit $H^0_\delta(X) = n$ et donc que $H^0(X) = n$.*

Si X est un ensemble infini, il contient des ensembles finis avec un nombre arbitrairement grand d'éléments. Par croissance de H^0, on a $H^0(X) \geq n$ pour tout $n \in \omega$ et donc $H^0(X) = +\infty$. C'est donc bien la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 6. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et φ_μ la mesure extérieure définie par

$$\varphi_\mu(B) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\ B \subset A\}, \quad \forall B \in \mathcal{P}(X).$$

Montrer que tout élément de la tribu $\mathcal{A}$ est φ_μ-mesurable.

Correction : *Par construction, φ_μ est une mesure extérieure. On a donc pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X)$:*

$$\varphi_\mu(B) \leq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B \setminus A).$$

Il suffit donc de montrer que tout $A \in mathcal A$ et tout B in $\mathcal{P}(X)$,

$$\varphi_\mu(B) \geq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B \setminus A).$$

Soit $C \in \mathcal{A}$ tel que $B \subseteq C$. L'ensemble $A\cap C$ est dans $\mathcal{A}$ et $A\cap B \subseteq A \cap C$, donc $\varphi_\mu(A\cap B) \leq \mu(A\cap C)$. De même, $C\setminus A \in \mathcal{A}$ et $B \setminus A \subseteq C \setminus A$, donc $\varphi_\mu(B\setminus A) \leq \mu(C\setminus A)$.

De plus comme μ est une mesure, $\mu(C) = \mu(C\cap A) + \mu(C\setminus A)$. ainsi $\mu(c) \geq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B\setminus A)$. Comme le terme de droite ne dépend pas de C, on a

$$\varphi_\mu(B) \geq \varphi_\mu(A\cap B) + \varphi_\mu(B \setminus A).$$

Série 3 – Correction (corrigée le 11/03/2020)

Exercice 1. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x-1 & \text{si } x<0, \\ 0 & \text{si } x=0, \\ x+1 & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array}$$

et la famille $\mathcal{F} = \{]a,b[| a \leq b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

(1) Justifier qu'on peut constuire une mesure extérieure μ sur $\mathbb{R}$ à partir de

$$\begin{array}{rccl} \rho_f\colon & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ & \emptyset & \mapsto & 0 \\ &]a,b[& \mapsto & f(b)-f(a). \end{array}$$

Correction : *La famille $\mathcal{F}$ contient le vide et la fonction ρ_f est positive. Ainsi, d'après la Proposition 3 du cours, on peut induire une mesure extérieur sur $\mathbb{R}$ en définissant pour tout $X \subseteq \mathbb{R}$:*

$$\mu(X) = \inf_{(Y_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_F(X)} \sum_{i\in I} \rho_f(Y_i).$$

(2) Calculer $\mu(]0,1]), \mu([0,1]), \mu(\{0\}), \mu([-1,0[)$ et $\mu([-1,0])$.

Correction :

— *Montrons que $\mu(]0,1]) = 1$.*
Soit $\epsilon > 0$. On considère $(X_n^\epsilon)_{n\in\omega}$ avec $X_n^\epsilon = \left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2^n}\right[$. La famille $(X_n^\epsilon)_{n\in\omega}$ est bien un recouvrement de $]0,1]$. D'autre part,

$$\sum_{n\in\omega} \rho_f(X_n^\epsilon) = \sum_{n\in\omega} \frac{1}{n+1} + \frac{\epsilon}{2^n} - \frac{1}{n+1} = 1 + 2\epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ on a $\mu(]0,1]) \leq 1$.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de $]0,1]$ par des intervalles ouverts. Soit $\epsilon > 0$, $(X_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $[\epsilon, 1]$ par des intervalles ouverts. Comme $[\epsilon,1]$ est compacte on peut en extraire un sous recouvrement fini $(X_i)_{i\in J}$. On considère la fonction $f_\epsilon = \sum_{i\in J} \chi_{X_i}$. C'est une somme finie de fonctions localement Riemann-intégrable, elle est donc localement Riemann-intégrable. De plus, on a $f_\epsilon \geq \chi_{[\epsilon,1]}$. Or pour tout $i \in J$, on a $\rho(X_j) \geq \int_\epsilon^1 \chi_{X_j}$. Ainsi, on a :

$$\sum_{i\in I} \rho_f(X_i) \geq \sum_{i\in J} \rho_f(X_i) \geq \int_\epsilon^1 \sum_{i\in J} \chi_{X_j} \geq \int_\epsilon^1 \chi_{[\epsilon,1]} = 1-\epsilon.$$

Ceci montre que $\mu(]0,1]) \geq 1-\epsilon$ et comme ϵ était quelconque, on $\mu(]0,1]) \geq 1$ et finalement $\mu(]0,1]) = 1$.

— *Montrons que $\mu(\{0\}) = 2$.*
Soit $\epsilon > 0$, on peut recouvrir $\{0\}$ avec l'intervalle $\left]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]$, on a $\rho_f\left(\left]-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}\right]\right) = 2 + 2\epsilon$, donc $\mu(\{0\}) \leq 2 + 2\epsilon$. Comme ceci est vrai pour tout ϵ, on a $\mu(\{0\}) \leq 2$.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de $\{0\}$ par des intervalles ouverts. Il existe un $i_0 \in I$ tel que $0 \in X_{i_0}$. Notons $X_{i_0} =]a,b[$ avec $a < b$, on a $\rho_f(X_{i_0}) = 2 + b - a \geq 2$, donc $\mu(\{0\}) \geq 2$ et finalement $\mu(\{0\}) = 2$.

— *Montrons que $\mu([0,1]) = 3$.*
Par sous-additivité de μ, on a $\mu([0,1]) \leq \mu(\{0\}) + \mu(]0,1]) = 3$. On procède un peu comme précédemment. On se donne $(X_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[0,1]$ par des intervalles ouverts. Par compacité on peut se donner $J \subseteq I$ fini tel que $(X_i)_{i\in J}$ est un recouvrement de $[0,1]$. fini. Pour $i \in I$, si on note $X_i =]a_i, b_i[$, On a :

$$\rho_f(X_i) = \begin{cases} b_i - a_i & \text{si } 0 < a_i \leq b_i, \\ b_i - a_i + 1 & \text{si } 0 = a_i < b_i, \\ b_i - a_i + 2 & \text{si } a_i < 0 < b_i, \\ b_i - a_i + 1 & \text{si } a_i < b_i = 0, \\ b_i - a_i & \text{si } a_i \leq b_i < 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, $\rho_f(X_i) \geq \int_0^1 \chi_{X_i}$ et $\rho_f(X_i) \geq 2 + \int_0^1 \chi_{X_i}$ si $0 \in X_i$. Comme $0 \in [0,1]$, il existe un i_0 tel que $0 \in X_{i_0}$. On a donc

$$\sum_{i\in I} \rho_f(X_i) \geq \sum_{i\in J} \rho_f(X_i) \geq \rho_f(X_{i_0}) \sum_{i\in J\setminus\{i_0\}} \rho_f(X_i) \geq 2 + \sum_{i\in J} \int_0^1 \chi_{X_i} \geq 2 + \sum \int_0^1 \chi_{[0,1]} \geq 3.$$

Ce qui montre que $\mu([0,1]) \geq 3$ et donc que $\mu([0,1]) = 3$.

— *On a $\mu([-1,0[) = 1$ et $\mu([-1,0]) = 3$ et les preuves sont analogues.*

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesuré, $(\mu_i)_{i\in\omega}$ une famille de mesures sur X et $(a_i)_{i\in\omega}$ une suite de réels positifs. Montrer que la fonction $\mu\colon \mathcal{T} \to \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ définie par

$$\mu(A) := \sum_{i\in\omega} a_i \mu_i(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{T}$ est une mesure sur $(X, \mathcal{T})$.

Correction : *On a $\mu(\emptyset) = \sum_{i\in\omega} a_i\mu_i(\emptyset) = \sum_{i\in\omega} 0 = 0$. On se donne $A \in \mathcal{T}^\omega$ disjoint. On souhaite montrer que $\mu\left(\bigsqcup_{n\in\omega}\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$ c'est à dire que :*

$$\sum_{i\in\omega}\sum_{n\in\omega} a_i\mu_i(A_n) = \sum_{n\in\omega}\sum_{i\in\omega} a_i\mu_i(A_n).$$

Ceci est donné par le lemme suivant :

Lemme (Théorème de Fubini discret)**.** Soit $(x_{ij})_{(i,j)\in\omega^2} \in \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ alors :

$$\sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij} = \sum_{j\in\omega}\sum_{i\in\omega} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}.$$

Démonstration. Par symétrie, il suffit de montrer que $\sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}$.

Soit $X \subset \omega^2$ un ensemble fini. Il existe $I, J \subset \omega$ finis tel que $X \subseteq I \times J$. On a

$$\sum_{(i,j)\in X} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in I\times J} x_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ij} \leq \sum_{i\in I}\sum_{j\in\omega} x_{ij} \leq \sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij}.$$

Et donc

$$\sum_{(i,j)\in\omega^2} \leq \sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij}.$$

Soient $I \subseteq \omega$ fini et pour et pour tout $i \in I$, $J_i \subseteq \omega$ fini.

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} x_{ij} = \sum_{(i,j)\in\bigsqcup_{i\in I}\{i\}\times J_i} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}$$

On en déduit :

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in\omega} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}$$

Puis que

$$\sum_{i\in\omega}\sum_{j\in\omega} x_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\omega^2} x_{ij}.$$

□

Exercice 3. Soit $\mathcal{T}$ la famille des intervalles fermés de $I = [0,1]$ et μ la mesure extérieure sur I induite par l'application

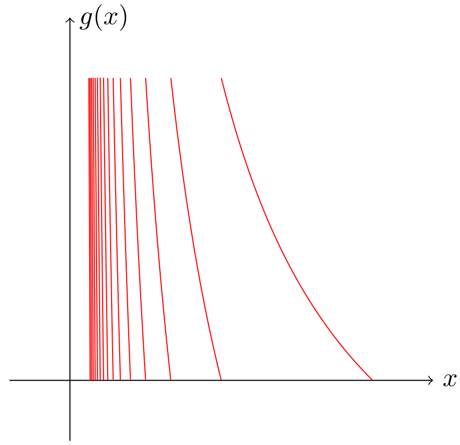
$$\rho\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ \emptyset & \mapsto & 0 \\ [\alpha,\beta] & \mapsto & \ln\left(\frac{1+\beta}{1+\alpha}\right). \end{array}$$

On s'intéresse à la fonction

$$g\colon \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & [0,1] \\ 0 & \mapsto & 0 \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor. \end{array}$$

(1) Tracer le graphe de g.

Correction :



(2) Soit $\alpha \leq \beta$, calculer $g^{-1}([\alpha,\beta])$.

Correction : *On a*

$$g^{-1}([\alpha,\beta]) = \bigcup_{n\in\omega} \left[\frac{1}{n+1+\beta}, \frac{1}{n+1+\alpha}\right]$$

En effet si, $x \in \left[\frac{1}{n+1+\beta}, \frac{1}{n+1+\alpha}\right]$, *on a* $\alpha \leq g(x) \leq \beta$. *Réciproquement, si* $x \in g^{-1}([\alpha,\beta])$, *il existe* $y \in [\alpha,\beta]$ *et* $n \in \omega$ *tel que* $y = \frac{1}{x} - (n+1)$ *et donc* $x \in \left[\frac{1}{n+1+\beta}, \frac{1}{n+1+\alpha}\right]$.

(3) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $\mu(A) = \mu(g^{-1}(A))$.

Correction : *On montre les deux inégalités. Pour* $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$, *on note* $\rho(B) := \sum_{i\in I} \rho(B_i)$. *Soit* $(B_i)_{i\in I} \in \mathcal{T}^I$ *un recouvrement au plus dénombrable de* A. *Pour tout* $i \in I$, $g^{-1}(B_i)$ *est une union dénombrable d'intervalles fermés, en considérant tout ces intervalles fermés pour tous les* $i \in I$, *on obtient un recouvrement au plus dénombrable de* $g^{-1}(A)$ *avec des intervalles fermés. On le note* $g^{-1}(B)$. *Pour* $i \in I$, *on note* $B_i = [\alpha_i, \beta_i]$. *Calculons* $\rho(g^{-1}(B))$:

$$\begin{aligned} \rho(g^{-1}(B)) &= \sum_{i\in I}\sum_{n\in\omega} \rho\left(\left[\frac{1}{n+1+\beta_i}, \frac{1}{n+1+\alpha_i}\right]\right) = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\omega} \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n+1+\alpha_i}}{1+\frac{1}{n+1+\beta_i}}\right) \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{n\in\omega} \ln\left(\frac{n+1+\beta_i}{n+1+\alpha_i}\right) - \ln\left(\frac{n+2+\beta_i}{n+2+\alpha_i}\right) = \sum_{i\in I} \ln\left(\frac{1+\alpha_i}{1+\beta_i}\right) = \rho(B) \geq \mu(A) \end{aligned}$$

Ceci montre que $\mu(g^{-1}(A)) \geq \mu(A)$.

L'autre inégalité est nettement plus dur. Soit k *un entier strictement positif. Si* $B \in \mathcal{T}^I$ *est un recouvrement de* $g^{-1}(A)$, *on considère* $B' = (B_i \cap \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right])_{i\in I, n\in\omega} \cup (\{0\}$, *c'est aussi un* *recouvrement de $g^{-1}(A)$, on a $\rho(B) = \rho(B')$. Comme $\rho(\{0\})$, on le laisse de coté. Le recouvrement B' peut être vu comme la réunion de recouvrements de $g^{-1}(A) \cap \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$*

Soit $B \in \mathcal{T}^{\omega \times I}$ tel que pour tout $n \in \omega$, $B_n = (B_{n,i})_{i \in I}$ est un recouvrement de $g^{-1}(A) \cap \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right]$ et tel que

$$\mu(g^{-1}(A)) \leq \rho(B) \leq \mu(g^{-1}(A)) + \frac{1}{k^2}$$

Pour m in ω, $B(m) = g^{-1}(g(B_0)) \cap \left[\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}\right]$ est un recouvrement de $g^{-1}(A) \cap \left[\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+1}\right]$, on a donc $\rho(B(m)) \geq \rho(B_m) - \frac{1}{k^2}$. D'autre part $(B_n)_{n \in k} \cup \left[0, \frac{1}{k}\right]$ est un recouvrement de $g^{-1}(A)$, Donc $\rho\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) \geq \sum_{n \geq k} \rho(B_n) - \frac{1}{k^2}$. Or $\rho\left(\left[0, \frac{1}{k}\right]\right) \leq \frac{1}{k}$, donc $\sum_{n \geq k} \rho(B_n) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\rho(B) &= \sum_{n \in \omega} \rho(B_n) \\
&\leq \sum_{n \in k} \rho(B_n) + \sum_{n \geq k} \rho(B_n) \\
&\leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \sum_{n \in k} \rho(B(n)) + \frac{1}{k^2} \\
&\leq \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} + \sum_{n \in \omega} \rho(B(n)) \\
&\leq \frac{3}{k} + \rho(g(B_0)) \\
&\leq \frac{3}{k} + \mu(A).
\end{aligned}$$

On a donc $\mu(g^{-1}(A)) \leq \frac{3}{k} + \mu(A)$ pour tout $k \in \omega_{>0}$, donc $\mu(g^{-1}(A)) \leq \mu(A)$ et finalement : $\mu(g^{-1}(A)) = \frac{3}{k}$

(4) On admet que pour tout irrationel $x \in]0,1[$ admet un unique développement en fraction continue, c'est à dire qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \omega_{>0}}$ d'entiers strictement positifs telle que :

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

Décrire le comportement de g sur les fractions continues.

Correction : *Il s'agit simplement d'un calcul : si n est un entier strictement positif et $y \in]0,1[$, on a*

$$g\left(\frac{1}{n+y}\right) = n + y - \lfloor n + y \rfloor = y.$$

Ainsi pour g envoie la fraction continue associée à $(a_n)_{n \in \omega_{>0}}$ sur $(a_{n+1})_{n \in \omega_{>0}}$.

Théorie de la mesure et intégration — Université de Genève
Printemps 2020 — Section de Mathématiques

Série 4 – Correction (corrigée le 18/03/2020)

Exercice 1. Soit O un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^d$, montrer qu'on peut trouver un pavé ouvert rationnel non-vide P tel que $P \subseteq O$.

Correction : *Comme O est non-vide, on peut choisir $x \in O$. Comme O est ouvert, il existe une boule ouverte B de centre x et de rayon $\epsilon > 0$ telle que $B \subseteq O$. Notons $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$ et Pour tout $i \in d$, on a :*

$$x_i - \epsilon' < x_i < x_i + \epsilon'.$$

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver deux rationnels y_i^- et y_i^+ tels que :

$$x_i - \epsilon' < y_i^- < x_i < y_i^+ < x_i + \epsilon'.$$

Soit

$$P =]y_0^-, y_0^+ + [\times]y_1^-, y_1^+ + [\times \cdots]y_{d-1}^-, y_{d-1}^+ + [\times$$

Montrons que $P \subseteq O$. Soit $y \in P$, On a :

$$||x-y||^2 = \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2 < \sum_{i=1}^{d} \epsilon'^2 = \epsilon^2.$$

Ainsi, $||x-y|| < \epsilon$ et donc $y \in B \subseteq O$. Donc $P \subseteq O$.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R}^d$. On définit l'homothétie de centre y et de rapport a comme la fonction

$$\begin{array}{cccc} h & \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ & x & \mapsto & a(x-y)+y. \end{array}$$

(1) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, montrer que $\lambda(h(A)) = |a|^d \lambda(A)$.

Correction : *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on rappelle que par définition,*

$$\lambda(A) = \inf_{(R_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)} \left\{ \sum_{i \in I} \operatorname{vol}(R_i) \right\}.$$

Pour $R = (R_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)$, notons $\Psi(R) = \sum_{i \in I} \operatorname{vol}(R_i)$.

On remarque la chose suivante : si P est un pavé ouvert, $h(P)$ l'est aussi et $\operatorname{vol}(h(P)) = |a|^d \operatorname{vol}(P)$. D'autre part, si $R = (R_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)$, $h(R) := (h(R_i))_{i \in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(h(A))$ et $\Psi(h(R)) = |a|^d \Psi(R)$.

Enfin l'application h est inversible et son inverse h^{-1} est l'homothétie de centre y et de rapport $\frac{1}{a}$.

Tout ce que l'on vient de dire est donc aussi valable pour h^{-1} (il faut changer a en $\frac{1}{a}$).

Soit $R = (R_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(h(A))$, on a $\Psi(R) = |a|^d \Psi(h^{-1}(R)) \geq |a|^d \lambda(A)$, donc $\lambda(h(A)) \geq |a|^d \lambda(A)$.

Soit $R = (R_i)_{i \in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{P}}(A)$, on a $\Psi(R) = \frac{1}{|a|^d} \Psi(h(R)) \geq \frac{1}{|a|^d} \lambda(h(A))$, donc $\lambda(A) \geq \frac{1}{|a|^d} \lambda(h(A))$.

Finalement, $\lambda(h(A)) = |a|^d \lambda(A)$.

(2) Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, montrer que A est λ-mesurable si et seulement si $h(A)$ est λ-mesurable.

Correction : *On va utiliser la caractérisation de λ-mesurable de Carathéodory.*

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, supposons A λ-mesurable. Ainsi, pour tout $B \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(B \setminus A).$$

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$ et notons $C' = h^{-1}(C)$. On a :

$$\lambda(C') = \lambda(A \cap C') + \lambda(C' \setminus A).$$

D'après la question précédente, on a :

$$\lambda(h(C')) = \lambda(h(A \cap C')) + \lambda(h(C' \setminus A)).$$

Or on a : $h(A \cap C') = h(A) \cap h(C') = h(A) \cap C$ *et* $h(C' \setminus A) = h(C') \setminus h(A) = C \setminus h(A)$ *(car* h *est bijective), donc :*

$$\lambda(C) = \lambda(h(A) \cap C) + \lambda(C \setminus h(A)).$$

Cette égalité est valide pour tout $C \subseteq \mathbb{R}^d$*, donc* $h(A)$ *est mesurable.*

Pour la réciproque, on applique ce résultat à l'homothétie h^{-1} *et à l'ensemble* $h(A)$*.*

Série 5 – Correction (corrigée le 25/03/2020)

Exercice 1. (1) Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur Y. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{A})$, inclus dans $\mathcal{P}(X)$, est une tribu sur X. On l'appelle *tribu image réciproque de $\mathcal{A}$ sous f*.

Correction : *Il faut montrer que la famille $f^{-1}(\mathcal{A})$ contient X, quelle est stable par passage au complémentaire et qu'elle est stable par union dénombrable.*

On a $X = f^{-1}(Y)$ et comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $Y \in \mathcal{A}$, ainsi, $X \in f^{-1}(\mathcal{A})$.

Soit maintenant $B = f^{-1}(A) \in f^{-1}(\mathcal{A})$ avec $A \in \mathcal{A}$, on veut montrer que $B^c = X \setminus B \in f^{-1}(\mathcal{A})$. On a $B^c = f^{-1}(A^c)$ (si ce n'est pas clair, prouvez-le), or $\mathcal{A}$ est une tribu, donc $A^c \in \mathcal{A}$ et donc $B^c \in f^{-1}(\mathcal{A})$.

Soit maintenant $B \in f^{-1}(\mathcal{A})^\omega$. Pour tout $n \in \omega$, on peut trouver $A_n \in \mathcal{A}$ tel que $B_n = f^{-1}(A_n)$. Notons $A' = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ et $B' = \bigcup_{n\in\omega} B_n$. Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $A' \in \mathcal{A}$. Montrons que

$$B' = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A'),$$

ce qui conclura.

Soit $x \in B'$ fixé quelconque et soit $n \in \omega$ tel que $x \in B_n$. On a $x \in f^{-1}(A_n) \subseteq f^{-1}(A')$. Ainsi $B' \subseteq f^{-1}(A')$. Réciproquement, soit $x \in f^{-1}(A')$ fixé quelconque, ce qui signifie que $f(x) \in A'$. Soit $n \in \omega$ tel que $f(x) \in A_n$. Ainsi $x \in B_n \subseteq B'$ et donc $f^{-1}(A') \subseteq B'$ et finalement $f^{-1}(A') = B'$. Finalement, $f^{-1}(A)$ est bien une tribu.

(2) Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ inclus dans $\mathcal{P}(Y)$. Montrer que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$.

Correction : *On rappelle que si $\mathcal{F}$ est une famille de partie de Y, $\sigma(\mathcal{F})$ désigne la tribu engendrée par $\mathcal{F}$, c'est à dire la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.*

La tribu $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$ contient la famille $f^{-1}(\mathcal{F})$, donc $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{F}))$.

Pour la réciproque, on considère l'ensemble de partie de Y $\mathcal{A} = \{B \subseteq Y | f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)\}$. Commençons par montrer que c'est une tribu.

- *On a $Y \in \widetilde{\mathcal{A}}$ car $f^{-1}(Y) = X \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$.*
- *Si $B \in \widetilde{\mathcal{A}}$, on a $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ et comme $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$, $f^{-1}(B)$ aussi. Donc $B^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$.*
- *Soit $B \in \widetilde{\mathcal{A}}^\omega$ on a*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(B_n),$$

et comme pour tout $n \in \omega$, $f^{-1}(B_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$, $\bigcup_{n\in\omega} f^{-1}(B_n) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$ et donc $\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

On a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ et donc $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$. D'autre part, par définition, pour tout $B \in \mathcal{A}$, $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$. Ainsi pour tout $B \in \sigma(\mathcal{F})$, $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$ et donc $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) \subseteq \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$ et finalement, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{F})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{F})\right)$.

(3) Soit $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une bijection qui envoie tout pavé ouvert de $\mathbb{R}^d$ sur un borélien de $\mathbb{R}^d$. Déduire des questions précédentes que g envoie tout borélien de $\mathbb{R}^d$ sur un borélien de $\mathbb{R}^d$.

Correction : *On applique les questions précédentes à $f := g^{-1}$ en se souvenant que la tribu borélienne est engendrée par les pavés ouverts. En posant $\mathcal{F}$ la famille des pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$. Soit $B \in \mathcal{B}$, on a d'après la question (2) : $f^{-1}(B) \in \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$, donc $g(B) = f^{-1}(B)$ est borélien.*

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un ensemble $N \subseteq X$ est μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subseteq A$ et $\mu(A) = 0$. On note $\mathcal{N}_\mu$ la collection de toutes les parties μ-négligeables de X.

(1) Uniquement dans cette question, on suppose que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, ce qui fait de μ également une mesure extérieure. Montrer que la définition des parties négligeables pour une mesure ci-dessus correspond à la définition des parties négligeables pour une mesure extérieure vue dans le cours.

Correction : *On rappelle que si φ est une mesure extérieure, une partie A de X est φ-négligeable si $\varphi(A) = 0$.*

Supposons qu'une partie $N \in \mathcal{A}$ est μ-négligeable(cours). On a $N \subseteq N \in \mathcal{A}$ et $\mu(N) = 0$, donc N est μ-négligeable(exo).

Supposons qu'une partie $N \in \mathcal{A}$ est μ-négligeable(exo). On a $N \subseteq A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$, par croissance de μ (qui est une mesure extérieure), on a $0 \leq \mu(N) \leq \mu(A) = 0$ et donc $\mu(N) = 0$ et N est μ-négligeable(cours).

(2) Montrer que $\mathcal{N}_\mu$ est un anneau d'ensembles.

Correction : *On rappelle qu'une famille non-vide $\mathcal{F}$ est un anneau d'ensemble si*

$$A, B \in \mathcal{F} \Leftarrow (A \cup B \text{ et } A \setminus B \in \mathcal{F}).$$

On a $\mu(\emptyset) = 0$, donc $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$ et donc $\mathcal{N}_\mu \neq \emptyset$.

Soient $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. On se donne A_1 et A_2 tels que $N_i \subseteq A_i$ et $\mu(A_i) = 0$ pour $i = 1, 2$. On a $N_1 \cup N_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ et $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2) = 0$. Donc $N_1 \cup N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. D'autre part, $N_1 \setminus N_2 \subseteq A_1$ et donc $N_1 \setminus N_2 \in \mathcal{N}_\mu$. Ceci montre bien que $\mathcal{N}_\mu$ est bien un anneau d'ensemble.

Notons dès à présent, qu'une réunion dénombrable de négligeable est toujours négligeable.

(3) Montrer que $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \cup N \ ; \ A \in \mathcal{A}, \ N \in \mathcal{N}_\mu\}$ est une tribu.

Correction : *On a bien $X = X \cup \emptyset \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Soit $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ fixé quelconque. Fixons $B, C \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$ tels que :*

$$A = B \cup N, \quad N \subseteq C \quad \text{et} \quad \mu(C) = 0.$$

On a

$$A^c = (B \cup C) = B^c \cap N^c = B^c \cap (N^c \cap (C \cup C^c) = (B^c \cap N^c \cap C^c) \cup (B^c \cap N^c \cap C) = (B^c \cap C^c) \cup (B^c \cap N^c \cap C).$$

La dernière égalité bien du fait que $C^c \subseteq N^c$. Comme B et C sont dans $\mathcal{A}$, $B^c \cap C^c$ est dans $\mathcal{A}$. De plus $B^c \cap N^c \cap C \subseteq C$ et donc $B^c \cap N^c \cap C \in \mathcal{N}_\mu$. Ce qui montre que $A^c \in \widetilde{\mathcal{A}}$.

Enfin Si $A \in \widetilde{\mathcal{A}}^\omega$, pour tout n, on peut choisir $B_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ tels que $A_n = B_n \cup N_n$. On a

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcup_{n \in \omega} (B_n \cup N_n) = \bigcup_{n \in \omega} B_n \cup \bigcup_{n \in \omega} N_n.$$

Or comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $\bigcup_{n \in \omega} B_n \in \mathcal{A}$ et d'après la remarque faites à la question précédente, $\bigcup_{n \in \omega} N_n \in \mathcal{N}_\mu$. Ainsi, $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et finalement $\widetilde{\mathcal{A}}$ est une tribu.

(4) Montrer que $\widetilde{\mu} \colon \widetilde{\mathcal{A}} \to [0; +\infty], \ A \cup N \mapsto \mu(A)$ (pour $A \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}_\mu$) est bien définie et une mesure sur $(X, \widetilde{\mathcal{A}})$. On dit que l'espace mesuré $(X, \widetilde{\mathcal{A}}, \widetilde{\mu})$ est le *complété* de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Correction : *Montrons tout d'abord que $\widetilde{\mu}$ c'est bien défini. Soit $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$ et soit $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$ et $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$ tels que*

$$A = B_1 \cup N_1 = B_2 \cup N_2.$$

On veut montrer que $\widetilde{\mu}(A)$ ne dépend pas de la décomposition choisi et donc que $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Soit $A_2 \in \widetilde{A}$ tel que $N_2 \subseteq A_2$ et $\mu(A_2) = 0$. On a $B_1 \subseteq B_1 \cup N_1 \subseteq B_2 \cup N_2 \subseteq B_2 \cup A_2$ et donc $\mu(B_1) \leq \mu(B_2) + 0$ et donc par symétrie $\mu(B_1) = \mu(B_2)$ et ainsi $\widetilde{\mu}$ est bien définie.

On veut maintenant montrer que $\widetilde{\mu}$ est bien une mesure. On a clairement $\widetilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Reste à montrer la σ-additivité. Soit $A \in \widetilde{\mathcal{A}}^\omega$ disjoint. Pour chaque $n \in \omega$, on choisit une décomposition $A_n = B_n \cup N_n$ avec $B_n \in \mathcal{A}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\mu$. On a

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = \left(\bigcup_{n \in \omega} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n \in \omega} N_n \right)$$

avec $\bigcup_{n\in\omega} B_n \in \mathcal{A}$ disjoint et $\bigcup_{n\in\omega} N_n \in \mathcal{N}_\mu$ disjoint. Finalement on a :

$$\widetilde{\mu}\left(\bigcup_{n\in\omega} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \sum_{n\in\omega} \mu(B_n) = \sum_{n\in\omega} \widetilde{\mu}(A_n).$$

Et donc $\widetilde{\mu}$ est une mesure.

(5) On suppose ici que $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ est la tribu grossière. Décrire le complété de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Correction : *Il y a deux cas à considérer : $\mu(X) = 0$ et $\mu(X) \neq 0$.*

Si $\mu(X) = 0$, toutes les partie de X sont μ-négligeables et donc $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{N}_\mu = \mathcal{P}(X)$.

Au contraire si $\mu(X) \neq 0$, aucune partie non vide de X n'est négligeable et donc $\mathcal{N}_\mu = \{\emptyset\}$ et par suite, $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

(6) On suppose ici que la tribu $\mathcal{A}$ contient le singleton $\{a\}$ où $a \in X$, et que $\mu = \mu_a$ est la mesure de Dirac au point a. Décrire le complété de $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Correction : *Notons δ_a la mesure de Dirac au point a. On va montrer que la tribu complétée $\widetilde{\mathcal{A}}$ est égale à $\mathcal{P}(X)$.*

Comme $\{a\} \in \mathcal{A}$, l'ensemble $\{a\}^c \in \mathcal{A}$. Par définition de la mesure de Dirac, $\delta_a(\{a\}^c) = 0$. Soit $A \subseteq X$, on peut écrire $A = (A \cap \{a\}) \cup (A \cap \{a\}^c)$.

L'ensemble $(A \cap \{a\})$ est soit vide, soit égale à $\{a\}$, dans les deux cas il est dans $\mathcal{A}$. L'ensemble $(A \cap \{a\}^c)$ est inclus dans $\{a\}^c$ dont la mesure est nulle et il est donc dans $\mathcal{N}_\mu$. Ainsi $A \in \widetilde{\mathcal{A}}$. Comme A était quelconque, on a bien $\mathcal{P}(X) = \widetilde{\mathcal{A}}$

Exercice 3. Soient $E = B(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'espace de Banach des fonctions bornées, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On note $h_{a,k} := (x \mapsto a + k(x-a)) \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ l'homothétie de centre $a \in \mathbb{R}$ et de rapport $k \in \mathbb{R}_{>0}$.

On définit les deux ensembles $D_0 := \mathbb{R}_{<1/2}$ et $D_1 := D_0^c = \mathbb{R}_{\geq 1/2}$, et l'application $T \in E^E$ par $T(f)|_{D_i} = h_{i,1/2} \circ f \circ h_{i,3}$ pour $f \in E$ et $i \in \{0; 1\}$.

(1) Montrer que T est bien dans E^E, et que pour tous $f, g \in E$, on a $\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$ (en particulier que T est *contractante*).

Correction : *Soit $f \in E$, il existe $M > 0$ tel que $f(\mathbb{R}) \subseteq ([-M, M])$. On en déduit $h_{0,1/2} \circ f \circ h_{0,3}(\mathbb{R}) \subseteq \left[\frac{-M}{2}, \frac{M}{2}\right]$ et $h_{1,1/2} \circ f \circ h_{1,3}(\mathbb{R}) \subseteq \left[1 + \frac{-M}{2}, 1 + \frac{M}{2}\right]$ et finalement $T(f)(\mathbb{R}) \subseteq \left[\frac{-M}{2}, 1 + \frac{M}{2}\right]$. Ainsi $T \in E^E$.*

Soient $f, g \in E, x_0 \in \mathbb{R}$ et $i_0 \in \{0, 1\}$ tel que $x_0 \in D_{i_0}$. Notons $y_0 := h_{i_0,x_0}(x_0)$. On a :

$$T(f)(x_0) - T(g)(x_0) = h_{i_0,1/2}(f(h_{i,x_0}(x_0))) - h_{i_0,1/2}(g(h_{i_0,x_0}(x_0))) = h_{i_0,1/2}(f(y_0)) - h_{i_0,1/2}(g(y_0)) = \frac{1}{2}(f(y_0) - g(y_0)).$$

et donc $|T(f)(x_0) - T(g)(x_0)| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|$ et finalement $\|T(f) - T(g)\| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|$.

(2) En déduire que l'équation $T(g) = g$ admet une unique solution g_0 dans $E = B(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Correction : *C'est une application directe du théorème de point fixe de Banach qui nous dit que si ϕ est une application contractante sur un espace métrique complet, alors est admet un unique point fixe.*

(3) On définit le sous-ensemble $F_C \subseteq B(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ composé de toutes les fonctions f continues, croissantes, nulles sur $]-\infty; 0]$, égales à $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ et égales à 1 sur $[1; +\infty[$.

Montrer que F_C est un fermé de $B(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ stable par l'application T.

Correction : *L'ensemble F_C est l'intersection dans $B(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ de*

— *l'ensemble des fonctions continues*
— *l'ensemble des fonctions croissantes*
— *l'ensemble des fonctions constantes égales à 0 sur $]-\infty, 0]$*
— *l'ensemble des fonctions constantes égales à $\frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$*
— *l'ensemble des fonctions constantes égales à 0 sur $[1, +\infty[$*

On montre facilement que chacun de ces ensembles est un sous-ensemble fermé de $B(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Ceci implique que F_C est fermé.

Soit $f \in F_C$, $T(f)$ est continue et croissante sur D_0 et D_1 comme composée de fonctions continues et croissante. De plus pour $x \in \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right[$, on a $T(f)(x) = \frac{1}{2}f(3x) = \frac{1}{2}$ et pour $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$, on a $T(f)(x) = \frac{1}{2}f(3(x-1)+1) = f(3x-2) = \frac{1}{2}$. Donc $T(f)$ est constante égale à $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ et en particulier continue en $\frac{1}{2}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

On vérifie facilement que $T(f)$ est constante égale à 0 sur $]-\infty,0]$ et constante égale à 0 sur $[1,+\infty[$ et donc finalement, on a bien $T(f) \in F_C$.

(4) Conclure que $g_0 \in F_C$.

Correction : *On peut appliquer une nouvelle fois le théorème de point fixe mais en voyant maintenant T comme une application de F_C dans F_C qui est complet comme fermé dans un complet. On obtient ainsi un unique point fixe dans F_C ce point fixe est nécessairement g_0.*

Série 6 – Correction (corrigée le 01/04/2020)

Exercice 1. (1) Soit $f\colon X \to Y$ une application. Peut-on toujours trouver des tribus $\mathcal{A}_X, \mathcal{A}_Y$, respectivement de X et Y, telles que f est mesurable pour ces tribus ?

Correction : *Oui, cela existe toujours : en effet si on prend $\mathcal{A}_X = \mathcal{P}(X)$, l'application est trivalement mesurable. De même si on prend $\mathcal{A}_Y = \{\emptyset, Y\}$ (la tribue grossière), alors f est trivialement mesurable.*

De manière un peu plus intéressante, on peut fixer $\mathcal{A}_Y$ et poser $\mathcal{A}_X = f^{-1}(\mathcal{A}_Y$. On a vu dans la série 5 précédente que $\mathcal{A}_X$ était une tribu.

Et enfin, si on fixe $\mathcal{A}_X$ on peut considérer la tribu de Y

$$\{B \subset Y |\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X\}.$$

On a montré dans la série précédente le caractère tribu *de cette ensemble de partie de Y.*

(2) Même question en remplaçant « mesurable » par « non mesurable ».

Correction : *Cela dépend de f : soit f est constante et dans ce cas f est mesurable quelquesoient les tribus sur X et sur Y.*

Si au contraire, f n'est pas constante, elle prend au moins deux valeurs distinctes y_1 et y_2. Si l'on considère $\mathcal{A}_X = \{, X\}$ et $\mathcal{A}_Y \sigma(\{\{y_1\}, \{y_2\}\}) \subseteq \mathcal{P}(Y)$. On a $f^{-1}(\{y_1\}) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(\{y_1\}) \neq X$, donc f n'est pas mesurable.

(3) La phrase suivante est-elle correcte ?
Pour tous ensembles non-vides X et Y, il existe une fonction $f\colon X \to Y$ telle que pour toutes tribus $\mathcal{A}_X$ sur X et $\mathcal{A}_Y$ sur Y, f est mesurable.
Justifier.

Correction : *Oui, il suffit de considérer une fonction constante.*

Exercice 2. Montrer que le suprémum d'une famille non dénombrable de fonctions Lebesgue-mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ n'est pas forcément Lebesgue-mesurable.

Correction : *On sait d'après le cours qu'il existe un ensemble non mesurable $V \subseteq \mathbb{R}$. Pour $v \in V$, on définit $f_v = \chi_{\{v\}}\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Pour tout $v \in V$, la fonction f_v est étagée (car tout singleton est Lebesgue-mesurable car fermé), et donc Lebesgue-mesurable. On a $f = \sup_{v \in V} f_v = \chi_V$ et cette fonction n'est pas mesurable car $f^{-1}(\{1\}) = V$ n'est pas mesurable.*

Exercice 3. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est monotone, alors elle est Lebesgue-mesurable.

Correction : *Quitte à considérer $-f$, on suppose que f est croissante. Il suffit de montrer que $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est Lebesgue-mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$. Soit $M = \sup\{x \in \mathbb{R} |\, f(x) < a\} = \sup f^{-1}(]\infty, a[)$. Trois possibilités : $M = -\infty$, $M \in \mathbb{R}$, et $M = +\infty$.*

- *Si $M = -\infty$, ceci signifie, par convention, que $f^{-1}(]\infty, a[) = \emptyset$.*
- *Si $M \in \mathbb{R}$, on distingue encore deux cas : soit $f(M) < a$, soit $f(M) \geq a$.*
  - *Si $f(M) < a$, on a $f^{-1}(]\infty, a[) =]-\infty, M]$. L'inclusion $]-\infty, M] \subseteq f^{-1}(]\infty, a[)$ vient de la croissance de f. L'inclusion $f^{-1}(]\infty, a[) =]-\infty, M]$ vient de la définition de sup.*
  - *Si $f(M) \geq a$, $f^{-1}(]\infty, a[) =]-\infty, M[$ pour essentiellement les même raisons.*
- *Enfin si $M = +\infty$, $f^{-1}(]-\infty, a[) = \mathbb{R}$ pour les même raison que précédemment.*

Dans tous les cas $f^{-1}(]-\infty, a[)$ est mesurable, donc f est mesurable.

Exercice 4. Soient $f, g\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Supposons que l'ensemble des points x de $\mathbb{R}$ où $f(x) \neq g(x)$ soit Lebesgue-négligeable. Montrer alors que f est Lebesgue-mesurable si et seulement si g l'est.

Correction : *Notons N l'ensemble sur lequel f et g diffèrent. Il est négligeable donc mesurable car la tribu de Lebesgue est complète pour la mesure de Lebesgue (cours).*

Notons $h = f - g$. Pour l'instant on ne suppose rien ni sur f ni sur g. On va montrer que h est mesurable. Soit $A \in \mathcal{A}_\lambda$ fixé quelconque. De deux choses l'une : soit $0 \in \mathcal{A}$ soit $0 \notin \mathcal{A}$.

Si $0 \notin A$, $h^{-1}(A) \subseteq h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = N$ et donc h^{-1} est lui-même négligeable donc mesurable.

Si au contraire, $0 \in A$, $h^{-1}(A)^c = h^{-1}(A^c)$ est mesurable d'après le cas précédent et donc $h^{-1}(A)$ est mesurable.

Ainsi dans tous les cas $h^{-1}(A)$ est mesurable et donc h est mesurable.

Supposons f mesurable. Comme $g = f - h$, la fonction g est mesurable. Réciproquement,si g est mesurable, comme $f = g + h$ la fonction f est mesurable.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de construire deux fonctions Lebesgue-mesurables F, G dont la composée $G \circ F$ n'est pas Lebesgue-mesurable.

Soit $\hat{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue, strictement croissante, surjective et telle que $\lambda_1(\hat{g}(K_3)) = 1$ construite dans le cours.

(1) Montrer que $\hat{g}$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que $F := \hat{g}^{-1}$ est Lebesgue-mesurable.

Correction : *Rappelons qu'un* homéomorphisme *est une fonction bijective continue d'inverse continue. Il est utile de chercher un exemple de bijection continue qui n'est pas un homéomorphisme.*

C'est un fait général qui ne dépend pas de la fonction $\hat{g}$ en question. En effet, on va montrer le lemme suivant :

Lemme. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et surjective alors f est un homéomorphisme.

Démonstration. De manière surprenant, la partie difficile de ce lemme est de montrer que la fonction f est continue.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Comme f est surjective, on peut trouver $x_+, x_- \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_\pm) = f(x) \pm \epsilon$. Comme f est strictement croissante, on a $x_- < x < x_+$. Notons $\eta = \min(x - x_-, x_+ - x) > 0$. Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| < \eta$, on a donc $x_- < y < x_+$ et par croissance stricte de f, $f(x) - \epsilon < f(y) < f(x) + \epsilon$ et donc $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Ainsi f est continue en x et donc sur $\mathbb{R}$.

Remarquons que la croissance stricte de $\mathbb{R}$ implique l'injectivité de f.

Pour montrer que f^{-1} est elle aussi continue, il suffit de remarquer qu'elle est elle-aussi surjective (par définition) et strictement croissante (par croissance stricte de f). On peut alors appliquer ce que l'on vient de démonter pour f. □

(2) Montrer que $\hat{g}(K_3)$ admet une sous-partie A qui n'est pas dans $\mathcal{A}_{\lambda_1}$. On fixera un tel A dans la suite.

Correction : *Par hypothèse, $\lambda_1(\hat{g}(K_3)) = 1$, donc d'après le théorème de Vitali, il existe une partie A inclue dans $\hat{g}(K_3)$.*

(3) Soit $G := \chi_{F(A)}$. Montrer que G est Lebesgue-mesurable.

Correction : *Comme $A \subseteq \hat{g}K_3$, $F(A) \subseteq F(\hat{g}(K_3)) = K_3$. Le Cantor est négligeable donc Lebesgue-mesurable, et par suite $F(A)$ aussi. Ainsi, G est une fonction étagée et est donc mesubable.*

(4) Montrer que $G \circ F$ n'est pas Lebesgue-mesurable.

Correction : *Il suffit de trouver un borélien dont l'image réciproque par $G \circ F$ n'est pas pas Lebesgue-mesurable. Le singleton $\{1\}$ est un fermé, il est donc borelien. Calculons maintenant $(G \circ F)^{-1}(\{1\})$.*

$$(G \circ F)^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{R} |\, G \circ F(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R} |\, F(x) \in F(A)\} = A$$

La dernière égalité vient de fait que $F = \hat{g}^{-1}$ est bijective.

Série 7 – Correction (corrigée le 08/04/2020)

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, f une fontion mesurable de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Supposons que $\displaystyle\int_\Omega f < +\infty$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < +\infty$ et $\displaystyle\int_A f > \int_\Omega f - \epsilon$.

Correction : *Soit $\epsilon > 0$ fixé quelconque. Par définition de l'intégrale, il existe $e \in \mathcal{E}(f)$, telle que $\int e > \int f - \epsilon$. Notons $e = \sum_{i \in I} \lambda_i \chi_{A_i}$ avec I fini. Notons $J = \{j \in I | \lambda_j \neq 0\}$. Pour tout $j \in J$, $\mu(A_j) < \infty$ car $\lambda_j \mu(A_j) = \int \lambda_j \chi_{A_j} \leq \int f < +\infty$. On considère l'ensemble $A = \bigcup_{j \in J} A_j$. Il s'agit d'un ensemble de mesure fini, en effet : $\mu(A) \leq \sum_{j \in J} \mu(A_j) < +\infty$. De plus, $\chi_A e = e$. On a donc*

$$\int_A f \geq \int_A e = \int e > \int f - \epsilon.$$

Exercice 2. Trouver un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n \in \omega} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0})^\omega$ telle que :
— la suite $(f_n)_{n \in \omega}$ converge ponctuellement vers une fonction mesurable g,
— la suite $\left(\displaystyle\int f_n\right)_{n \in \omega} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\omega$ converge vers $\displaystyle\int g$,
— il existe $A \in \mathcal{A}_{\lambda_1}$ tel que la suite $\left(\displaystyle\int_A f_n\right)_{n \in \omega} \in \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}^\omega$ ne converge pas vers $\displaystyle\int_A g$.

Correction : *En fait on peut montrer que ce n'est pas possible si g est d'intégrale finie.*

Pour $n \in \omega$, on définit :

$$\begin{array}{rccl} f_n\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } -n \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{si } n \leq x \leq n+1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Pour tout $n \in \omega$, la fonction f_n est étagée (c'est la fonction caractéristique d'un fermé) et on a $\int f_n = n + 1$. De plus la suite f converge ponctuellement vers $g := \chi_{\mathbb{R}_{\leq 0}}$ qui est elle-même étagée. On a $\int g = +\infty$ donc la suite $\int f_n$ converge vers $\int g$.

Posons $A = \mathbb{R}_{\geq 0}$. D'une part, pour tout $n \in \omega$ on a $\inf_A f_n = 1$, donc $\lim \int_A f_n = 1$. D'autre part $\int_A g = 0$.

Exercice 3. On considère ω muni de la mesure de comptage. Soit $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}^\omega$. Que vaut $\displaystyle\int_\omega a$? Justifier.

Correction : *Rappelons que la mesure de comptage μ est donnée par :*

$$\begin{array}{rccl} \mu\colon & \mathcal{P}(\omega) & \to & \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ & X & \mapsto & \mu(X) = \begin{cases} \#X & \text{si } X \text{ est fini,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On a $\displaystyle\int_\omega a = \sum_{n \in \omega} a_n$. Montrons le !

Supposons qu'il existe un $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $J := a^{-1}([x, +\infty[) = \{n \in \omega | a_n \geq x\}$ est infini. On a alors

$$\int a \geq \int x \chi_J = +\infty.$$

D'autre part comme J est infini, on a pour tout $N \in \omega$

$$\sum_{n\omega} a_n \geq \sum_{n \in J} a_n \geq sum_{n \in J} x \geq Nx.$$

et donc $\sum_{n\in\omega} = +\infty$. *Supposons maintenant que pour tout* $x \in \mathbb{R}_{>0}$, $a^{-1}([x,+\infty[)$ *est fini. Soit* $e \in \mathcal{E}(a)$, *notons* $e = \sum_{i\in I} \lambda_i \chi_{A_i}$ *avec* I *fini,* $\lambda_i > 0$ *et* $A_i \subseteq \omega$. *Pour tout* $i \in I$, A_i *est fini, donc* $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ *est fini. On a :*

$$\int e = \int_A e \le \sum_{i\in A} e(i) \le \sum_{i\in A} a_i \le \sum_{i\in\omega} a_i.$$

Exercice 4 (Difficile). (1) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet, A et B deux parties Ω mesurables et disjointes et $f\colon \Omega\colon \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0}$. Montrer que

$$\int_{A\sqcup B} = \int_A f + \int_B f.$$

Correction :

Soit $e \in \mathcal{E}(f\chi_{A\sqcup B})$. *On a* $e = e\chi_{A\sqcup B} = e\chi_A + e\chi_B$. *Or* $e\chi_A \in \mathcal{E}(f\chi_A)$ *et* $e\chi_B \in \mathcal{E}(f\chi_B)$. *Ainsi :*

$$\int e = \int e\chi_A + \int e\chi_B \le \int_A f + \int_B f,$$

en passant au sup, on obtient $\int_{A\sqcup B} f \le \int_A f + \int_B f$.

Réciproquement, si $e_A \in \{\chi_{\mathcal{A}}$ *et* $e_B \in \{\chi_{\mathcal{B}}$, *on a* $e_A + e_B \in \{\chi_{\mathcal{A}\sqcup\mathcal{B}}$, *donc*

$$\int e_A + \int e_B = \int e_A + e_B \le \int_{A\sqcup B}.$$

Ainsi,

$$\int_{A\sqcup B} = \int_A f + \int_B f.$$

On peut naturellement généraliser ceci par récurence à toutes union finie de partie mesurables deux à deux disjointe.

(2) Soit $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ munis de la mesure de Lebesgue et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ une fonction continue, montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ est égale à l'intégrale de Riemann de f entre a et b.
Indication : on pourra découper $[a,b]$ *en petits intervalles semi-ouvert disjoints.*

Correction :

La fonction f *étant continue sur un segment, elle est Riemann-intégrable. D'autre part elle est mesurable et positive. On sait donc aussi l'intégrer au sens de Riemann. Pour éviter les confusions, on note* $\displaystyle\text{Ⓡ}\!\!\int_a^b f$ *l'intégrale de Riemann de la fonction* f *entre* a *et* b.

On sait (Analyse I) que, comme f *est Riemann-intégrable,*

$$\sup\left\{ \text{Ⓡ}\!\!\int_a^b e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0} \\ e \text{ en escalier} \\ e \le f \end{array} \right\} \qquad \text{et} \qquad \inf\left\{ \text{Ⓡ}\!\!\int_a^b E \;\middle|\; \begin{array}{l} E\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\ge 0} \\ E \text{ en escalier} \\ E \ge f \end{array} \right\}$$

existent et sont égaux, cette valeur commune est $\displaystyle\text{Ⓡ}\!\!\int_a^b f$.

On remarque qu'une fonction en escalier est étagée (car les intervalles ouverts et fermés sont des boréliens), et pour ces fonctions on a (par définition) :

$$\text{Ⓡ}\!\!\int_a^b f = \int_{[a,b]} f$$

Rappelons que

$$\int_{[a,b]} f = \sup\left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\ge 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \le f \end{array} \right\}$$

Comme les fonctions en escaliers sont étagées, on a :

$$\left\{ \circledR\!\!\!\int_a^b e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ e \text{ en escalier} \\ e \leq f \end{array} \right\} \subseteq \left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\}$$

On en déduit :

$$\circledR\!\!\!\int_a^b f = \sup \left\{ \circledR\!\!\!\int_a^b e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ e \text{ en escalier} \\ e \leq f \end{array} \right\} \leq \sup \left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\} = \int_{[a,b]} f$$

Montrons l'autre inégalité. Soit $e \in \mathcal{E}(f)$ et E une fonction en escalier telle que $f \leq E$. On a évidemment $e \leq E$ donc

$$\int_{[a,b]} e \leq \int_{[a,b]} E = \circledR\!\!\!\int_a^b E.$$

Comme ceci est vrai pour n 'importe quelle E, on a :

$$\int_{[a,b]} e \leq \inf \left\{ \circledR\!\!\!\int_a^b E \;\middle|\; \begin{array}{l} E\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0} \\ E \text{ en escalier} \\ E \geq f \end{array} \right\} = \circledR\!\!\!\int_a^b f$$

Comme ceci est vrai pour n'importe quelle e, on a

$$\int_{[a,b]} f = \sup \left\{ \int_{[a,b]} e \;\middle|\; \begin{array}{l} e\colon [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ e \text{ en étagée} \\ e \leq f \end{array} \right\} \leq \circledR\!\!\!\int_a^b f$$

On a donc montré $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \circledR\!\!\!\int_a^b f$.

Une approche un peu plus pédestre (qui se servait de la question 1) :

Notons que si I est un intervalle inclus dans $[a,b]$, χ_I est Riemman intégrable et étagée et on a :

$$\circledR\!\!\!\int \chi_I = \int \chi_I.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $[a,b]$ est compacte, il existe $N > 0$ tel que pour $x, y \in [a,b]$, si $|x-y| \leq \frac{b-a}{N}$ alors $|f(b) - f(a)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$.

Pour $k \in N$, notons $a_k = a + k\frac{b-a}{N}$ et $I_k = [a_k, a_{k+1}[$, si $k < N-1$ et $I_N = [A_{n-1}, b]$. On a donc

$$[a,b] = \bigsqcup_{k \in N} I_k.$$

Enfin, notons $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$ et $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$. On a $M_k - m_k < \frac{\epsilon}{b-a}$.

On considère les deux fonctions $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ données par :

$$g = \sum_{i=0}^{N-1} m_k \chi_{I_k} \qquad \text{et} \qquad h = \sum_{i=0}^{N-1} M_k \chi_{I_k}$$

On a $g \leq f \leq h$ et $(h-f)(x) \leq \frac{\epsilon}{b-a}$ On a donc :

$$\circledR\!\!\!\int g \leq \circledR\!\!\!\int f \leq \circledR\!\!\!\int h \leq \circledR\!\!\!\int g + \epsilon \quad \text{et} \int g \leq \int f \leq \int h \leq \int g + \epsilon.$$

D'autre part,

$$\circledR\!\!\!\int g = \sum_{k \in N} \circledR\!\!\!\int_{I_k} g = \sum_{k \in N} \circledR\!\!\!\int_{I_k} m_k = m_k \circledR\!\!\!\int \chi_{I_k} = \sum_{k \in N} m_k \int_{I_k} \chi_{I_k} = \int g.$$

Finalement,

$$\circledR\!\!\!\int f \leq \int f + \epsilon \circledR\!\!\!\int f + 2\epsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout ϵ, on a

$$\int f = \circledR\!\!\!\int f.$$

(3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ et

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ x & \mapsto & \exp(-\alpha x). \end{array}$$

Calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f$.

Correction : *Sans surprise, on va montrer que* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f = \frac{1}{\alpha}$*. Pour ce faire, on va montrer deux inégalités.*

Soit $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$*. On a* $f\chi_{[0,x]} \leq f$*, donc*

$$\int_{[0,x]} f = \int \chi_{[0,x]} f \leq \int f$$

grâce à la question 2, on obtient

$$\frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha x}\right) \leq \int f.$$

Comme ceci est vrai pour tour x*, on a* $\displaystyle\frac{1}{\alpha} \leq \int f$.

L'autre inégalité est un peu plus subtile. Soit $e \in \mathcal{E}(f\chi_{\mathbb{R}_{\leq 0}})$*. On écrit* $e = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$*, avec les* A_i *mesurables et les* $a_i > 0$*. Comme* f *tend vers* 0 *en* $+\infty$*, chacun des* A_i *est borné, et donc leur union* A *aussi :* $A \subseteq [0, M]$ *pour un certain* M*.*

On a donc $e \in \mathcal{E}(f\chi_{[0,M]})$*, et donc*

$$\int e = \int_{[0,M]} e \leq \int f\chi_{[0,M]} = \int_{[0,M]} f \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Finalement, on a bien : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} f = \frac{1}{\alpha}$.

Série 8 – Correction (corrigée le 22/04/2020)

Exercice 1. (1) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\chi_{]0,1[}(x)}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$. Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mais $f^2 \notin L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction : *Considérons la suite $(g_n)_{n\in\omega}$ définie par $g_n = f\chi_{\left[\frac{1}{n+2},1-\frac{1}{n+2}\right]}$. La suite g est croissante, converge ponctuellement vers f et pour tout $n \in \omega$, g_n est mesurable, donc d'après le théorème de converge monotone, on a : $\int f = \int \lim g_n = \lim \int g_n$. Or on sait calculer $\int g_n$ grace à la série précédente : c'est égale l'intégrale de Riemann de g_n (car g_n est continue sur $\left[\frac{1}{n+2}, 1-\frac{1}{n+2}\right]$). On a :*

$$\int g_n = \left[2\sqrt{x}\right]_{\frac{1}{n+2}}^{1-\frac{1}{n+2}} = 2\sqrt{1-\frac{1}{n+2}} - 2\sqrt{\frac{1}{n+2}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 < \infty$$

Donc f est dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On applique le même théorème à f^2 et $\left(g_n^2\right)_{n\in\omega}$. On obtient : $\int f^2 = \lim \int g_n$ et :

$$\int g_n^2 = [\ln(x)]_{\frac{1}{n+2}}^{1-\frac{1}{n+2}} = \ln 1 - \frac{1}{n+2} - \ln\frac{1}{n+2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc $f^2 \notin L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(2) Trouver des fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pas toutes deux dans $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $fg \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Correction : *On peut par exemple prendre f n'importe quelle fonction de $L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et g la fonction unité i.e. la fonction $\chi_{\mathbb{R}}$ dont l'intégrale est infini. On a donc $g \notin L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mais $fg = f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*

Exercice 2. Soit $f \in L^1(\Omega, [0;1])$ telle que $\int f = \int f^2$.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{L}_\Omega$ telle que $f = \chi_A$ presque partout.

Correction : *On considère la fonction $g = f - f^2 = f(\chi_\Omega - f)$. Elle est à valeur positive et $\int g = \int f - \int f^2 = 0$. Donc, d'après le cours, g est nulle p.p. c'est-à-dire qu'il existe N de mesure nulle telle que $g(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega \setminus N$. Ceci implique que pour tout $x \in \Omega \setminus N$, $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$. Notons $A = f^{-1}(\{1\})$. C'est un mesurable car l'image réciproque d'un fermé. Pour tout $x \in \Omega \setminus N$, on a $f(x) = \chi_A(x)$. Donc $f = \chi_A$ p.p., en effet si $x \in A$, $f(x) = 1$ par définition de A et sinon $f(x) = 0$.*

Exercice 3. Trouver une suite de fonctions $f \in \left(L^1(\Omega, \overline{\mathbb{R}})\right)^\omega$ telle que :
— la suite f converge ponctuellement vers une fonction f_∞ intégrable,
— la suite $\left(\int f_n\right)_{n\in\omega}$ ne converge pas vers $\int f_\infty$.

Correction : *On peut par exemple prendre la suite $\left(\chi_{[n,n+1]}\right)_{n\in\omega}$. Elle converge ponctuellement vers la fonction nulle d'intégrale nulle et pour tout n, $\int \chi_{[n,n+1]} = 1$.*

Exercice 4. Trouver deux fonctions $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une propriété $\mathsf{P}(x)$ dépendant d'une paramètre $x \in \mathbb{R}$ telles que $f = g$ p.p. et f satisfait P p.p., mais pour tout x, g ne satisfait pas $\mathsf{P}(x)$.

Correction : *On peut prendre f la fonction nulle, $g = \chi_{\mathbb{Q}}$ et $\mathsf{P}(x)$ la propriété "être continue en x". Les fonctions f et g sont égales sur le complémentaire de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$ est négligeable, donc $f = g$ p.p..*

Par ailleurs, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, g n'est continue nul part. Mais la fonction nulle est clairement continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Riemann. Soit $(e_k)_{k\in\omega}$ et $(E_k)_{k\in\omega}$ deux suites de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ en escaliers telles que $e_k \leq f \leq E_k$ pour tout k et

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^1 e_k = \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 E_k \qquad \text{(au sens de Riemann).}$$

(1) Justifier l'existence de ces deux suites et montrer qu'on les supposer croissante pour e et décroissante pour E. Ce que l'on fait dans la suite.

Correction : *Rappelons qu'une fonctions $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite* en escalier*, si il existe une suite $0 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leq 1$ telle que h soit constante sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$. L'existence est une conséquence de l'intégrabilité au sens de Riemann : Comme f est Riemann-intégrable,*

$$\sup\left\{\int_0^1 e \,\middle|\, \begin{array}{c} e \text{ en escalier} \\ e \leq f. \end{array}\right\} = \inf\left\{\int_0^1 E \,\middle|\, \begin{array}{c} E \text{ en escalier} \\ E \geq f. \end{array}\right\}.$$

On peut donc trouver deux suites $(\widetilde{e}_k)_{k\in\omega}$ et $(\widetilde{E}_k)_{k\in\omega}$ qui convergent vers cette valeur commune.

Pour s'assurer que ces suites sont respectivement croissante et décroissante, on utilise le fait suivant : si s_1 et s_2 sont deux fonctions en escalier, alors $\max(s_1, s_2)$ et $\min(s_1, s_2)$ sont elles-aussi en escalier. On construit alors $(e_k)_{k\in\omega}$ et $(E_k)_{k\in\omega}$ par récurrence :

$$e_0 = \widetilde{e}_0, \quad e_n = \max(\widetilde{e}_n, e_{n-1}) \quad \text{et} \quad E_0 = \widetilde{E}_0, \quad E_n = \min(\widetilde{E}_n, E_{n-1}).$$

(2) Montrer que les suites e et E admettent des limites. On les note e_∞ et E_∞.

Correction : *Pour tout point x, la suite de réels $(e_k(x))_{k\in\omega}$ (resp. $(E_k(x))_{k\in\omega}$) est croissante (resp. décroissante) et majorée (minorée) par f(x) (resp. minorée) donc converge.*

(3) Montrer que les fonctions e_∞ et E_∞ sont mesurables et sont égales p.p.

Correction : *On a $e_\infty = \sup_{k\in\omega} e_k$ et $E_\infty = \inf_{k\in\omega} E_k$ et pour tout $k \in \omega$, e_k et E_k, sont mesurables, donc e_∞ et E_∞ sont mesurables.*

Pout tout k, on a :

$$\int_{[0,1]} E_\infty - e_\infty \leq \int_{[0,1]} E_k - e_k = \textcircled{R}\!\!\int_0^1 E_k - e_k.$$

Or on sait que cette dernière quantité tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$. Donc $\displaystyle\int_{[0,1]} E_\infty - e_\infty \leq 0$,

mais $E_\infty - e_\infty \geq 0$ donc finalement $\displaystyle\int_{[0,1]} E_\infty - e_\infty = 0$ *et donc $E_\infty = e_\infty$ p.p..*

(4) Montrer que f est mesurable et qu'elle est intégrable.

Correction : *Notons X l'ensemble des $x \in [0,1]$ tel que $E(x) \neq e(x)$. C'est ensemble est de mesure nul. Sur $[0,1] \setminus X$, $f = E$ et donc $f(x) = E(x)$ p.p., donc, comme E est mesurable, f est mesurable.*

(5) On note A l'ensemble $(e_\infty - E_\infty)^{-1}(\{0\})$ privé de tous les points de discontinuités des fonctions e_k et E_k pour tout $k \in \omega$. Montrer que f est continue sur A.

Correction : *Notons tout d'abord que le complémentaire de A dans $[0,1]$ est de mesure nulle, donc on aura montré que f est continue presque partout.*

Soit $x \in A$. Comme x n'est le point de discontinuité d'aucune des fonction $e_\bullet$ et $E_\bullet$, il existe une suite d'intervalle ouvert $]a_k, b_k[$, tel que pour tout k $x \in]a_k, b_k[$ et e_k et E_k sont constantes sur cet intervalle (égale respectivement à $e_k(x)$ et $E_k(x)$). Soit $\epsilon > 0$, comme $x \in (e_\infty - E_\infty)^{-1}(\{0\})$, il existe $N\omega$, tel que pour tout $k \geq N$, $|E_k(x) - e_k(x)| < \epsilon$. Pour tout $y \in]a_N, b_N[$, on a :

$$-\epsilon < e_n(x) - E_N(x) = e_N(y) - E_N(x) \leq f(y) - f(x) \leq E_N(y) - e_N(x) = E_N(x) - e_N(x) < \epsilon,$$

ce qui montre que f est continue en x.

Série 9 – Correction (corrigée le 29/04/2020)

Exercice 1. Soient $f, g \in \mathbb{R}^\Omega$ deux fonctions pas nécessairement mesurables telles que $\overline{\int} f, \overline{\int} g, \underline{\int} f$ et $\underline{\int} g$ soient différents de $\pm\infty$.

(1) Montrer que $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.

Correction : *On rappelle que*

$$\underline{\int} f = \sup\left\{ \int h \,\middle|\, h \in L^1, h \leq f \right\} \quad \text{et} \quad \overline{\int} f = \inf\left\{ \int h \,\middle|\, h \in L^1, h \geq f \right\}.$$

Pour alléger, on note :

$$\underline{L^1}(f) = \{h \in L^1 | h \leq f\} \quad \text{et} \quad \overline{L^1}(f) = \{h \in L^1 | h \geq f\}.$$

L'hypothèse faites sur les intégrales supérieure et inférieure de f implique que ces ensembles sont non-vide. Pour toutes $h_1 \in \underline{L^1}(f)$ et $h_2 \in \overline{L^1}(f)$, on a $h_1 \leq f \leq h_2$, et comme h_1 et h_2 sont dans L^1 on peut appliquer la monotonie : $\int h_1 \leq \int h_2$, en passant au sup (pour h_1) et à l'inf (pour h_2), on obtient $\underline{\int} f \leq \overline{\int} f$.

(2) Montrer que $\underline{\int} - f = -\overline{\int} f$.

Correction : *Soit $h \in \overline{L^1}(f)$, alors $-h \in \underline{L^1}(-f)$, et de plus $\int -h = -\int h$. En passant au sup pour h (donc à l'inf pour $-h$), on obtient Montrer que $\underline{\int} - f = -\overline{\int} f$.*

(3) Montrer que $\underline{\int}(f+g) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g$.

Correction : *Soient $h_1 \in \underline{L^1}(f)$ et $h_2 \in \underline{L^1}(f)$, on a $h_1 + h_2 \in L^1$ et $h_1 + h_2 \leq f + g$, donc $h_1 + h_2 \in \underline{L^1}(f+g)$. Ainsi, on a :*

$$\int h_1 + \int h_2 = \int (h_1 + h_2) \leq \underline{\int} f + g.$$

Finalement en passant au sup sur h_1 et h_2, on obtient $\underline{\int}(f+g) \geq \underline{\int} f + \underline{\int} g$.

(4) Montrer que $\overline{\int}(f+g) \leq \overline{\int} f + \overline{\int} g$.

Correction : *On applique les deux questions précédentes :*

$$\overline{\int}(f+g) = -\underline{\int} - (f+g) \leq -\underline{\int} - f - \underline{\int} - g = \overline{\int} f + \overline{\int} g.$$

(5) Montrer que : $f + g \in L^1(\Omega, \mathbb{R}) \Rightarrow \int(f+g) = \underline{\int} f + \overline{\int} g$. On pourra utiliser que $f = (f+g) + (-g)$.

Correction : *Comme $f + g \in L^1$, on a $\underline{\int}(f+g) = \overline{\int}(f+g) = \int(f+g)$. On suit l'indication (et $g = f + g + (-f)$) et on se sert des questions précédentes. On obtient :*

$$\underline{\int} f \geq \underline{\int}(f+g) + \underline{\int}(-g) = \int(f+g) - \overline{\int} g,$$
$$\overline{\int} g \leq \overline{\int}(f+g) + \overline{\int}(-f) = \int(f+g) - \underline{\int} f,$$

et donc $\int(f+g) = \underline{\int} f + \overline{\int} g$.

(6) Soit A une partie de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\overline{\int}\chi_A \leq \lambda^*(A)$, où λ^* est la mesure extérieure de Lebesgue.

Correction : *Si $\lambda^*(A) = +\infty$, il n'y a rien à montrer. On suppose donc dès à présent que $\lambda^*(A) < +\infty$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de A par un nombre au plus dénombrable de pavés ouverts de $\mathbb{R}^d$ tel que $\sum_{i\in I}\lambda(A_i) < \infty$. Pour tout $i \in I$ la fonction χ_{A_i} est mesurable et donc (pourquoi ?) $g := \sum_{i\in I}\chi_{A_i}$ est mesurable et pour tout x in $\mathbb{R}^d$, $g(x) \geq 0$ et pour tout $x \in A$, $g(x) \geq 1$. Finalement, $g \geq \chi_A$ donc $g \in \overline{L^1}(A)$. Par ailleurs, on a :*

$$\overline{\int}\chi_A \leq \int g = \int\sum_{i\in I}\chi_{A_i} = \sum_{i\in I}\int\chi_{A_i} = \sum_{i\in I}\mu(A_i).$$

En passant à l'infimum, sur les recouvrements, on obtient $\overline{\int}\chi_A \leq \lambda^*(A)$.

(7) En utilisant des théorèmes du cours et les questions précédentes, trouvez des exemples de f, g tels que toutes les inégalités des questions 1, 3 et 4 sont strictes.

Correction : *Comme $\lambda_1([0,1]) > 0$ et d'après le théorème de Vitalli, on peut se donner un ensemble $V \subset [0,1]$ tel que V n'est pas mesurable. Posons $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\lambda_1}, \lambda_1)$, $f = \chi_V$ et $g = -\chi_V$. On sait que f n'est pas mesurable, donc $\underline{\int} f \neq \overline{\int} f$ et donc $\underline{\int} f < \overline{\int} f$.*

D'après la question 2, on a aussi $\underline{\int} g < \overline{\int} g$. Comme $f + g = 0$, $f + g \in L^1$, et $\underline{\int}(f+g) = \overline{\int}(f+g) = 0 \int f + g$. D'après la question 5, on a :

$$\underline{\int} f + \underline{\int} g < \underline{\int} f + \overline{\int} g = \underline{\int}(f+g) = \int(f+g) = \overline{\int}(f+g) = \underline{\int} f + \overline{\int} g < \overline{\int} f + \overline{\int}.$$

Exercice 2. Pour $n \in \omega_{\geq 1}$, on définit la fonction :

$$f_n\colon \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \dfrac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n$.

Correction : *Pour tout $n \geq 1$, f_n est mesurable car continue. En effet, d'une part elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par les propriétés habituelles. En 0, il suffit de montrer que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f_n(x) = f_n(0)$. Or on a pour $x \neq 0$:*

$$f_n(x) = \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 = f_n(0).$$

L'avant dernière égalité vient du fait que $\frac{\sin(y)}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$ car sin est dérivable et sa dérivée en 0 est 1.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

et pour $x = 0$, on a aussi $f_n(0) = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 = \frac{1}{1+x^2}$.

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\omega}$ converge ponctuellement vers la fonction

$$f_\infty\colon \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tfrac{1}{1+x^2}$$

De plus, la fonction f_∞ domine toutes les f_n et est intégrable (on va le vérifier). En effet, pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}}\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{|\sin(\frac{x}{n})|}{|\frac{x}{n}|}\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = f_\infty(x),$$

car $|\sin(x)| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc, le théorème de convergence dominée implique que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Exercice 3. (1) Pour $n \in \omega$, calculer $\displaystyle\int_{]0,1[} x^n \log x \mathrm{d}x$.

Correction : *Cette fonction est continue et de signe constant sur $]0,1[$, on peut donc sans problème utiliser l'intégrale de Riemann.*

$$\begin{aligned}
\int_{]0,1[} x^n \log x \mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} x^n \log x \mathrm{d}x \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[\frac{x^{n+1} \log x}{n+1} \right]_{\epsilon}^{1-\epsilon} - \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{x^{n+1-1}}{n+1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_{\epsilon}^{1-\epsilon} \right) \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

(2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{\log(x)}{1-x} \mathrm{d}x$.

Correction : *On considère plutôt la fonction $g\colon\ ]0,1[\in x \mapsto -\frac{\log(x)}{1-x}$ qui a le bon goût d'être positive. Pour tout $n \in \omega$, on pose $f_n\colon\ ]0,1[\ni x \mapsto -\sum_{k=0}^{n} x^k \log x \mathrm{d}x$. De plus la suite $(f_n)_{n\in\omega}$ est une suite croissante de fonctions positives et mesurables. On a donc, d'après le théorème de convergence mononote :*

$$\int_{]0,1[} g = \sup_{n\in\omega} \int_{]0,1[} f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi, on obtient : $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{\log(x)}{1-x} \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{6}$.

Rappel : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Série 10 – Correction (corrigée le 6/05/2020)

Dans les exerices 1 et 2, on a besoin des notations suivantes. Supposons qu'on dispose de (X, μ_X) et (Y, μ_Y) deux espaces mesurés et de $g\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ tel que tout $x \in X$, la fonction $g(x, \cdot)\colon Y \ni y \mapsto g(x, y)$ est dans $L^1(Y, \mathbb{R})$. Pour tout x, la quantité $\int_Y g(x, \cdot)$ est bien défini. Supposons que $h\colon X \ni x \mapsto \int_Y g(x, \cdot) \in \mathbb{R}$ est dans $L^1(X, \mathbb{R})$. Alors la quantité $\int_X h$ est notée

$$\int_X \int_Y g(x, y) \mathrm{d}\mu_Y(y) \mathrm{d}\mu_X(x).$$

Exercice 1. On note δ la mesure de comptage sur ω et δ_2 la mesure de comptage sur ω^2. On définit

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \omega^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (m, n) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ -1 & \text{si } n = m + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(1) Montrer que $\int_{\omega^2} f \mathrm{d}\delta_2$ n'existe pas.

Correction : *On a*

$$f_+(n, m) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = m, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases} \quad \textit{et} f_-(n, m) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = m + 1, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}.$$

et donc $f_+ = \chi_\Delta$ *avec* $\Delta = \{(k, k) | k \in \omega\}$. *or* $\delta_2(\Delta) = +\infty$, *donc* $\int_{\omega^2} f$ *n'est pas défini.*

(2) Calculer $\int_\omega \int_\omega f(m, n) \mathrm{d}\delta(m) \mathrm{d}\delta(n)$ et $\int_\omega \int_\omega f(m, n) \mathrm{d}\delta(n) \mathrm{d}\delta(m)$ après avoir justifié leurs existences.

Correction : *Toutes les fonctions sont mesurables car* ω^2 *et* ω *sont munis de leur tribus discrètes respectives.*

On fixe m *et on considère la fonction* $f(m, \cdot)\colon \omega \to \mathbb{R}$. *On a* $f(m, \cdot)_+ = \chi_{\{m\}}$ *et* $f(m, \cdot)_- = \chi_{\{m+1\}}$.

Ces deux fonctions sont étagées et il est donc facile de calculer leurs intégrales. On a

$$\int_\omega f(m, \cdot) = 1 - 1 = 0$$

Notons $g\colon \omega \to \mathbb{R}$, *la fonction définie par* $g(m) = \int_\omega f(m, \cdot)$. *On a* $g = 0$. *Cette fonction est intégrable et* $\int_\omega g = 0$. *Ainsi,* $\int_\omega \int_\omega f(m, n) \mathrm{d}\delta(m) \mathrm{d}\delta(n) = 0$.

Pour l'autre sens, les calculs sont similaires (mais pas identiques) : On fixe $n \in \omega$ *et on considère la fonction* $f(\cdot, m)\colon \omega \to \mathbb{R}$. *On a* $f(\cdot, n)_+ = \chi_{\{n\}}$ *et* $f(\cdot, n)_- = \chi_{\{n-1\}}$, *avec la convention que* $\chi_{\{-1\}} = 0$. *Ces deux fonctions sont étagées et il est donc facile de calculer leurs intégrales. On a*

$$\int_\omega f(\cdot, n) = \begin{cases} 1 - 1 = 0 & \textit{si } m > 0, \\ 1 - 0 = 1 & \textit{si } m = 0. \end{cases}$$

Notons $h\colon \omega \to \mathbb{R}$, *la fonction définie par* $g(n) = \int_\omega f(\cdot, n)$. *On a* $h = \chi_{\{0\}}$. *Cette fonction est intégrable et* $\int_\omega h = 0$. *Ainsi,* $\int_\omega \int_\omega f(m, n) \mathrm{d}\delta(m) \mathrm{d}\delta(n) = 1$.

On constate que les deux intégrales doubles ont des valeurs différentes.

Exercice 2. On considère les espaces mesurés $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{\lambda_1}, \lambda_1)$ et $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \delta)$, où δ est la mesure de comptage. Soit $\Delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x_1 = x_2 \le 1\}$.

Montrer que

$$\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y) \mathrm{d}\lambda_1(x) \mathrm{d}\delta(y) \neq \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y) \mathrm{d}\delta(y) \mathrm{d}\lambda_1(x).$$

Correction : *On va calculer ces deux intégrales doubles.*

On fixe $y \in \mathbb{R}$. Si $y \notin [0,1]$, $\chi_\Delta(\cdot, y)$ est la fonction $\chi_{\{y\}}$ on a donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y) \mathrm{d}\lambda_1 = 0$ car $\lambda_1(\{y\}) = 1$. Si $y \notin [0,1]$, $\chi_\Delta(\cdot, y)$ est la fonction nulle, donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y) \mathrm{d}\lambda_1 = 0$. Ainsi la fonction $y \mapsto \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y) \mathrm{d}\lambda_1$ est la fonction nulle. Donc son intégrale est nulle également et donc $\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y) \mathrm{d}\lambda_1(x) \mathrm{d}\delta(y) = 0$

Pour l'autre intégrale, on commence par fixer $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [0,1]$, $\chi_\Delta(x, \cdot)$ est la fonction $\chi_{\{x\}}$, on a donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, \cdot) \mathrm{d}\lambda_1 = 1$ car $\delta(\{x\}) = 1$. Si $y \notin [0,1]$, $\chi_\Delta(\cdot, y)$ est la fonction nulle, donc $\int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y) \mathrm{d}\lambda_1 = 0$. Ainsi la fonction $y \mapsto \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(\cdot, y) \mathrm{d}\lambda_1$ est égale à $\chi_{[0,1]}$. Son intégrale pour la mesure de Lebesgue est égale à 1, donc $\int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y) \mathrm{d}\delta(y) \mathrm{d}\lambda_1(x) = 1$.

Finallement on a bien :

$$0 = \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y) \mathrm{d}\lambda_1(x) \mathrm{d}\delta(y) \neq \int_\mathbb{R} \int_\mathbb{R} \chi_\Delta(x, y) \mathrm{d}\delta(y) \mathrm{d}\lambda_1(x) = 1.$$

Exercice 3. Montrer que $p\colon (\mathbb{R}^{d+1}, \mathcal{A}_{\lambda_{d+1}}) \to (\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_{\lambda_d})$, définie par $(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \mapsto (x_1, \dots x_d)$, est mesurable.

Correction : *Attention, on parle ici des tribus de Lebesgue et non des boréliens, on ne peut donc pas argumenter avec la continuité.*

Soit A une partie Lebesgue-mesurable de $\mathbb{R}^d$. On a $p^{-1}(A) = A \times \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que cet ensemble est lui même mesurable. Pour cela on utilise la caractérisation de Carathéodory : on veut montrer que pour toute partie $B \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$

$$\lambda_{d+1}(B) = \lambda_{d+1}(B \cap p^{-1}(A)) + \lambda_{d+1}(B \setminus p^{-1}(A)).$$

On a vu en cours qu'il suffisait de la vérifier pour des pavés ouverts.

On écrit donc $B = P \times]a, b[$ avec P un pavé ouvert de dimension d. On a $\lambda_{d+1}(B) = \lambda(P) \times (b - a)$. D'autre part $B \cap p^{-1}(A) = (P \cap A) \times]b - a[$ et $B \setminus p^{-1}(A) = (P \setminus A) \times]a, b[$. Par hypothèse A est mesurable, donc $P \cap A$ et $P \setminus A$ le sont aussi. Il suffit donc de démontrer que pour tout C mesurable de $\mathbb{R}^d$, $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) = (b - a)\lambda_d(C)$.

Si $(P_j)_{j \in J}$ est un recouvrement au plus dénombrable de C par des pavés ouverts, alors $(P_j \times]a, b[)_{j \in J}$ est un est un recouvrement au plus dénombrable de $C \times]a, b[$ par des pavés ouverts. On en déduit, $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) \leq (b - a)\lambda_d(C)$.

Soit $(P_j \times I_j)_{j \in J}$ un recouvrement au plus dénombrables de $C \times]a, b[$. Pour tout $x \in C$, on définit, $f(x) = \sum_{j \in J_x} \lambda_1(I_j)$ où J_x est le sous-ensemble des $j \in J$ tel que $x \in P_j$. Autrement dit, $f = \sum_{j \in J} \lambda_1(I_j) \chi_{P_j}$. Cette fonction est mesurable car suprémum d'une famille dénombrable de fonctions étagées. D'après le théorème de convergence monotone, son intégrale égale $\sum_{j \in J} \lambda_{d+1}(P_j \times I_j)$. De plus, pour tout $x \in C$, $f(x) \geq \lambda_1(]a, b[) = b - a$, donc $\int_{\mathbb{R}^d} f \geq \int_{\mathbb{R}^d} (b - a)\chi_C = (b - a)\lambda_d(C)$. Ceci montre que $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) \geq (b - a)\lambda_d(C)$ et donc $\lambda_{d+1}(C \times]a, b[) = (b - a)\lambda_d(C)$.

Exercice 4. On veut prouver l'énoncé suivant :

Soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$ et telle que f' est bornée. Alors f' est Lebesgue-intégrable et

$$\int_{[a;b]} f' = f(b) - f(a).$$

Pour l'intégrale de Riemann, l'énoncé analogue est : *Soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$ et telle que f' est Riemann-intégrable. Alors*

$$\int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

Soit $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$ et telle que f' est bornée. On définit pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{n}{b-a} f(x + \frac{b-a}{n}) - \frac{n}{b-a} f(x)$ si $a \leq x \leq \frac{(n-1)b+a}{n}$ et $f_n(x) = f'(b)$ si $x > \frac{(n-1)b+a}{n}$.

(1) Montrer que $\int_{[a,b]} f_n \underset{n \to \infty}{\to} f(b) - f(a)$.
Indication : On pourra se servir de la Riemann-intégrabilité de f_n.

Correction : *Soit F une primitive de f. On a*

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} f_n &= \int_{\left[a,\frac{a+(n-1)b}{n}\right]} \frac{n}{b-a} f\left(x+\frac{b-a}{n}\right) - \frac{n}{b-a} f(x)\mathrm{d}\lambda(x) + \int_{\left[\frac{a+(n-1)b}{n},b\right]} f'(1)\\ &= \frac{n}{b-a}\left(F(b)-F\left(\frac{(n-1)a+b}{n}\right)\right) - \frac{n}{b-a}\left(F\left(\frac{(n-1)b+a}{n}\right)-F(a)\right) + \frac{b-a}{n} f'(1).\\ &= \frac{F(b)-F(b-\frac{b-a}{n})}{\frac{b-a}{n}} - \frac{F(a+\frac{b-a}{n})-F(a)}{\frac{b-a}{n}} + + \frac{b-a}{n} f'(1).\\ &\underset{n\to\infty}{\to} F'(b)-F'(a) = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

(2) Montrer que f' est Lebesgue-intégrable sur $[a;b]$ et que $\int_{[a;b]} f' = f(b)-f(a)$.

Correction : *On va utiliser le théorème de convergence dominée. D'une part $(f_n)_{n\in\omega}$ converge ponctuellement vers f' sur $[a,b]$ et pour tout n, la fonction f_n sont intégrable (car continue sur un segment). Il reste à prouver la dominiation. On va utiliser l'hypothèse faites sur f'. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel $|f'(x)| < M$ pour tout $x \in [a,b]$. Soit $n \geq 1$ et $x \in \left[a, \frac{(n-1)b+a}{n}\right]$. D'après le théorème des accroissement fini, il existe $c \in \left[x, x+\frac{b-a}{n}\right]$ tel que $f_n(x) = f'(c)$. D'autre part si $x \in \left[\frac{(n-1)b+a}{n}, b\right]$, $f_n(x) = f'(1)$. Dans tous les cas $|f_n(x)| < M$. De plus la fonction constante égale à M est dans $L^1([a;b])$ donc on peut appliquer le théorème de convergence dominé et déduire d'une part que f' est dans $L^1([a;b])$ et que $\int_{[a;b]} f' = f(b)-f(a)$.*

Série 11 – Correction (corrigée le 13/05/2020)

Exercice 1. Soit $((X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i))_{i\in 1,2,3}$ une collection de trois espaces mesurés. On suppose de plus que μ_1, μ_2 et μ_3 sont σ-finies.

(1) Montrer que $(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3)$.

Correction : *On va montrer que ces deux tribus sont égales à la tribu $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\otimes\mathcal{A}_3$ engendrée par $(A_1 \times A_2 \times A_3)_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_1\\ A_2\in\mathcal{A}_2\\ A_3\in\mathcal{A}_3}}$. Par symétrie, il suffit de montrer que $(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2)\otimes\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2\otimes\mathcal{A}_3$. Soient $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ et $A_3 \in \mathcal{A}_3$. L'ensemble $A_1\times A_2$ est dans $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, donc $A_1\times A_2\times A_3 \in (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$. Ceci montre que $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \subseteq (\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3$.*

Montrons l'autre inclusion. Soient $A_3 \in \mathcal{A}_3$ et $B \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ fixés quelconques. Par définition de tribu engendrée, il suffit de montrer que $B \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$. Considérons

$$\mathcal{T}_{A_3} = \{\, A \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2) \mid A \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 \} .$$

On vérifie aisément, que $\mathcal{T}_{A_3}$ est une tribu. Or elle contient la famille $(A_1 \times A_2)_{\substack{A_1\in\mathcal{A}_1\\ A_2\in\mathcal{A}_2}}$. Elle contient donc la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et donc $B \times A_3 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$.

(2) Montrer que $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$, (où $\alpha \times \beta$ désigne la mesure produit maximale de α et β).

Correction : *On vérifie facilement que l'ensemble des réunions disjointes finies d'ensembles de la forme $A_1 \times A_2 \times A_3$ avec $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ et $A_3 \in \mathcal{A}_3$ est une algèbre d'ensemble (c'est comme la Proposition 12 du cours). On la nomme $\mathcal{D}$. On a $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$. De plus, on sait que pour tout $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_3$,*

$$\begin{aligned}(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3(A_1 \times A_2 \times A_3) &= (\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2)\mu_3(A_3) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\mu_3(A_3)\\ &= \mu_1(A_1)(\mu_2 \times \mu_3)(A_2 \times A_3) = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)(A_1 \times A_2 \times A_3).\end{aligned}$$

On en déduit que les restrictions de $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ et $\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ à $\mathcal{D}$ sont égales à une prémesures sur $\mathcal{D}$ disons ρ. Autrement dit, $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3$ et $\mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ sont deux prolongements de ρ à $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3$, elles sont donc toutes deux égales au prolongement de Hahn–Kolmogorov de ρ, car ρ est clairement σ-finie.

Exercice 2. Soit $B \in (\mathcal{A}_{\lambda_m})^\omega$ disjoint et $C \in (\mathcal{A}_{\lambda_n})^\omega$ disjoint. Soit $A := \sqcup_{i\in\omega} B_i \times C_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+n})$. Montrer que :

$$\overline{\chi_A} = \underline{\chi_A} \;=\; \sum_{i\in\omega} \lambda_n(C_i)\ \chi_{B_i} \;\in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, [0; +\infty]).$$

Correction : *Soit $x \in \mathbb{R}^m$ fixé. De deux choses l'une : soit $x \in \bigsqcup_{i\in\omega} B_i$, soit $x \notin \bigsqcup_{i\in\omega} B_i$. Commençons par le deuxième cas. On souhaite montrer que $\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = 0$. Dans ce cas là, la fonction $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_A(x, y)$ est la fonction nulle, elle est donc dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x, y)\mathrm{d}y = 0.$$

Supposons maintenant que $x \in \bigsqcup_{i\in\omega} B_i$. Notons j l'unique entier tel que $x \in B_j$. Là encore deux cas de figure se présente : soit $\lambda_n(C_j) < +\infty$, soit $\lambda_n(C_j) = +\infty$. Dans le premier cas, on peut argumenter exactement comme avant. En effet, on souhaite montrer que $\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = \lambda(C_j)$. La fonction $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_A(x, y)$ est égale à χ_{C_j} , elle est donc dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et

$$\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{C_j} = \lambda_n(C_j)$$

Supposons maintenant que $\lambda_n(C_j) = +\infty$, dans ce cas, on souhaite montrer que $\overline{\chi_A}(x) = \underline{\chi_A}(x) = +\infty$. La fonction $\mathbb{R}^n \ni y \mapsto \chi_A(x,y)$ est égale à χ_{C_j} qui n'est pas dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et comme elle est positive, $f \geq \chi_{C_j}$ implique $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, ainsi par définition de l'infimum sur un ensemble vide, on a $\overline{\chi_A(x)} = +\infty$. Pour tout $k \in \omega$, $\chi_{C_j \cap [-k,k]}$ est dans L^1 et $\chi_{C_j \cap [-k,k]} \leq \chi_{C_j}$ et donc $\lambda_n(C_j \cap [-k,k]) \leq \overline{\chi_{C_j}}$. Or $\lambda_n(C_j \cap [-k,k]) \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda_n(C_j) = +\infty$. Donc $\overline{\chi_{C_j}} = +\infty$.

Enfin $\overline{\chi_A}$ est mesurable comme somme dénombrables de fonctions mesurables.

Exercice 3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^{m+n}; \overline{\mathbb{R}})$. Notons (E) la conjonction des deux assertions suivantes :

(i) $\underline{f}, \overline{f} \in L^1(\mathbb{R}^m; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) $\int \underline{f} = \int \overline{f} = \int f$.

Notons (E') la conjonction des trois assertions suivantes :

(a) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, $f(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n; \overline{\mathbb{R}})$.

(b) Il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^m; \overline{\mathbb{R}})$ telle que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, $\int f(x,\cdot) = g(x)$.

(c) $\int g = \int f$.

Montrer que (E) équivaut à (E').

Correction : *On commence par supposer (E) et on va montrer les points (a), (b) et (c). Comme $\underline{f} \leq \overline{f}$, on déduit de (ii) que $\underline{f} = \overline{f}$ p.p. Notons N l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^m$ tel $\underline{f}(x) \neq \overline{f}(x)$. Pour tout $x \notin N$, on a $\underline{\int_{\mathbb{R}^n}} f(x,y)\mathrm{d}y = \overline{\int_{\mathbb{R}^n}} f(x,y)\mathrm{d}y$, on a donc $y \mapsto f(x,y) \in L^1$ ce qui montre le point (a) et $\underline{f} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\mathrm{d}y$, ce qui montre le point (b). avec $g = \underline{f}$ (qui est dans $L^1(\mathbb{R}^m)$ d'après (i). Le point (c) suit directement le (ii).*

On suppose maintenant (E'). Choisissons une fonction qui satisfait (b). Notons, N_1 l'ensemble des x tels que $y \mapsto f(x,y)$ ne soit pas dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ et N_2 l'ensemble x tels que $\int f(x,y)\mathrm{d}y \neq g(y)$.

Pour $x \notin N_1$, on a $\overline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \int f(x,y)\mathrm{d}y$.

Pour $x \notin (N_1 \cup N_2)$, $\overline{f}(x) = \overline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{\int} f(x,y)\mathrm{d}y = \underline{f}(x) = g(x)$. Or g est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, donc $\overline{f}$ et $\underline{f}$ le sont aussi ce qui montre (i). De plus, comme g, $\overline{f}$ et $\underline{f}$ sont égale p.p., on a $\int \overline{f} = \int \underline{f} = \int g$ et d'après (c), on en déduit $\int \overline{f} = \int \underline{f} = \int f$ ce qui donne (ii).

Théorie de la mesure et intégration — Université de Genève
Printemps 2020 — Section de Mathématiques

Série 12 – Correction (corrigée le 20/05/2020)

Exercice 1. Soient $0 < a < b$ deux réels strictement positifs. En considèrant l'intégrale

$$\int_{[a,b]}\int_{[0,1]} x^y \mathrm{d}\lambda_1(x)\mathrm{d}\lambda_1(y),$$

montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x}\mathrm{d}\lambda_1(x) = \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).$$

Correction : *La fonction*

$$\begin{array}{rccl} f\colon & [0,1]\times[a,b] & \to & \mathbb{R}_{\leq 0} \\ & (x,y) & \mapsto & x^y = \begin{cases} \exp(y\log x) & \textit{si } x > 0, \\ 0 & \textit{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

est continue sur $[0,1]\times[a,b]$ donc Riemann intégrable donc Lebesgue intégrable et donc d'après le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]}\int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(x)\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{[0,1]}\int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y)\mathrm{d}\lambda_1(x) \\ &= \int_{[0,1]\times[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}(\lambda_1\times\lambda_1)(x,y) \\ &= \int_{[0,1]\times[a,b]} f\mathrm{d}\lambda_2. \end{aligned}$$

Fixons $x \in [0,1]$. Si $x = 0$, on a

$$\int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y) = \int_{[a,b]} 0\mathrm{d}\lambda_1(y) = 0$$

Sinon, on a

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y) &= \int_{[a,b]} \exp(y\log(x))\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= R\int_{[a,b]} \exp(y\log(x))\mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \left[\frac{\exp(y\log(x))}{\log x}\right]_{y=a}^{y=b} \\ &= \frac{\exp(b\log(x))}{\log(x)} - \frac{\exp(a\log(x))}{\log(x)} = \frac{x^b - x^a}{\log(x)}. \end{aligned}$$

On note au passage que comme prévu, cette quantité est bien positive.

On intègre maintenant dans l'autre sens :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(x) &= R\int_{[0,1]} x^y \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{y+1} =: g(y). \end{aligned}$$

Ainsi on en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} \mathrm{d}\lambda_1(x) &= \int_a^b g(y) \mathrm{d}\lambda_1(y) \\ &= \circledR \int_a^b g(y) \mathrm{d}y \\ &= [\log(1+y)]_{y=a}^{y=b} \\ &= \log(1+b) - \log(1+a) \\ &= \log\left(\frac{1+b}{1+a}\right).\end{aligned}$$

Exercice 2. On considère l'espace mesurable $[0,1]$ muni de la tribu borélienne, la mesure de Lebesgue λ_1 et la mesure de comptage δ sur cet espace.

(1) Montrer que $\lambda_1 \ll \delta$.

Correction : *La seule partie X de $[0,1]$ pour laquelle $\delta(X) = 0$ est la partie vide. Or pour toute mesure μ, $\mu(\emptyset) = 0$. Ainsi, pour toute mesure μ, $\mu \ll \delta$. En particulier, $\lambda_1 \ll \delta$.*

(2) Montrer que λ_1 ne peux pas s'écrire sous la forme $f\delta$.

Correction : *Supposons qu'il existe une telle fonction f. Fixons $x \in [0,1]$, on a*

$$0 = \lambda_1(\{x\}) = \int_{[0,1]} \chi_{\{x\}}(t) f(t) \mathrm{d}\delta(t) = f(x) \int_{[0,1]} \chi_{\{x\}}(t) \mathrm{d}\delta(t) = f(x)\delta(\{x\}) = f(x).$$

Ainsi f est la fonction nulle. Mais alors on a :

$$1 = \lambda_1([0;1]) = \int_{[0;1]} \chi_{[0;1]}(t) f(t) \mathrm{d}\delta(t) = \int_{[0;1]} 0 \mathrm{d}\delta(t) = 0.$$

ce qui est absurde, donc une telle fonction f n'existe pas.

Exercice 3. Soient ν une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ et $(A_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{A}^\omega$. Montrer les assertions suivantes.

(1) Si la suite $(A_n)_{n\in\omega}$ est croissante, alors la suite $(\nu(A_k))_{k\in\omega}$ converge vers la valeur $\nu\left(\bigcup_{k\in\omega} A_k\right)$.

Correction : *Pour $k \in \omega$, notons $a_k = \nu(A_k)$. On pose $B_0 = A_0$ et pour $k \in \omega_{\geq 1}$, on note $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ et $b_k = \nu(B_k)$. Pour tout $n \in \omega_{\geq 1}$, on a $A_{n-1} = \bigcup_{k\in n} A_k = \bigsqcup_{k\in n} B_k$. On en déduit que pour tout $n \in \omega$,*

$a_n = \sum_{k\in n+1} b_k$ et que, par définition des mesures signées, on a

$$\nu\left(\bigsqcup_{k\in\omega} B_k\right) = \sum_{k\in\omega} b_k,$$

où la somme converge absolument. En particulier, la somme est bien définie et $\sum_{k\in\omega} b_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in n+1} b_k = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(2) Si la suite $(A_n)_{n\in\omega}$ est décroissante et $\nu(A_0) \in \mathbb{R}$, alors la suite $(\nu(A_k))_{k\in\omega}$ converge vers la valeur $\nu\left(\bigcap_{k\in\omega} A_k\right)$.

Correction : *Pour tout $n \in \omega$, on note $B_n = A_0 \setminus A_n$. Pour tout $n \in \omega$, on a $B_n \subseteq B_{n+1}$, d'après la question précédente,*

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) = \lim_{n\to\infty} (\nu(A_0) - \nu(A_n)).$$

Comme $\nu(A_0) \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} \nu(A_n)$ existe et que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) &= \nu(A_0) - \nu\left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) \\
&= \nu(A_0) - \nu\left(\bigcup_{n\in\omega} (A_0 \setminus A_n)\right) \\
&= \nu(A_0) - \nu\left(A_0 \setminus \left(\bigcap_{n\in\omega} \setminus A_n\right)\right) \\
&= \nu\left(\bigcap_{n\in\omega} A_n\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4. On considère $(D_n)_{n\in\omega}$ une suite de disques fermés inclus dans D le disque unité fermé et deux à deux disjoints. Pour $n \in \omega$, on note r_n le rayon de D_n et on suppose que pour tout $n \in \omega$, $r_n > 0$. Le but de cet exercice est de montrer que si $\lambda_2\left(D \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right)\right) = 0$ alors $\sum_{n\in\omega} r_n = +\infty$. Supposons, que $\sum_{n\in\omega} r_n < +\infty$.

(1) Pour $n \in \omega$, posons I_n la projection de D_n sur l'axe des abscisses. Montrer que pour presque tout $x \in [-1, 1]$, l'ensemble $\{n \in \omega | x \in I_n\}$ est fini.

Correction : *Pour tout $n \in \omega$, on a $\lambda_1(I_n) = 2r_n$. Considérons, la fonction mesurable et positive $f = \sum_{k\in\omega} I_k$. Notons que $f(x)$ est le cardinale de l'ensemble $\{n \in \omega | x \in I_n\}$. D'après le théorème de convergence monotone, on a*

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,1]} f \mathrm{d}\lambda_1 &= \lim_{n\to\infty} \int_{[-1,1]} \left(\sum_{k\in\omega} I_k\right) \mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in\omega} \int_{[-1,1]} I_k \mathrm{d}\lambda_1 \\
&= \sum_{k\in\omega} 2r_k < +\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi $N = f^{-1}(\{+\infty\})$ est de mesure nulle et donc pour presque tout x de $[-1, 1]$, l'ensemble $\{n \in \omega | x \in I_n\}$ est fini.

(2) Pour $x \in [0, 1]$, on note L_x la droite verticale passant par $(x, 0)$. Montrer que pour presque tout $x \in [0, 1]$,

$$\lambda_1\left(L_x \cap \left(D \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right)\right)\right) > 0.$$

Correction : *Notons $N' = N \cup \{-1, 1\}$, c'est toujours un ensemble négligeable. Soit $x \in (-1, 1) \setminus N'$. L'ensemble $L_x \cap D$ disons $[a, b]$ est un intervalle fermé d'intérieure non vide. En particulier il est connexe. L'ensemble $L_x \cap \bigcup_{n\in\omega} D_n$ est une union finite disjointe d'intervalles fermés. Son complémentaire est donc un ouvert de $[a, b]$. Montrons que cet ouvert est non vide. En effet si il était vide, par connexité, il existerait un $n \in \omega$ (unique) pour lequel $L_x \cap D = L_x \cap D_n$. En faisant un dessin on se convainc facilement qu'alors $D_n = D$ ce qui est absurde car les disque D_n sont supposés disjoints et de rayon non nul.*

Ainsi cet ensemble est un ouvert de $[a, b]$ non vide, il a donc mesure strictement positive.

(3) Conclure.

Correction : *On montre la contraposée de l'énoncé proposé : On sippoer comme dans les question précédente $\sum_{n\in\omega} r_n < +\infty$. On considère la fonction $f \colon \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}_{\leq 0}$ égale à*

$$\chi_D - \sum_{n\in\omega} \chi_{D_n} = \chi_{D\setminus\bigcup_{n\in\omega} D_n}.$$

La fonction f est $\mathcal{A}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1}$-mesurable (car χ_D et chaque χ_{D_n} est $\mathcal{A}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1}$-mesurable, car chaque disque est $\mathcal{A}_{\lambda_1} \otimes \mathcal{A}_{\lambda_1}$-mesurable, pourquoi ?) et λ_2 est un prolongement de $\lambda_1 \times \lambda_1$, donc

$$\int_D f \mathrm{d}(\lambda_1 \times \lambda_1) = \int_D f \mathrm{d}\lambda_2 = 0$$

Ainsi, f est dans $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \lambda_1 \times \lambda_1)$, on peut donc appliquer le théorème de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda_2\left(D \setminus \bigcup_{n\in\omega} D_n\right) &= \int_D f \mathrm{d}(\lambda_1 \times \lambda_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}\lambda_1(y)\lambda_1(x) \\
&= \int_R \lambda_1\left(L_x \cap \left(D \setminus \left(\bigcup_{n\in\omega} D_n\right)\right)\right)\mathrm{d}\lambda_1(x) > 0,
\end{aligned}$$

d'après la question précédente. On a bien montré la contraposée.

Série 13 – Correction (corrigée le 27/05/2020)

Exercice 1. Pour $j = 1, 2$, soient μ_j et ν_j deux mesures σ-finies sur un espace mesurable $(X_j, \mathcal{A}_j)$ telles que $\nu_j \ll \mu_j$. Montrer que $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ et que

$$\frac{\mathrm{d}(\nu_1 \times \nu_2)}{\mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2).$$

Correction :

La fonction $f : (x_1, x_2) \mapsto \frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(x_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(x_2)$ *est mesurables et à valeurs positive. Elle définit donc une mesure* μ_f *sur* $X_1 \times X_2$*. On va montrer que* $\mu_f = \nu_1 \times \nu_2$*. D'après le cours ce sont toutes les deux des mesures sur* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *et* $\mu_1 \times \mu_2$ *est* σ*-finie. Le théorème d'unicité (corollaire 7) implique qu'il suffit de vérifier que* $\mu_f = \nu_1 \times \nu_2$ *sur l'algèbre des unions disjointes finies de pavés mesurables. Par additivité des mesures il suffit donc de le vérifier pour les pavés.*

Pour $j = 1, 2$*, notons* $f_j = \frac{\mathrm{d}\nu_j}{\mathrm{d}\mu_j} \colon X_j \to \mathbb{R}$ *et fixons* $A_j \in \mathcal{A}_j$ *tels que* $\mu_j(A_j)$

Les fonctions $\chi_{A_1 \times A_2}$ *et* $((x_1, x_2) \mapsto f_1(x_1)f_2(x_2))$ *mesurables (pour la tribu produit) à valeurs positives. On peut donc appliquer le théorème de Tonelli (2 fois) :*

$$\begin{aligned}
(\nu_1 \times \nu_2)(A_1 \times A_2) &= \int \chi_{A_1 \times A_2} \mathrm{d}(\nu_1 \times \nu_2) \\
&= \int \chi_{A_1} \int \chi_{A_2} \mathrm{d}\nu_2 \mathrm{d}\nu_1 \\
&= \int f_1 \chi_{A_1} \int \chi_{A_2} f_2 \mathrm{d}\mu_2 \mathrm{d}\mu_1 \\
&= \int f_1 f_2 \chi_{A_1 \times A_2} \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) \\
&= \mu_f(A_1 \times A_2).
\end{aligned}$$

Exercice 2. Soient μ_1, μ_2, ν trois mesures signées sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ telles que $\mu_1 \perp \nu$, $\mu_1 \perp \nu$ et la somme $\mu_1 + \mu_2$ est bien définie. Montrer que $(\mu_1 + \mu_2) \perp \nu$.

Correction : *Quit à considérer* $-\mu_1$ *(et* $-\mu_2$ *du coup), on peut supposer que* μ *est à valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*. Ainsi,* $\mu_1 + \mu_2$ *est bien définie si* μ_2 *est elle aussi à valeurs dans* $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*.*

Il faut se rappeler que la notion de négligeabilité nécessite est un peu plus contraignante à écrire dans le cas des mesures signées.

Pour $j = 1, 2$ *comme* $\mu_j \perp \nu$*, il existe* N_j *tel que*

$$\mu_{j|\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N_j)} = 0 \textit{ et } \nu_{|\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N_j^c)} = 0$$

Soit $N = N_1 \cap N_2$*. Ainsi* $(\mu_1 + \mu_2)$ *se restreint à 0 sur* $\mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N) = \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N_1) \cap \mathcal{P}(N_1)$

De plus, si $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{P}(N^c)$*, on a* $A \subseteq (N_1^c \cup N_2^c)$*, donc* $A = (A \cap N_1^c) \sqcup (A \cap (N_2^c \setminus N_1^c))$ *donc* $\nu(A) = \nu(A \cap N_1^c) + \nu(A \cap (N_2^c \setminus N_1^c)) = 0 + 0$*. Ainsi* $(\mu_1 + \mu_2) \perp \nu$*.*

Notons que la preuve s'adapte sans problème aux sommes dénombrables de mesures singulières $(\mu_n)_{n \in \omega}$ *par rapport à une même mesure* ν*.*

Exercice 3. Soient μ une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, $Y \in \mathcal{A}$ et ν une mesure signée sur $(Y, \mathcal{A}(Y))$ singulière par rapport à $\mu_{|\mathcal{A}(Y)}$. Montrer que la mesure $\tilde{\nu}$ sur $(X, \mathcal{A})$ définie par $\tilde{\nu}(A) = \nu(A \cap Y)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ est singulière par rapport à μ.

Correction : *On se donne* $N \in \mathcal{A}(Y)$ *tel que* $\nu_{|\mathcal{A}(N)} = 0$ *et* $\left(\mu_{|\mathcal{A}(Y)}\right)_{|\mathcal{A}(Y \setminus N)} \mu_{|\mathcal{A}(Y \setminus N)} = 0$.

On pose $N' = N \sqcup X \setminus Y$. Soit $A \in \mathcal{A}(N')$. On a $A = (A \cap N) \sqcup (A \cap (X \setminus Y))$, on a

$$\tilde{\nu}(A) = \nu(Y \cap A) = \nu(Y \cap N \cap A) + \nu(Y \cap A \cap (X \setminus Y)) = \nu(N \cap (Y \cap A)) + \nu(\emptyset) = 0 + 0,$$

donc $\tilde{\nu}_{|\mathcal{A}(N')} = 0$ et donc N' est ν-négligeable. D'autre part, si $A \in \mathcal{A}(X \setminus N')$, on a $A \in \mathcal{A}(Y \setminus N)$, donc :

$$\mu(A) = \mu_{|\mathcal{A}(Y)} = 0.$$

Ainsi $X \setminus N'$ est μ-négligeable, donc $\tilde{\nu}$ est singulière par rapport à ν.

Exercice 4. Soient $X = (X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}(X; \overline{\mathbb{R}})$ une fonction semi-intégrable. Montrer que $(\mu_f)^{\pm} = \mu_{f^{\pm}}$ et $|\mu_f| = \mu_{|f|}$.

Correction : *Pour tout A mesurable, on a :*

$$\mu_f(A) = \int_A f \mathrm{d}\mu = \int_A (f^+ - f^-) \mathrm{d}\mu = \int_A f^+ - \int_A f^- \mathrm{d}\mu = \mu_{f^+}(A) - \mu_{f^-}(A).$$

Or μ_{f^+} et μ_{f^-} sont des mesures (non signées) et singulière entre elle (il suffit d'écrire $X = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{>0})) \sqcup f^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0})$. Donc par l'unicité de la décomposition de Jordan, on a : $\mu_f^+ = \mu_{f^+}$ et $\mu_f^- = \mu_{f^-}$.

Exercice 5. Soit ν une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ avec sa décomposition de Jordan $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Montrer que $E \in \mathcal{A}$ est ν-négligeable si et seulement si $|\nu|(E) = 0$.

Correction : *Soit E tel que $|\nu|(E) = 0$. On a dont $\nu^+(E) + \nu^-(E) = 0$ donc par positivité des mesures, $\nu^+(E) = \nu^-(E) = 0$ et donc E est ν^+ et ν^--négligeable, et donc, comme $\nu = \nu^+ - \nu^-$, est E ν-négligeable. En effet, si $A \in \mathcal{A}(E)$, $\nu(A) = \nu^+(A) - \nu^-(A) = 0 - 0 = 0$.*

Réciproquement, supposons E ν-négligeable. Comme ν^+ et ν^- sont singulières entre elles, on peut se donner P et N tels que P est ν^--négligeable et N est ν^+-négligeable et tel que $X = P \sqcup N$.

On a $\nu(E \cap P) = \nu^+(E \cap P) - \nu^-(E \cap P) = \nu^+(E \cap P) - 0$, donc $\nu^+(E \cap P) = 0$, or comme par définition de N, $\nu^+(E \cap N) = 0$, on obtient finalement, $\nu^+(E) = \nu^+(E \cap P) + \nu^-(E \cap N) = 0 + 0$. De même, $\nu^-(E) = 0$ et donc $|\nu|(E) = 0$.

Test 1 – Correction – 45 minutes (le 18/03/2020)

Exercice 1. Soit $\mathcal{F} = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rccl} \rho\colon & \mathcal{F} & \to & \mathbb{R} \\ &]a,b[& \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } a \geq b, \\ 1+b-a & \text{si } a < 1 < b, \\ b-a & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

(1) Justifier qu'on peut induire une mesure extérieure φ à l'aide de ρ.

Correction : *La famille $\mathcal{F}$ contient l'ensemble vide, de plus ρ est à valeur dans $\bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$. Donc, d'après la Proposition 3 du cours, la formule :*

$$\varphi(A) := \inf_{(R_i)_{i\in I} \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}(A)} \sum_{i \in I} \rho(R_i),$$

où $A \subseteq \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(A)$ désigne l'ensemble des recouvrements au plus dénombrable de A à l'aide de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appartenant à $\mathcal{F}$, est bien une mesure extérieure.

(2) Calculer $\varphi([0,1])$.

Correction : *Soit $\epsilon > 0$, on a $\left\{\left]-\frac{\epsilon}{2}, 1+\frac{\epsilon}{2}\right[\right\}$ est un recouvrement fini (avec un seul élément) de $[0,1]$, or on a $\rho\left(\left]-\frac{\epsilon}{2}, 1+\frac{\epsilon}{2}\right[\right) = 1 + \left(1+\frac{\epsilon}{2}\right) - \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) = 2+\epsilon$. Ainsi $\varphi([0,1]) \leq 2+2\epsilon$. Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on a $\varphi([0,1]) \leq 2$.*

Soit $(R_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de $[0,1]$ par des éléments de $\mathcal{F}$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(R_j)_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$ fini. Comme $1 \in [0,1]$, il existe au moins un $j_0 \in J$ tel que $1 \in R_{j_0}$.

Pour tout $j \in J$, on a $\rho(R_j) \geq \int_0^1 \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x$, et pour j_0, on a : $\rho(R_{j_0}) \geq 1 + \int_0^1 \chi_{R_{j_0}}(x)\mathrm{d}x$. De plus, comme $(R_j)_{j\in J}$ est un recouvrement de $[0,1]$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $\sum_{j\in J}\chi_{R_j}(x) \geq 1$. Autrement dit, $\sum_{j\in J}\chi_{R_j} \geq \chi_{[0,1]}$. Enfin, pour tout j la fonction $[0,1] \ni x \mapsto \chi_{R_j}(x)$ est continue par morceau donc Riemann intégrable et ainsi la fonction $[0,1] \ni x \mapsto \sum_{j\in J}\chi_{R_j}(x)$ est elle aussi Riemann intégrable (car la somme est finie), et on a :

$$\int_0^1 \sum_{j\in J} \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x \geq \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = 1$$

Finalement, on a :

$$\sum_{i\in I}\rho(R_i) \geq \sum_{j\in J}\rho(R_j) \geq 1 + \sum_{j\in J}\int_0^1 \chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x = 1 + \int_0^1 \sum_{j\in J}\chi_{R_j}(x)\mathrm{d}x \geq 2.$$

Comme le recouvrement au plus dénombrable R était quelconque on a bien $\varphi([0,1]) \geq 2$ et finalement $\varphi([0,1]) = 2$.

Exercice 2. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \varphi\colon & \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \to & \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0} \\ & X & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est vide,} \\ 1 & \text{si } X \text{ est fini non vide ou dénombrable,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que φ est une mesure extérieure.

Correction : *Il suffit de montrer que $\varphi(\emptyset) = 0$, que φ est croissante pour l'inclusion et qu'elle est σ-sous-additive. Le premier point est vrai par définition de φ. La croissance est évidente.*

Montrons la σ-sous-additivité : Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^\omega$, notons $B = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ On distingue trois cas $B = \emptyset$, B est non-vide et au plus dénombrable, et enfin B n'est pas dénombrable.

Si $B = \emptyset$, on a $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \omega$. et on a bien :

$$0 = \varphi(B) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n) = \sum_{n\in\omega} 0 = 0$$

Si B est non-vide et au plus dénombrable, on peut trouver un $n_0 \in \omega$ tel que A_{n_0} est non-vide et on a donc :

$$1 = \varphi(B) \leq \varphi(A_{n_0}) \leq \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n)$$

.

Si B n'est pas dénombrable, il existe au moins un n_0 tel A_{n_0} n'est pas dénombrable, et on a donc :

$$+\infty = \varphi(B) \leq \varphi(A_{n_0}) = +\infty = \sum_{n\in\omega} \varphi(A_n).$$

On en conclut que φ est une mesure extérieure.

Test 2 – Correction – 45 minutes (le 22/04/2020)

Exercice 1. Soit $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré complet. Soient $f, g \colon \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que $f \in L^1(\Omega)$ que $f = g$ p.p. C'est-à-dire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle.

(1) Montrer que g est mesurable.

Correction : *D'après les hypothèses, la fonction $h = g - f$ est nulle presque partout. Montrons qu'elle est mesurable. Soit A un borélien, il suffit de montrer que $h^{-1}(A)$ est mesurable. Notons $N = h^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, on a $\lambda_1(N) = 0$. On distingue deux cas : soit $0 \notin A$, soit $0 \in A$.*

Si $0 \notin A$, $h^{-1}(A) \subseteq N$ et donc $h^{-1}(A)$ est mesurable car la tribu $\mathcal{A}$ est complète.

Si $0 \in A$, $0 \notin A^c$ et $h^{-1}(A) = \left(h^{-1}(A^c)\right)^c$ est mesurable.

Dans tous les cas $h^{-1}(A)$ est mesurable donc h est mesurable et donc $g = f + h$ aussi.

(2) Montrer que $g \in L^1(\Omega)$ et que $\displaystyle\int f = \int g$.

Correction : *On va montrer que $h \in L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int h = 0$. Les fonction $h_+ = \max(h, 0)$ et $h_- = \max(-h, 0)$ sont elle aussi nulle presque partout donc mesurable et leur intégrales sont toutes les deux nulles, donc finalement, $\displaystyle\int h = \int h_+ - \int h_- = 0$. On en déduit que $g = f + h$ est dans $L^1(\Omega)$ et $\displaystyle\int g = \int f - \int h = \int f$.*

Indication : pour les deux questions, on pourra considérer la fonction $g - f$.

Exercice 2. Soit $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})^\omega$ une suite de fonctions mesurables ($\mathbb{R}$ étant munie de la tribu borélienne). Montrer que les fonctions

$$\begin{array}{rccl} \inf_{n\in\omega} f\colon & \Omega & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \mapsto & \inf\{f_n(x) | n \in \omega\}. \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} \sup_{n\in\omega} f\colon & \Omega & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & x & \mapsto & \sup\{f_n(x) | n \in \omega\}. \end{array}$$

sont mesurables.

Correction : *Notons $g = \sup_{n\in\omega} f_n$. La tribu borélienne est engendrée par les ensembles de la forme $I_a :=]a, +\infty[$, pour $a \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de montrer $g^{-1}(I_a)$ est mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$. On fixe dont un $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On va montrer que :*

$$g^{-1}(I_a) = \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a),$$

ce qui suffit pour conclure, car chacun des ensembles $f_n^{-1}(I_a)$ est mesurable.

Soit $n \in \omega$ et $x \in f_n^{-1}(I_a)$, on a $a < f_n(x) \leq g(x)$, donc $g(x) > a$, donc $x \in g^{-1}(I_a)$. Donc $\bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a) \subseteq g^{-1}(I_a)$.

Réciproquement, soit $x \in g^{-1}(a)$, on a donc $g(x) > a$. Comme $\frac{a+g(x)}{2} < g(x)$, d'après la définition de sup, on peut trouver $n \in \omega$ tel que $f_n(x) \geq \frac{a+g(x)}{2} > a$, donc $x \in f_n^{-1}(I_a)$ et donc $x \in \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a)$. Et finalement $g^{-1}(I_a) \subseteq \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a)$ et donc $g^{-1}(I_a) = \bigcup_{n\in\omega} f_n^{-1}(I_a)$.

Pour l'infimum, on pourrait raisonner exactement de la même manière avec les ensembles de la forme $]-\infty, b[$, mais on peut aussi se servir du fait suivant :

$$\inf_{n\in\omega} f_n = -\sup_{n\in\omega}(-f_n).$$

Ceci permet de conclure car comme f_n est mesurable pour tout n, $-f_n$ est elle aussi mesurable pour tout n et donc leur supremum et finalement $\inf_{n\in\omega} f_n$ est mesurable.

Test 3 – Correction – 45 minutes (le 13/05/2020)

L'énoncé de ce test est volontairement trop long pour la durée impartie. Le barème en tient compte.

Exercice 1. Soit X un ensemble et $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{P}(X)$ une algèbre d'ensemble. On note $\mathcal{A}_\sigma$ la collection des unions au plus dénombrables d'ensemble de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ la collection des intersections au plus dénombrables d'ensembles de $\mathcal{A}_\sigma$. Soit μ_0 une prémesure sur $\mathcal{A}$ et $\mu^\star$ la mesure extérieure induite par μ_0.

(1) Montrer que pour tout $E \subset X$, et tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tel que $E \subseteq A$ et $\mu^\star(A) \leq \mu^\star(E) + \epsilon$.

Correction : *On fixe $E \subset X$ et $\epsilon > 0$. Par définition de la mesure extérieure induite,*

$$\mu^\star(E) = \inf \left\{ \sum_{i\in I} \mu_0(A_i) \middle| (A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I \text{ est un recouvrement au plus dénombrable de E} \right\}$$

On peut donc se donner $(A_i)_{i\in I} \in \mathcal{A}^I$ tel que $\sum_{i\in I} \mu_0(A_i) \leq \mu^\star(E) + \epsilon$ et $E \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i =: A$. On a, par définition de la mesure induite, $\mu^\star(A) \leq \sum_{i\in I} \mu_0(A_i) \leq \mu^\star(E) + \epsilon$. Et d'autre part, on a bien $A \in \mathcal{A}_\sigma$.

(2) Soit $E \subseteq X$ tel que $\mu^\star(E) < \infty$. Montrer que E est mesurable si et seulement si il existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tel que $E \subseteq B$ et $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

Correction : *On commence par supposer l'existence d'un tel B et on va montrer que E est mesurable (via la caractérisation de Carathéodory). Notons tout d'abord que d'après le cours, la tribu des mesurables contient $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ et donc ce B est mesurable. Soit $C \subseteq X$ fixé quelconque, il nous suffit de montrer que*

$$\mu^\star(C) = \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(C \setminus E).$$

On va montrer que :

$$\mu^\star(C \cap E) = \mu^\star(C \cap B) \qquad \text{et} \qquad \mu^\star(C \setminus E) = \mu^\star(C \setminus B).$$

Comme $(C \cap E) \subseteq (C \cap B)$, on a $\mu^\star(C \cap E) \leq \mu^\star(C \cap B)$ (par croissance des mesures extérieures). Comme $C \cap B = (C \cap E) \cup (C \cap B \setminus E)$. Par sigma sous-additivite, on obtient $\mu^\star(C \cap B) \leq \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(C \cap B \setminus E) \leq \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(C \cap E)$. Ainsi, on $\mu^\star(C \cap E) = \mu^\star(C \cap B)$

Comme $(C \setminus B) \subseteq (C \setminus E)$, on a $\mu^\star(C \setminus B) \leq \mu^\star(C \setminus E)$. D'autre part, comme $C \setminus E = (C \setminus B) \cup (C \cap (B \setminus E))$, on a $\mu^\star(C \setminus E) \leq \mu^\star(C \setminus B) + \mu^\star(C \cap (B \setminus E)) \leq \mu^\star(C \setminus B) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(C \setminus B)$, on a donc $\mu^\star(C \setminus B) = \mu^\star(C \setminus E)$.

Comme B est mesurable, on a :

$$\begin{aligned} \mu^\star(C) &= \mu^\star(C \cap B) + \mu^\star(C \setminus B) \\ &= \mu^\star(C \cap E) + \mu^\star(C \setminus E), \end{aligned}$$

et donc E est mesurable.

Supposons maintenant E mesurable et de mesure finie. Pour tout entier $n \geq 1$, donnons nous (grace à la question précédente) un $A_n \in \mathcal{A}_\sigma$ tel que $E \subseteq A_n$ et $\mu^\star(A_n) \leq \mu^\star(E) + \frac{1}{n}$.

Notons $B = \bigcap_{n\geq 1} A_n$. On a bien $E \subseteq B$ et $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$. Reste à voir que $\mu^\star(B \setminus E) = 0$.

Tout d'abord, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\mu^\star(E) \leq \mu^\star(B) \leq \mu^\star(A_n) \mu^\star(E) + \frac{1}{n},$$

donc $\mu^\star(E) = \mu^\star(B)$ Comme E est mesurable, on a :

$$\mu^\star(B) = \mu^\star(B \cap E) + \mu^\star(B \setminus E) = \mu^\star(E) + \mu^\star(B \setminus E).$$

Comme $\mu^\star(B) = \mu^\star(E)$ est fini, on a $\mu^\star(B \setminus E) = 0$

Exercice 2. Pour tout entier $k \geq 1$, on définit

$$f_k\colon \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{>0} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-kx} - 2e^{-2kx}. \end{array}$$

(1) Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\omega_{\geq 1}}$ converge ponctuellement sur $\mathbb{R}_{>0}$, vers une fonction que l'on appelera f et que l'on calculera.

Correction : *Soient $x \in \mathbb{R}_{>0}$ et $n \in \omega_{\geq 1}$ fixés quelconques. On calcule*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f_k(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-kx} - 2e^{-2kx}\right) = \sum_{k=1}^{n} e^{-kx} - 2\sum_{k=1}^{n} e^{-2kx} \\
&= \frac{e^{-x} - e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} - \frac{2\left(e^{-2x} - e^{-2(n+1)x}\right)}{1-e^{-2x}} = \frac{\left(e^{-x} - e^{-(n+1)x}\right) + \left(e^{-2x} - e^{-(n+2)x}\right) - 2\left(e^{-2x} - e^{-2(n+1)x}\right)}{1-e^{-2x}} \\
&= \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + e^{-n+1}\frac{2e^{-(n+1)x} - 1 - e^{-x}}{1-e^{-2x}}
\end{aligned}$$

Cette quantité tend vers $\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ quand n tend vers $+\infty$. La suite $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\omega_{\geq 1}}$ converge donc ponctuellement sur $\mathbb{R}_{>0}$ vers $f\colon\ x \mapsto \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

(2) Calculer

$$\int_{]0,\infty[} f \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{]0,\infty[} f_k.$$

Correction : *Par théorème de convergence monotone pour la suite $(f\chi_{[\frac{1}{n},n]})_{n\in\omega_{\geq 1}}$, et comparaison Riemann/Lebesgue, on a*

$$\int_{]0,\infty[} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},n]} f = \lim_{n\to+\infty} \circledR\!\!\int_{[\frac{1}{n},n]} f = \lim_{n\to+\infty} \left[-\log(1+e^{-x})\right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=n} = \log 2.$$

D'autre part, pour tout entier strictement positif k, on a, par théorème de convergence dominée pour la suite $(f_k\chi_{[\frac{1}{n},n]})_{n\in\omega_{\geq 1}}$ (par $|f_k|$), et comparaison Riemann/Lebesgue, on a

$$\int_{]0,\infty[} f_k = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},n]} f = \lim_{n\to+\infty} \circledR\!\!\int_{[\frac{1}{n},n]} f_k = \lim_{n\to+\infty} \left[-e^{-x} + e^{-2x}\right]_{x=\frac{1}{n}}^{x=n} = 1 - 1 = 0.$$

(3) Commenter.

Correction : *Les deux quantités sont différentes, ce qui montre que le théorème de convergence dominé ne s'applique pas dans ce cas : Il manque l'hypothèse de domination.*