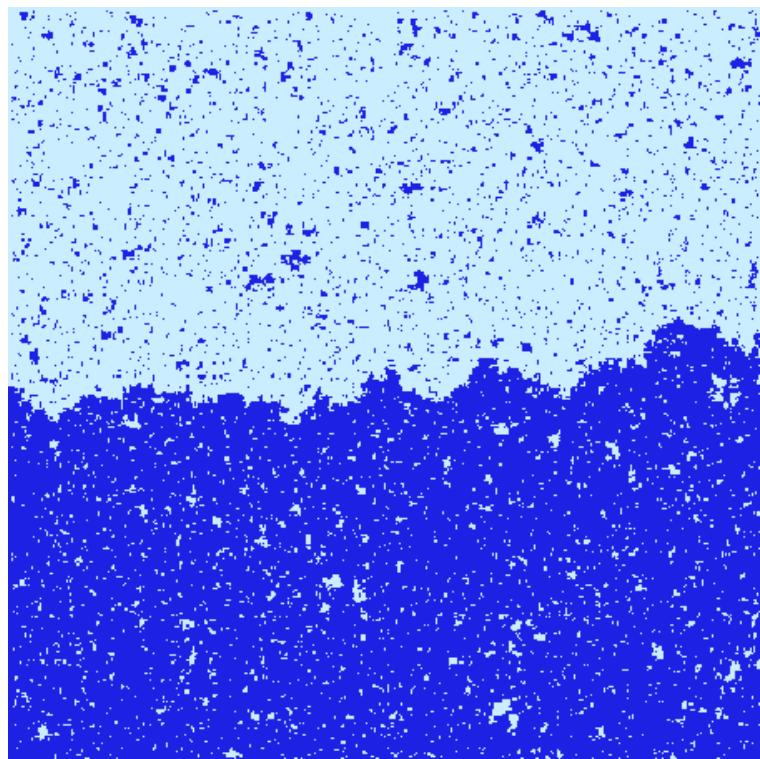




UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE

# LE MODÈLE D'ISING

Y. Velenik



— Version du 25 mai 2009 —

Dernière version téléchargeable à l'adresse  
<http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html>

2008-2009



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction au modèle d'Ising</b>	<b>7</b>
1.1	Définition informelle	7
1.2	Transition de phase	8
1.3	Champ magnétique	12
1.4	Conditions au bord	13
1.5	Quelques interprétations	14
1.5.1	Ferro-aimant	14
1.5.2	Gaz réticulaire	14
1.5.3	Quelques autres interprétations et applications	15
1.6	Quelques autres modèles classiques	15
1.6.1	Modèle de Potts	15
1.6.2	Modèle $O(N)$	15
1.6.3	Modèle de percolation de Bernoulli	16
1.6.4	Modèle de dimères	16
1.7	Quelques ouvrages de référence	16
<b>2</b>	<b>Le modèle et quelques propriétés de base</b>	<b>17</b>
2.1	Définition du modèle	17
2.2	Les inégalités de corrélation	18
2.2.1	Inégalités GKS	18
2.2.2	Inégalités FKG	18
2.3	Limite thermodynamique	19
2.3.1	Structure métrique sur $\Omega$ .	19
2.3.2	Fonctions continues et fonctions locales.	19
2.3.3	Convergence des mesures	20
2.3.4	Mesures de Gibbs en volume infini et transition de phase du 1er ordre.	20
2.3.5	Deux familles de fonctions locales.	20
2.3.6	Mesures limites avec conditions au bord + et -.	21
<b>3</b>	<b>Aimantation et énergie libre</b>	<b>23</b>
3.1	Une première caractérisation de l'unicité	23
3.2	Quelques propriétés de l'aimantation	24
3.3	L'énergie libre	25
3.4	Une seconde caractérisation de l'unicité	28

## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>4 Diagramme de phase</b>	<b>31</b>
4.1 Non unicité à basse température . . . . .	31
4.1.1 Représentation basse température . . . . .	32
4.1.2 Preuve du Théorème 4.1.1 . . . . .	33
4.2 Unicité à haute température . . . . .	34
4.2.1 La représentation haute température . . . . .	34
4.2.2 Preuve du Théorème 4.2.1 . . . . .	35
4.3 Unicité en champ magnétique non nul . . . . .	36
<b>5 Dualité de Kramers-Wannier</b>	<b>39</b>
5.1 Dualité haute température/basse température . . . . .	39
5.2 Détermination de $\beta_c(2)$ . . . . .	41
<b>6 La FK-percolation</b>	<b>43</b>
6.1 Définition et propriétés élémentaires . . . . .	43
6.1.1 Définition . . . . .	43
6.1.2 Propriétés de base . . . . .	44
6.2 Relation avec les modèles d'Ising et de Potts . . . . .	45
6.3 Transition de phase et percolation . . . . .	47
6.4 Inégalités de comparaison . . . . .	48
6.5 Dualité . . . . .	49
6.6 Une application de la dualité . . . . .	51
<b>7 Représentation en courants aléatoires</b>	<b>55</b>
7.1 La représentation . . . . .	55
7.1.1 Champ magnétique nul . . . . .	55
7.1.2 Champ magnétique $h > 0$ . . . . .	56
7.1.3 Un peu de terminologie . . . . .	58
7.2 Le "switching lemma" . . . . .	59
7.3 Applications . . . . .	60
7.3.1 Décroissance exponentielle de la fonction tronquée . . . . .	61
7.3.2 L'inégalité GHS . . . . .	62
<b>8 Retour sur la représentation haute température</b>	<b>65</b>
8.1 Représentation en ligne aléatoire . . . . .	65
8.2 Quelques propriétés des poids . . . . .	66
8.3 Existence de la masse . . . . .	68
8.4 Une application de l'inégalité de Simon . . . . .	69
<b>9 Algorithmes de simulation</b>	<b>71</b>
9.1 Méthode de Monte-Carlo . . . . .	71
9.2 Simulation parfaite . . . . .	72
9.3 Algorithmes par amas . . . . .	75
9.3.1 Dynamique de Swendsen-Wang . . . . .	76
<b>A Appendices techniques</b>	<b>79</b>
A.1 Preuve des inégalités de corrélation . . . . .	79
A.1.1 Inégalités GKS . . . . .	79
A.1.2 Inégalités FKG . . . . .	81
A.2 Fonctions convexes . . . . .	82
A.3 Interchange de limites . . . . .	82

## TABLE DES MATIÈRES

---

A.4 Sous-additivité . . . . .	83
<b>B Exercices</b>	<b>85</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>90</b>

*TABLE DES MATIÈRES*

---

# Chapitre 1

## Introduction au modèle d'Ising

Dans cette introduction, nous allons introduire le modèle d'Ising et discuter de façon informelle certaines de ses propriétés. L'analyse rigoureuse des résultats décrits dans cette introduction nous occupera une bonne partie du cours.

Le modèle d'Ising est certainement le plus célèbre modèle de Physique Statistique, et a été le sujet de milliers d'articles de recherche depuis son introduction par Wilhelm Lenz en 1920. Le nom “modèle d'Ising” (parfois, mais beaucoup plus rarement, appelé plus justement modèle de Lenz-Ising, comme suggéré par Ising lui-même) a été créé par Rudolph Peierls en référence à la thèse de 1925 d'Ernst Ising, effectuée sous la direction de Lenz, et consacrée à la version unidimensionnelle du modèle. Sa simplicité et la richesse de son comportement ont rapidement fait de ce modèle le laboratoire de prédilection pour tester les nouvelles idées et méthodes en Physique Statistique. En outre, de par ses nombreuses interprétations, en Physique et dans beaucoup d'autres domaines, il est utilisé afin de décrire qualitativement, et parfois quantitativement, une grande variété de situations.

Comme nous le verrons plus loin, le modèle d'Ising est également l'un des modèles les plus simples présentant une transition de phase. Durant les premières décennies du XXème siècle, il était loin d'être universellement admis que la Physique Statistique, une théorie encore jeune à l'époque, puisse expliquer les transitions de phase. Cette question fut réglée par Lars Onsager en 1944, grâce à son analyse détaillée du modèle d'Ising bidimensionnel prouvant l'existence d'une transition de phase dans la limite thermodynamique ; ce travail amorça le développement de la théorie moderne des phénomènes critiques. (Il est historiquement intéressant de noter que l'existence d'une transition de phase dans ce modèle avait en fait été établie 7 ans plus tôt dans le travail de Peierls mentionné plus haut, mais celui-ci semble être passé inaperçu à l'époque.)

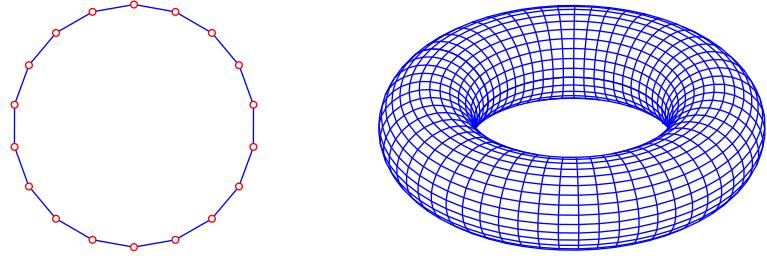
### 1.1 Définition informelle

Le modèle d'Ising peut être défini sur un graphe arbitraire, mais nous nous contenterons de considérer le cas classique d'un réseau (hyper)cubique. Plus précisément, considérons le graphe avec ensemble de sommets  $V_N = \{1, \dots, N\}^d$  et avec une arête connectant chaque paire de sommets plus-proches-voisins (c'est-à-dire tels que  $\|j - i\|_2 = 1$ ) ; afin de ne pas introduire de distinction entre les sommets se trouvant au bord de  $V_N$  et ceux se trouvant à l'intérieur, nous ajoutons également un lien entre chaque paire de sommets  $i$  et  $j$  tels qu'il existe  $k \in \{1, \dots, d\}$  avec  $i_k = 1$ ,  $j_k = N$  et  $i_{k'} = j_{k'}$  pour tout  $k' \neq k$  (*cf. figure 1.2*). On dit alors que le modèle est à **condition au bord périodique** ; notons  $G_N^{\text{per}} \stackrel{\text{déf}}{=} (V_N, \mathcal{E}_N^{\text{per}})$  le graphe correspondant. Nous utiliserons également la notation  $j \sim i$  lorsque  $(i, j) \in \mathcal{E}_N^{\text{per}}$ .

On appelle **configuration** du modèle d'Ising un élément  $\omega \in \Omega_N \stackrel{\text{déf}}{=} \{-1, 1\}^{V_N}$  ;  $\Omega_N$  est l'espace des configurations. La variable aléatoire  $\sigma_i : \Omega_N \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $\sigma_i(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_i$ , est appelée le **spin** au sommet  $i$ .



**Fig. 1.1** – Ernst Ising (gauche), Wilhelm Lenz (milieu), et Lars Onsager (droite)



**Fig. 1.2** – Graphes avec condition au bord périodique, en dimension 1 et 2.

À chaque configuration  $\omega$  est associée son énergie

$$\mathcal{H}_{N;\beta}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} -\beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_N^{\text{per}}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega),$$

où le paramètre  $\beta \in \mathbb{R}^+$  est appelé **température inverse**. On introduit alors la mesure de probabilité suivante sur  $\Omega_N$ ,

$$\mu_{N;\beta}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{Z_{N,\beta}} \exp(-\mathcal{H}_N(\omega)).$$

La constante de normalisation

$$Z_{N;\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\omega \in \Omega_N} \exp(-\mathcal{H}_N(\omega))$$

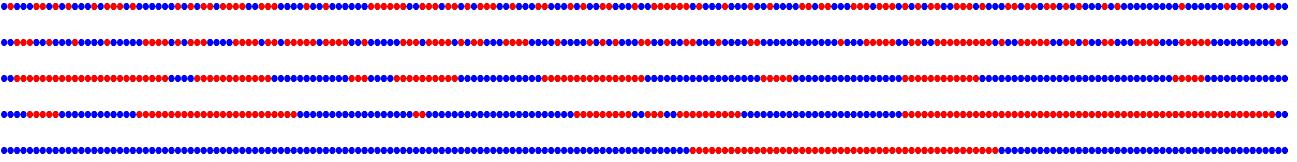
est appelée **fonction de partition** et jouera un rôle important dans les prochains chapitres. On voit que cette mesure favorise les configurations ayant une énergie basse.

## 1.2 Transition de phase

On vérifier aisément la propriété de Markov (spatiale) suivante : la loi de  $\sigma_i$  étant donné que  $\sigma_j = s_j$ , pour tout  $j \neq i$ , ne dépend que de  $\{s_j : j \sim i\}$ . Plus précisément, pour tout  $s \in \{-1, 1\}^{V_N}$ ,

$$\mu_{N;\beta}(\sigma_i = s_i \mid \sigma_j = s_j, \forall j \neq i) = \frac{\exp(\beta s_i \sum_{j \sim i} s_j)}{\exp(\beta \sum_{j \sim i} s_j) + \exp(-\beta \sum_{j \sim i} s_j)}. \quad (1.1)$$

On voit de (1.1) que, lorsque  $\beta \neq 0$ , un spin va avoir tendance à prendre la même valeur que la majorité de ses voisins (puisque  $s_i \sum_{j \sim i} s_j$  est maximal lorsque les signes de  $s_i$  et  $\sum_{j \sim i} s_j$  coïncident). On peut alors se demander si cette interaction entre spins voisins va conduire à un ordre dans tout le système. Commençons par considérer deux cas limites.



**Fig. 1.3** – Configurations typiques du modèle d'Ising en dimension 1 avec condition au bord périodique pour  $N = 200$ , pour différentes valeurs du paramètre  $p_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - e^{-2\beta}$  : (de haut en bas) 0, 0,5, 0,9, 0,95, 0,99.

1.  $\beta = 0$ . Dans ce cas, les spins forment une famille de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{2}$ . La loi des grands nombres s'applique évidemment, et implique que lorsque  $N$  est très grand,  $N^{-d} \sum_{i \in V_N} \sigma_i \approx 0$ , et le théorème central limite montre que cette dernière quantité est en fait de l'ordre de  $N^{-d/2}$ . En particulier, une configuration typique aura approximativement la même densité de spins prenant valeur 1 et -1.
2.  $\beta = \infty$ . Dans ce cas, les spins sont très fortement dépendants : seules deux configurations ont probabilité strictement positive (égale à 1/2 par symétrie),  $\omega_+ \equiv 1$  et  $\omega_- \equiv -1$ . En effet, toute autre configuration  $\omega'$  a une énergie plus élevée, et donc  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mu_{N;\beta}(\omega') / \mu_{N;\beta}(\omega_+) = 0$ . En particulier, la loi des grands nombres est violée dans cette limite : l'espérance de chacune des variables aléatoires  $\sigma_i$  est égale à 0, mais la loi de  $N^{-d} \sum_{i \in \Lambda_N} \sigma_i$  converge vers  $\frac{1}{2}\delta_{+1} + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ .

Manifestement, aucune information ne peut être transmise lorsque  $\beta = 0$  : la connaissance de la valeur d'un spin ne fournit aucune information sur l'état des autres spins. La situation est opposée lorsque  $\beta = \infty$  : la connaissance de la valeur du spin en un sommet donné du graphe détermine complètement la configuration lorsque  $\beta = \infty$ , l'information étant donc transmise arbitrairement loin dans ce cas. Le problème à présent est de déterminer quel type de comportement a lieu pour les valeurs intermédiaires (plus intéressantes) de  $\beta$ .

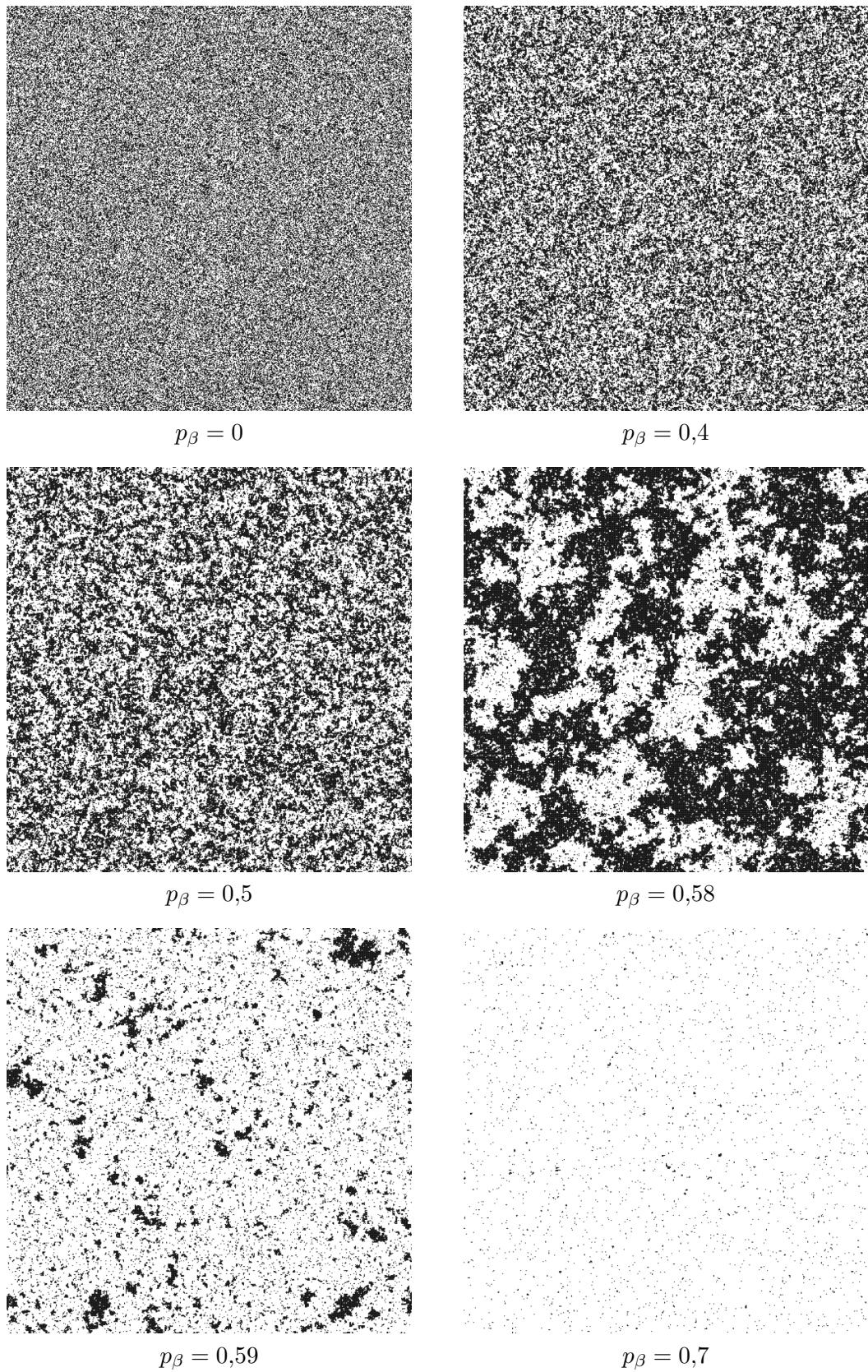
Les figures 1.3 et 1.4 contiennent des configurations typiques du modèle d'Ising avec condition au bord périodique en dimensions 1 et 2 respectivement, pour diverses valeurs du paramètre  $\beta$  (en fait, en fonction du paramètre  $p_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - e^{-2\beta} \in [0, 1]$ ). Dans les deux cas, on constate (comme on pouvait s'y attendre) une augmentation de la taille des amas de spins de même valeur lorsque  $p_\beta$  augmente. En dimension 1, la symétrie entre les deux valeurs possibles du spin semble maintenue, en tout cas jusqu'à des valeurs de ce paramètre très proches de 1 ; l'ordre apparent pour  $p_\beta \approx 1$  semble bien n'être qu'un phénomène de taille finie, et il semble raisonnable d'imaginer que la symétrie serait encore présente, pour toute valeur de  $p_\beta < 1$ , si on considérait un système suffisamment grand. Par contre, en dimension 2, la situation semble très différente : si les amas grandissent tout en maintenant la symétrie entre les deux types de spins jusqu'à  $p_\beta \approx 0,58$ , un changement abrupt a lieu près de cette valeur, et à partir de  $p_\beta \approx 0,59$ , les densités des deux types de spins ne sont plus égales, le système semblant avoir spontanément fait un choix en faveur d'un des deux types de spin.

Afin de faire une analyse un peu plus convaincante, il est utile de faire des observations plus quantitatives. Les graphiques présentés sur la figure 1.5 montrent le comportement de la fonction suivante,

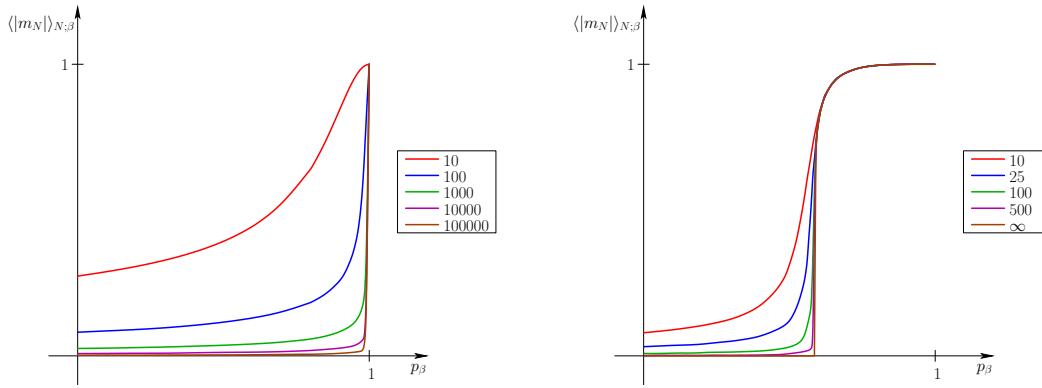
$$\langle |N^{-d} \sum_{i \in V_N} \sigma_i| \rangle_{N;\beta} \equiv \langle |m_{N;\beta}| \rangle_{N;\beta},$$

où  $\langle \cdot \rangle_{N;\beta}$  est une notation standard pour l'espérance sous la mesure  $\mu_{N;\beta}$ . Cette quantité mesure bien la différence entre les densités des deux espèces de spins. (La raison pour laquelle on prend la valeur absolue est que sinon l'espérance est nulle par symétrie.) La variable aléatoire  $m_{N;\beta}$  est appelée **aimantation**.

Ces graphes confirment l'analyse précédente : en dimension 1, il semble bien que la fonction limite, que l'on notera  $m^*(\beta)$ , soit identiquement nulle, sauf en  $p_\beta = 1$  (c'est-à-dire  $\beta = \infty$ ) où elle vaut 1,



**Fig. 1.4** – Configurations typiques du modèle d’Ising en dimension 2 avec condition au bord périodique ( $N = 500$ ), pour différentes valeurs du paramètre  $p_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - e^{-2\beta}$ .



**Fig. 1.5** – Espérance de  $|m_{N;\beta}|$  en fonction de  $p_\beta$  pour le modèle d'Ising en dimension 1 (gauche) et 2 (droite) avec condition au bord périodique, pour différentes valeurs de  $N$ .

alors qu'en dimension 2, la fonction limite semble non triviale, devenant strictement positive à partir d'une valeur  $p \approx 0,58$  (la courbe limite est aussi représentée).

Nous verrons dans les chapitres suivants que tout ceci est effectivement correct. On appelle **transition de phase** le phénomène abrupt observé en dimension 2 (et qui est en fait aussi présent en dimensions supérieures) ; nous en verrons une définition précise plus tard. La perte de symétrie qui l'accompagne est appelée **brisure spontanée de symétrie**. L'absence de transition de phase en dimension 1 est le résultat principal de la thèse d'Ising [29], et est en fait très simple ; nous démontrerons un résultat plus général dans la section 4.2 (et en verrons des preuves alternatives élémentaires en exercices). La preuve de l'existence d'une transition de phase en dimension 2 et plus est due à un autre physicien, Rudolf Peierls, qui introduisit en 1936 un argument qui a depuis lors été généralisé à une classe immense de systèmes [41]. Nous l'étudierons dans la section 4.1. En dimension 2, il est en fait possible de calculer explicitement la fonction limite  $m^*(\beta)$  apparaissant dans le graphe de la figure 1.5 ; ce résultat est dû au chimiste (prix Nobel de chimie, mais aussi physicien et mathématicien virtuose à ses heures) Lars Onsager [40, 54]. On trouve qu'elle est donnée par la fonction

$$m^*(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \left[ \max \left( 1 - \left( \frac{2(1-p)}{p(2-p)} \right)^4, 0 \right) \right]^{1/8}, \quad (1.2)$$

ce qui implique en particulier que la valeur de  $\beta$  à laquelle la transition a lieu, appelée **valeur critique** et notée  $\beta_c$ , est

$$\beta_c = \frac{1}{2} \operatorname{asinh}(1) \cong 0,440687,$$

ce qui correspond à  $p_{\beta_c} = \sqrt{2}/(1 + \sqrt{2}) \cong 0,585786$ . Nous ne verrons pas comment de telles formules peuvent être dérivées, mais référons à [39] pour une description détaillée. Une dérivation semi-heuristique, simple, de la valeur de  $\beta_c$  sera également donnée dans la Section 5.2.

On voit que le phénomène de transition de phase est d'autant plus marqué que la taille du système est importante. Il est donc mathématiquement raisonnable d'approximer les très grands systèmes par des systèmes infinis (par la suite, il faudra bien sûr estimer les corrections dues aux effets de taille finie). Au vu des exemples précédents, on constate que des systèmes de taille modérée sont déjà raisonnablement approchés par le cas limite<sup>1</sup>. Un tel passage à des systèmes infinis est appelé **passage à la limite thermodynamique**. Dans cette limite, il va être possible de donner des définitions précises des transitions de phases et d'autres concepts associés.

Le passage à la limite pose plusieurs problèmes. En particulier, celui de définir de façon précise le modèle sur des graphes infinis. Une première méthode, particulièrement appropriée pour étudier les

<sup>1</sup>Surtout si l'on pense que pour les applications à la physique, on a souvent  $N^d$  de l'ordre de  $10^{23}$  !

propriétés générales de telles mesures, est de donner un sens à la propriété de Markov énoncée plus haut : on peut montrer que, pour un graphe fini, la donnée d'un tel système de probabilités conditionnelles (ceci sous-entend certaines propriétés de consistance) permet de reconstruire une unique mesure de probabilité. L'extension de ce résultat à des graphes infinis n'est pas vraie : il existe en général une infinité de mesures de probabilité compatibles avec un tel système de probabilités conditionnelles. L'absence d'unicité correspondra précisément au régime où il y a transition de phase. Intuitivement, dans le cas du modèle d'Ising, on obtiendra, par exemple, une mesure avec une densité supérieure à  $1/2$  de spin  $+1$ , et une autre avec une densité supérieure à  $1/2$  de spin  $-1$ , et également toutes les combinaisons convexes de ces deux mesures (ainsi que d'autres, parfois).

La seconde approche, plus intuitive, est celle que nous suivrons ici : nous considérerons des suites de mesures de probabilité sur des graphes de plus en plus grands, et définirons les mesures sur le graphe limite comme étant l'ensemble des points d'accumulation de ces suites. Pour cela, il faudra évidemment introduire une topologie appropriée sur l'espace des mesures de probabilité. L'ensemble de mesures obtenu de cette façon est le même (modulo quelques subtilités que nous ignorerons) que celui obtenu avec l'approche précédente. En particulier, l'existence de plusieurs points d'accumulation correspondra à nouveau à la présence d'une transition de phase.

### 1.3 Champ magnétique

Nous venons de voir que la présence d'une transition de phase dans ce modèle se traduit par une brisure de la symétrie entre les deux espèces de spins, les configurations typiques possédant des densités différentes de chacun des deux types de spins. Il est donc naturel de généraliser le modèle d'Ising en introduisant un paramètre supplémentaire permettant de jouer sur la symétrie entre les spins. Ce paramètre a aussi une interprétation naturelle en terme de la modélisation originelle d'Ising, et était déjà présent dans son analyse : le **champ magnétique** (extérieur)  $h$ . On associe donc à chaque configuration l'énergie suivante,

$$\mathcal{H}_{N;\beta,h}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} -\beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_N^{\text{per}}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in V_N} \sigma_i(\omega),$$

et la mesure de probabilité correspondante,

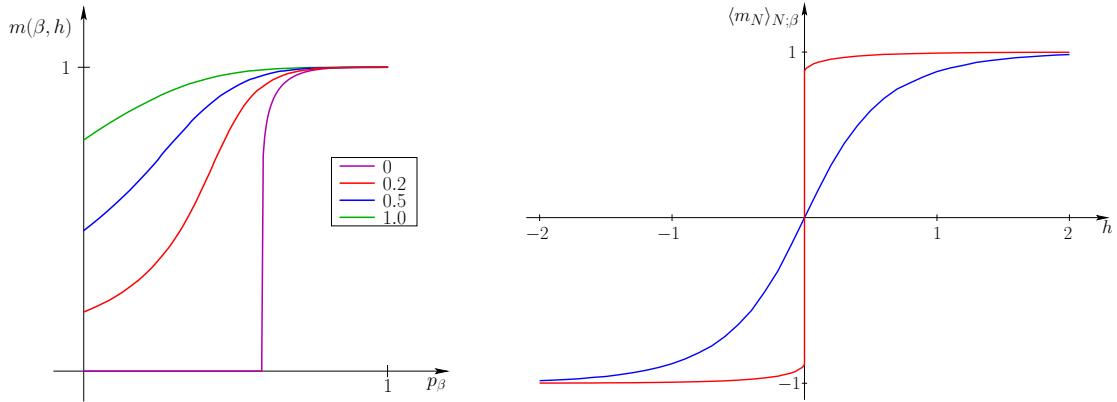
$$\mu_{N;\beta,h}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{Z_{N;\beta,h}} \exp(-\mathcal{H}_{N;\beta,h}(\omega)).$$

La figure 1.6 montre l'effet du paramètre  $h$  sur le comportement de la fonction limite  $m(\beta, h)$ , définie par

$$m(\beta, h) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle N^{-d} \sum_{i \in V_N} \sigma_i \rangle_{N;\beta,h}.$$

Le graphe de gauche montre que l'asymétrie induite par la présence d'un champ magnétique non nul fait disparaître la transition abrupte observée dans le cas  $h = 0$  :  $m(\beta, h)$  dépend de manière lisse de  $p_\beta$ . La dépendance de  $m(\beta, h)$  par rapport au paramètre  $h$  (graphe de droite) rend par contre très manifeste la transition de phase : si  $m(\beta, h)$  est une fonction lisse de  $h$  lorsque  $p_\beta$  est inférieur à la valeur critique, elle devient discontinue en  $h = 0$  (où elle prend la valeur 0, alors que les limites  $\lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h) = -\lim_{h \uparrow 0} m(\beta, h)$  sont non nulles) lorsque  $p_\beta$  est supérieur à la valeur critique. En fait cette dernière limite coïncide avec la valeur obtenue pour  $m^*(\beta)$  lorsque  $h = 0$ .

La présence de deux comportements typiques (aimantations positive et négative) lorsque  $h = 0$  et  $p_\beta > p_{\beta_c}$  peut ainsi être vue comme une trace de la sensibilité à la perturbation par un champ extérieur : pour  $p_\beta < p_{\beta_c}$ , l'introduction d'un petit champ magnétique  $h > 0$  produit une aimantation positive approximativement proportionnelle (la “réponse” du système à la perturbation est linéaire pour petit  $h$ ), alors que pour  $p_\beta > p_{\beta_c}$ , l'introduction d'un champ magnétique infinitésimal  $h > 0$



**Fig. 1.6** – Gauche : l'aimantation  $m(\beta, h)$  en fonction de  $p_\beta$  pour le modèle d'Ising en dimension 2 avec condition au bord périodique, pour diverses valeurs de  $h$ . Droite : l'aimantation  $m(\beta, h)$  en fonction du champ magnétique  $h$  pour le modèle d'Ising en dimension 2 avec condition au bord périodique, lorsque  $p_\beta = 0,2$  (courbe bleue) et  $p_\beta = 0,6$  (courbe rouge).

produit une aimantation d'ordre 1 ! Intuitivement, on peut dire, dans ce dernier cas, qu'en champ magnétique nul le système “hésite” entre deux comportements différents, et que l'introduction d'un champ magnétique non nul arbitraire suffit à faire pencher la balance dans la direction correspondante.

## 1.4 Conditions au bord

Il y a une autre façon, très utile, de comprendre la présence de cette transition de phase comme résultant d'une sensibilité extrême du système à certaines perturbations : au lieu (ou en plus) de briser partout la symétrie entre les deux espèces de spin par l'introduction d'un champ magnétique, on peut également considérer l'effet de différentes **conditions au bord**. On ne considère plus le modèle sur un graphe fini, avec condition au bord périodique, mais sur un graphe infini (ici  $\mathbb{Z}^d$ ) avec une configuration de spins *gelée* à l'extérieur de la boîte. Plus précisément, on associe à chaque configuration  $\omega \in \Omega \stackrel{\text{déf}}{=} \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  son énergie à l'intérieur d'un sous-ensemble fini  $V \Subset \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathcal{H}_{V; \beta, h}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} -\beta \sum_{\substack{\{i, j\} \cap V \neq \emptyset \\ i \sim j}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in V} \sigma_i(\omega),$$

où l'on a utilisé la notation  $i \sim j$  pour indiquer que  $i$  et  $j$  sont voisins. Remarquez que cette énergie prend également en compte l'interaction entre les spins de  $V$  et ceux hors de  $V$  (grâce à la première somme).

Soit  $\bar{\omega} \in \Omega$  ; on définit  $\Omega_{\bar{V}}^{\bar{\omega}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\omega \in \Omega : \omega_i = \bar{\omega}_i, \forall i \notin V\}$ . On introduit alors la mesure de probabilité sur  $\Omega_{\bar{V}}^{\bar{\omega}}$ ,

$$\mu_{V; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{Z_{V; \beta, h}^{\bar{\omega}}} \exp(-\mathcal{H}_{V; \beta, h}(\omega)).$$

$\bar{\omega}$  est appelée la **condition au bord**. Cette dernière peut favoriser un type de spin au voisinage du bord de  $V$ . La question est de déterminer si cette information peut se propager dans  $V$  tout entier. Il n'est pas difficile à imaginer, et nous le démontrerons plus tard, que deux configurations jouent un rôle extrémal (dans le sens qu'elles favorisent au maximum la valeur 1, resp. -1) :  $\omega_+ \equiv 1$  et  $\omega_- \equiv -1$ . On notera les mesures correspondantes simplement  $\mu_{V; \beta, h}^+$  et  $\mu_{V; \beta, h}^-$ .

Soit  $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots$  une suite croissante de sous-ensembles finis de  $\mathbb{Z}^d$  tels que  $\bigcup_{N \geq 1} V_N = \mathbb{Z}^d$ , ce

que l'on notera  $V_N \uparrow \mathbb{Z}^d$ . On introduit alors les aimantations moyennes<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} m^+(\beta) &\stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle |V_N|^{-1} \sum_{i \in V_N} \sigma_i \rangle_{V_N; \beta, 0}^+, \\ m^-(\beta) &\stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle |V_N|^{-1} \sum_{i \in V_N} \sigma_i \rangle_{V_N; \beta, 0}^-. \end{aligned}$$

Nous verrons au chapitre 3 que  $m^+(\beta) = \lim_{h \downarrow 0} m(\beta, h)$  et  $m^-(\beta) = \lim_{h \uparrow 0} m(\beta, h) = -m^+(\beta)$ . En particulier,  $m^+(\beta) = m^-(\beta)$  si  $\beta < \beta_c$ , alors que  $m^+(\beta) \neq m^-(\beta)$  si  $\beta > \beta_c$ .

## 1.5 Quelques interprétations

Du point de vue mathématique, l'intérêt de ce modèle est évident, puisqu'il s'agit d'un des modèles les plus simples de champ aléatoire (variables aléatoires binaires, interactions quadratiques, etc.), et la discussion précédente donne un bref aperçu de la richesse de son comportement. Ce modèle est cependant aussi intéressant pour décrire qualitativement (et parfois quantitativement) une grande variété de phénomènes, dont on liste ici les deux principaux exemples, tirés de la physique.

### 1.5.1 Ferro-aimant

Il s'agit de l'interprétation originelle du modèle d'Ising. Le paramètre  $\beta$  correspond à l'inverse de la température. Les sommets de  $\mathbb{Z}^d$  correspondent aux positions des atomes d'un réseau cristallin. Chaque atome possède un moment magnétique (le *spin*) qui est supposé ne pouvoir prendre que deux orientations, représentées par  $+1$  ou  $-1$ . Ce modèle associe donc une énergie plus basse à des spins alignés entre eux, et alignés avec le champ magnétique extérieur  $h$ . Le but est d'expliquer et de décrire la transition entre les comportements paramagnétique et ferromagnétique du système lorsque sa température est changée. Quelle que soit sa température, un matériau ferromagnétique (Fe, Co, Ni, par exemple) placé dans un champ magnétique va développer une aimantation en réponse à ce dernier (les spins s'alignant avec le champ magnétique). À haute température (au-dessus de la **température de Curie**, qui est de 1043K pour le fer, par exemple), cette aimantation disparaît lorsque le champ magnétique est enlevé ; on parle de comportement **paramagnétique**. À basse température (c'est-à-dire en-dessous de la température de Curie), l'aimantation développée en réponse au champ magnétique extérieur ne disparaît plus lorsque celui-ci est enlevé : il reste une aimantation résiduelle, appelée **aimantation spontanée** ; on parle de comportement **ferromagnétique**.

### 1.5.2 Gaz réticulaire

Dans cette interprétation, on suppose que  $\mathbb{R}^d$  a été partitionné en cellules cubiques de côté 1. Chaque cellule est soit vide ( $\omega_i = -1$ ), soit occupée par une molécule ( $\omega_i = +1$ ). Il est impossible d'avoir deux molécules dans la même cellule. Il est alors naturel de faire le changement de variables  $n_i \stackrel{\text{déf}}{=} (1 + \sigma_i)/2$ ,  $n_i$  représentant alors le nombre de molécules (0 ou 1) dans la cellule  $i$ , et l'énergie prend la forme (à une constante additive triviale près) :  $-\frac{1}{2}\beta' \sum_{i \sim j} n_i n_j - \mu \sum_i n_i$ , où  $\beta' \stackrel{\text{déf}}{=} 4\beta$  a l'interprétation d'une température inverse, et  $\mu \stackrel{\text{déf}}{=} (\frac{1}{2}h - 2d)$  est le **potentiel chimique** (quantité qui mesure le coût énergétique lié à l'addition d'une molécule supplémentaire dans le système). L'énergie d'interaction favorise donc la condensation des molécules, puisque l'énergie décroît lorsque deux cellules voisines sont toutes deux occupées.

Ce que l'on désire comprendre dans ce cas-là, c'est la transition liquide/vapeur, c'est-à-dire la transition entre une phase dense et une phase diluée.

<sup>2</sup>Pour tout  $C \subseteq \mathbb{Z}^d$ ,  $|C| \stackrel{\text{déf}}{=} \#\{i \in C\}$ .

### 1.5.3 Quelques autres interprétations et applications

Il y a de très nombreuses autres interprétations possibles (et utilisées) : agents économiques, modèle écologiques, etc.

Du côté des applications plus pratiques, ce modèle est utilisé en analyse et traitement d'images. Dans ce cas, il faut imaginer chaque sommet comme un pixel de l'image, et  $\omega_i$  comme son état (allumé ou éteint). Divers algorithmes permettent alors d'effectuer des tâches aussi diverses que la restauration d'images bruitées, la segmentation, ou la détection des contours. Bien sûr, il est en général intéressant d'avoir plus de deux états par pixel (ce qui ne permet de décrire que des images monochromes), et on peut alors utiliser diverses généralisations du modèle d'Ising (par exemple le modèle de Potts, qui autorise  $q \geq 2$  états, et se réduit au modèle d'Ising lorsque  $q = 2$ ).

## 1.6 Quelques autres modèles classiques

Bien que notre discussion dans ce cours se restreigne au modèle d'Ising, il sera parfois intéressant de faire des parallèles avec d'autres modèles classiques de Physique Statistique. Dans cette section, nous introduisons donc de manière informelle quelques modèles, afin de pouvoir nous y référer dans la suite.

### 1.6.1 Modèle de Potts

Dans le modèle d'Ising, les spins ne peuvent prendre que deux valeurs distinctes,  $-1$  et  $1$ . Le modèle de Potts à  $q$  états est une généralisation dans laquelle les spins prennent valeurs dans l'ensemble  $\{1, \dots, q\}$  avec  $q \geq 2$ . L'énergie associée à une configuration  $\omega \in \{1, \dots, q\}^{\mathbb{Z}^d}$  est formellement donnée par

$$\mathcal{H}^{\text{Potts}}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} -\beta \sum_{i \sim j} \delta_{\omega_i, \omega_j},$$

où  $\delta_{i,j} = \mathbf{1}_{\{i=j\}}$  est la fonction de Kronecker. Il est aisément de vérifier que le modèle de Potts avec  $q = 2$  se réduit au modèle d'Ising. Comme nous l'expliquerons par la suite, le passage de 2 à un nombre  $q$  d'états suffisamment grand a parfois un impact majeur sur le comportement du système.

### 1.6.2 Modèle $O(N)$

Les spins du modèle d'Ising peuvent également être vus comme prenant valeurs dans la “sphère” unité  $\mathbb{S}^0$  (la “boule” unité en dimension 1 étant  $[-1, 1]$  et son bord  $\{-1, 1\}$ ). Ceci conduit à généraliser le modèle afin de considérer des spins à valeurs dans  $\mathbb{S}^{N-1}$ ,  $N \geq 1$ . L'énergie associée à une configuration est la généralisation naturelle de celle d'Ising : pour tout  $\omega \in (\mathbb{S}^{N-1})^{\mathbb{Z}^d}$ , l'énergie est formellement donnée par

$$\mathcal{H}^{O(N)}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} -\beta \sum_{i \sim j} \omega_i \cdot \omega_j,$$

où  $\omega_i \cdot \omega_j$  est le produit scalaire des vecteurs  $\omega_i$  et  $\omega_j$ . Le modèle correspondant est appelé **modèle  $O(N)$** . Dans le cas  $N = 2$ , on parle généralement de **modèle  $XY$**  (ou modèle des rotateurs), et lorsque  $N = 3$  de **modèle de Heisenberg** (classique, par opposition à sa variante quantique).

Il y a une différence majeure entre le cas  $N = 1$  (Ising) et le cas  $N \geq 2$  : l'énergie  $\mathcal{H}^{O(N)}$  est invariante sous l'action du groupe de symétrie  $O(N)$  (puisque ne dépend des spins qu'au travers du produit scalaire entre spins voisins), or ce groupe est discret lorsque  $N = 1$  (c'est le groupe a deux éléments, correspondant à l'identité et à l'inversion de tous les spins), mais est un groupe de Lie lorsque  $N \geq 2$ . Dans ce dernier cas, on parle de **symétrie continue**. Les comportements de systèmes possédant des symétries discrètes et continues peuvent être très différents, comme nous l'expliquerons plus tard.

### 1.6.3 Modèle de percolation de Bernoulli

Un autre modèle classique de Physique Statistique, de nature un peu différente, est le modèle de percolation de Bernoulli (ou percolation indépendante).

Le modèle de percolation de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$  est donné par une collection  $(n_e)_e$ , indiquées par les arêtes de  $\mathbb{Z}^d$ , de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ . Une configuration du modèle peut donc être identifiée à un sous-graphe de  $\mathbb{Z}^d$ . On est alors particulièrement intéressé aux propriétés de connectivité de ce graphe aléatoire.

Nous verrons que, malgré leurs caractères apparemment très différents, le modèle de percolation et les modèles de Potts (donc, en particulier, d'Ising) sont très étroitement liés.

### 1.6.4 Modèle de dimères

Finalement, un dernier modèle classique, également *a priori* de nature assez différente, est le modèle des dimères.

Soit  $G = (V, A)$  un graphe fini avec sommets  $V$  et arêtes  $A$ . Une configuration de dimères sur  $G$  est une famille  $E \subseteq A$  d'arêtes telle que chaque sommet  $v \in V$  appartienne à une et une seule arête de  $E$ . On appelle **dimères** les arêtes de  $E$ . La probabilité d'observer une configuration  $E$  donnée est proportionnelle à

$$\prod_{e \in E} w(e),$$

où les poids  $(w(e))_e$  sont des nombres réels positifs fixés.

Comme observé par Fisher [15], le modèle d'Ising bidimensionnel peut être transformé en un modèle de dimères sur un certain graphe et avec des poids appropriés. Ceci fournit une des méthodes permettant de calculer explicitement diverses quantités dans le cas bidimensionnel [31], comme par exemple l'aimantation donnée en (1.2) (voir aussi le livre [39]).

## 1.7 Quelques ouvrages de référence

Le livre de Georgii [19] est une référence incontournable sur le sujet des mesures de Gibbs ; il est malheureusement plutôt difficile d'accès. L'article de revue [20] est plus accessible, et fournit des preuves alternatives à celles données ici d'un certain nombre de résultats. Le livre de Simon [52] est assez facile d'accès, mais a un point de vue assez différent de celui du cours. En particulier, les techniques employées sont du type analyse fonctionnelle plutôt que probabilistes ; il contient aussi une discussion détaillée du cas quantique.

Les livres de Ruelle [50], Sinai [53] et Israel [30] sont tous des classiques. Ils ont certes un peu vieilli, mais restent d'excellentes sources d'information, au moins pour certains aspects. La longue préface du livre d'Israel est une très belle introduction à la thermodynamique et est fortement recommandée aux mathématiciens (et autres) désirant mieux connaître le sujet.

Le livre de Prum [48] est également recommandé (et présente la particularité d'être en français). Le livre de Kindermann et Snell [33] est plus introductif. Il est à présent disponible gratuitement (et légalement) sur internet.

En plus des livres ci-dessus voici quelques ouvrages traitant de modèles spécifiques : le modèle de percolation [23], la FK-percolation (chapitre 6) [24], et la relation entre modèle d'Ising et modèle de dimères, ainsi que le calcul explicite de diverses quantités du modèle bidimensionnel [39].

# Chapitre 2

## Le modèle et quelques propriétés de base

Dans ce chapitre, nous allons définir plus précisément le modèle d’Ising, et présenter quelques-unes de ses propriétés essentielles pour la suite. Nous introduirons également la notion de limite thermodynamique.

### 2.1 Définition du modèle

Nous commençons par quelques définitions et notations, dont certaines diffèrent légèrement de celles utilisées dans l’introduction.

**Configurations.** Une **configuration** du modèle d’Ising est une application  $\omega : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $i \mapsto \omega(i) \equiv \omega_i$ . L’ensemble de toutes les configurations, appelé **espace des configurations**, est noté  $\Omega$ . On note  $\omega|_{\Lambda}$  la restriction de la configuration  $\omega \in \Omega$  à  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ , c’est-à-dire la famille  $(\omega_i)_{i \in \Lambda}$ . L’ensemble des configurations restreintes à  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  est noté  $\Omega_{\Lambda}$ .

Étant données  $\omega \in \Omega_{\Lambda}$ ,  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ , et  $\bar{\omega} \in \Omega$ , on définit la configuration  $\omega\bar{\omega} \in \Omega$  par  $(\omega\bar{\omega})_i = \omega_i$  si  $i \in \Lambda$ , et  $(\omega\bar{\omega})_i = \bar{\omega}_i$  sinon.

**Spin.** À chaque sommet  $i \in \mathbb{Z}^d$ , nous attachons une variable aléatoire  $\sigma_i : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $\omega \mapsto \sigma_i(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_i$ , appelée **spin** en  $i$ . On notera également  $\sigma|_{\Lambda} = (\sigma_i)_{i \in \Lambda}$ .

**Hamiltonien.** On associe à chaque configuration  $\omega \in \Omega$  son énergie dans un domaine  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ . Celle-ci dépend de deux paramètres : la **température inverse**  $\beta \in \mathbb{R}$ , que l’on suppose positive, et le **champ magnétique**  $h \in \mathbb{R}$ . Elle est donnée par l’Hamiltonien suivant<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{\Lambda; \beta, h}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} -\beta \sum_{\substack{\{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset \\ i \sim j}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega).$$

**Mesure de Gibbs.** Soient  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  et  $\bar{\omega} \in \Omega$ . On introduit  $\Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\omega \in \Omega : \omega_i = \bar{\omega}_i, \forall i \notin \Lambda\}$ . On appelle  $\bar{\omega}$  la **condition au bord**. Nous allons à présent introduire une mesure de probabilité sur l’ensemble (fini)  $\Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}$ . La **mesure de Gibbs** du modèle d’Ising avec interaction entre plus-proches-voisins, paramètres  $\beta$  et  $h$ , et condition au bord  $\bar{\omega}$ , est la mesure de probabilité sur  $\Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}$  définie par

$$\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}} \exp(-\mathcal{H}_{\Lambda; \beta, h}(\omega)).$$

La constante de normalisation  $\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$  est appelée **fonction de partition**.

<sup>1</sup>La lettre  $\mathcal{H}$  traditionnellement utilisée pour dénoter l’Hamiltonien ne provient pas de l’initiale d’Hamilton : cette notation a été introduite par Lagrange en 1811 (alors qu’Hamilton n’a que 5 ans !) en l’honneur de Huygens.

Nous suivrons la coutume en Physique Statistique et noterons l'espérance sous une mesure  $\mu$  par  $\langle \cdot \rangle_\mu$ , ou, lorsque la mesure est identifiée par des indices, en appliquant les mêmes indices aux crochets : par exemple, l'espérance sous la mesure  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$  sera notée  $\langle \cdot \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ .

*Exercice 2.1.1.* Vérifier que, pour tout  $\Delta \subseteq \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et toutes configurations  $\bar{\omega} \in \Omega$  et  $\omega' \in \Omega_\Lambda^{\bar{\omega}}$ , on a

$$\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\cdot \mid \sigma_{|\Lambda \setminus \Delta} = \omega'_{|\Lambda \setminus \Delta}) = \mu_{\Delta; \beta, h}^{\omega'}(\cdot). \quad (2.1)$$

**Conditions au bord.** Parmi les différentes conditions au bord, deux sont particulièrement intéressantes :  $\bar{\omega} \equiv 1$ , appelée condition au bord +, et  $\bar{\omega} \equiv -1$ , appelée condition au bord -. Les mesures de Gibbs correspondantes sont notées simplement  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^+$  et  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^-$ , et les ensembles  $\Omega_\Lambda^+$  et  $\Omega_\Lambda^-$ . Il sera aussi parfois utile de considérer une condition au bord d'un autre type : la condition au bord libre, qui modélise un système sans interaction avec l'extérieur. Il s'agit de la mesure de probabilité sur  $\Omega_\Lambda$  définie par

$$\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Z_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset}} \exp\left(\beta \sum_{\substack{\{i, j\} \subseteq \Lambda \\ i \sim j}} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) + h \sum_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega)\right).$$

## 2.2 Les inégalités de corrélation

Le but de cette section est d'introduire un outil particulièrement important dans l'étude du modèle d'Ising : les inégalités de corrélations. Les preuves de ces inégalités sont données dans l'appendice A.1.

Parmi la multitude de telles inégalités, deux jouent un rôle prépondérant : les inégalités GKS et FKG.

### 2.2.1 Inégalités GKS

Les inégalités GKS (pour Griffiths, Kelly et Sherman [21, 32]) sont limitées aux conditions au bord + et libre et aux champs magnétiques positifs. Elles s'appliquent aux produits de spins, c'est-à-dire aux fonctions de la forme<sup>2</sup>  $\sigma_A \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \in A} \sigma_i$ .

**Théorème 2.2.1** (Inégalités GKS). *Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , et  $h \geq 0$ . Quels que soient  $A, B \subseteq \Lambda$  et  $\beta \geq 0$ ,*

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+. \quad (2.3)$$

Ces inégalités restent vraies pour la mesure  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset}$ .

### 2.2.2 Inégalités FKG

Les inégalités FKG (pour Fortuin, Kasteleyn et Ginibre [17]) sont une extension de l'inégalité suivante sur les fonctions réelles : soit  $f$  et  $g$  deux fonctions croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  ; alors

$$\langle f g \rangle_\mu \geq \langle f \rangle_\mu \langle g \rangle_\mu.$$

La preuve est élémentaire, puisqu'il suffit de dupliquer le système :

$$\langle f g \rangle_\mu - \langle f \rangle_\mu \langle g \rangle_\mu = \frac{1}{2} \langle (f(x) - f(x'))(g(x) - g(x')) \rangle_{\mu \otimes \mu}$$

et d'observer que  $f(x) - f(x')$  et  $g(x) - g(x')$  ont nécessairement le même signe puisque  $f$  et  $g$  sont toutes deux croissantes.

---

<sup>2</sup>Faites bien attention à ne pas confondre  $\sigma_A$  et  $\sigma_{|A|}$  !

L'ensemble  $\{-1, 1\}$  étant totalement ordonné, on peut définir un ordre partiel sur  $\Omega : \omega \leq \omega'$  si et seulement si  $\omega_i \leq \omega'_i$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}^d$ . Ceci permet de définir la notion de fonction croissante :  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante si et seulement si  $\omega \leq \omega' \implies f(\omega) \leq f(\omega')$ . Une classe importante de fonctions croissantes est formée des produits des variables d'occupation  $n_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(1 + \sigma_i)$  :  $n_A \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i \in A} n_i$ .

Les inégalités FKG affirment que les fonctions croissantes sont positivement corrélées. Leur grand avantage est d'être applicables quelle que soit la condition au bord, et pour toute valeur (pas seulement positive) du champ magnétique.

**Théorème 2.2.2** (Inégalités FKG). *Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et  $\bar{\omega}$  une condition au bord arbitraire. Alors, quels que soient  $\beta \geq 0$  et  $h \in \mathbb{R}$ , pour toute paire de fonctions croissantes  $f$  et  $g$ ,*

$$\langle f g \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}} \geq \langle f \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}} \langle g \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}. \quad (2.4)$$

## 2.3 Limite thermodynamique

On n'a pour l'instant défini le modèle d'Ising que pour des sous-ensembles finis de  $\mathbb{Z}^d$ . Une façon naturelle de définir le modèle sur  $\mathbb{Z}^d$  tout entier (on dit parfois "en volume infini") est de considérer une suite de parties finies  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ , et une suite de conditions au bord  $(\bar{\omega}_n)_{n \geq 1}$ . On aimera à présent prendre la limite de la suite de mesures  $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^{\bar{\omega}_n})_{n \geq 1}$ . Pour cela, il est nécessaire d'introduire une topologie appropriée, et donc de faire un bref détour par l'analyse fonctionnelle.

### 2.3.1 Structure métrique sur $\Omega$ .

Puisque  $\{-1, 1\}$  est compact,  $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  est également compact pour la topologie produit. De plus, la métrique

$$d(\omega, \omega') = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} 2^{-\|i\|_1} \mathbf{1}_{\{\omega_i \neq \omega'_i\}},$$

est compatible avec cette topologie.  $\Omega$  muni de cette métrique est donc un espace métrique compact.

### 2.3.2 Fonctions continues et fonctions locales.

On vérifie aisément qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est (uniformément) continue pour la topologie produit si et seulement si, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  tel que

$$\sup_{\substack{\omega, \omega': \\ \omega|_{\Lambda} = \omega'|_{\Lambda}}} |f(\omega) - f(\omega')| \leq \epsilon.$$

Soit  $\mathcal{C}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$  ;  $(\mathcal{C}(\Omega), \|\cdot\|_{\infty})$  est un espace de Banach. Un sous-ensemble dense de  $\mathcal{C}(\Omega)$  particulièrement utile est l'ensemble des fonctions locales : une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite locale s'il existe  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  tel que  $f(\omega)$  est entièrement déterminée par  $\omega|_{\Lambda}$  ; en d'autres termes, une fonction est locale si elle ne dépend que de l'état d'un nombre fini de spins. On note  $\text{supp}(f)$  le support de la fonction  $f$ , c'est-à-dire le plus petit ensemble de sommets dont les spins déterminent la valeur de  $f$ . On vérifie aisément que les fonctions locales sont denses dans les fonctions continues : si  $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ , alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  tel que, pour toute configuration  $\omega' \in \Omega$ ,

$$\sup_{\omega} |f(\omega|_{\Lambda} \omega') - f(\omega)| \leq \epsilon,$$

où la configuration  $\omega|_{\Lambda} \omega'$  coïncide avec  $\omega$  dans  $\Lambda$  et  $\omega'$  hors de  $\Lambda$ . La conclusion suit puisque  $\omega \mapsto f(\omega|_{\Lambda} \omega')$  est une fonction locale.

### 2.3.3 Convergence des mesures

Notons  $\mathcal{F}$  la tribu engendrée par les cylindres  $\mathcal{C}_{\eta, \Lambda'} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\omega \in \Omega : \omega_{\Lambda'} = \eta\}$ ,  $\Lambda' \Subset \mathbb{Z}^d$ ,  $\eta \in \Omega_{\Lambda'}$ . On dira qu'une suite de mesures  $(\mu_{\Lambda_n}^{\bar{\omega}_n})_{\Lambda_n \Subset \mathbb{Z}^d}$  sur  $\Omega_{\Lambda_n}^{\bar{\omega}_n}$  converge vers la mesure  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f \rangle_{\Lambda_n}^{\bar{\omega}_n} \rightarrow \langle f \rangle_{\mu},$$

pour toute fonction locale  $f$ . Les fonctions locales étant denses dans les fonctions continues, on voit que cette topologie sur les mesures n'est autre que la topologie faible.

Supposons que l'on ait montré que  $\langle f \rangle_{\mu_n}$  converge vers une valeur  $\mathbf{l}(f)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour toute fonction locale  $f$ . Peut-on en déduire l'existence d'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  telle que  $\mathbf{l}(f) = \langle f \rangle_{\mu}$ ? Clairement, la forme linéaire  $f \mapsto \mathbf{l}(f)$  satisfait

- i)  $\mathbf{l}(1) = 1$ ;
- ii)  $f \geq 0 \implies \mathbf{l}(f) \geq 0$ ;
- iii)  $|\mathbf{l}(f)| \leq \|f\|_{\infty}$ .

Il pouvant être étendue par continuité à  $\mathcal{C}(\Omega)$  tout entier, on peut conclure à l'aide du théorème suivant.

**Théorème 2.3.1** (Théorème de représentation de Riesz). *Soit  $M$  un espace métrique compact. Soit  $\mathbf{l}$  une forme linéaire sur l'ensemble des fonctions continues sur  $M$  satisfaisant i)-iii) ci-dessus. Il existe alors une unique mesure de probabilité borélienne régulière  $\mu$  sur  $M$  telle que*

$$\mathbf{l}(f) = \int f d\mu.$$

*Démonstration.* Voir [49, Théorème 2.14]. □

### 2.3.4 Mesures de Gibbs en volume infini et transition de phase du 1er ordre.

On appellera **mesure de Gibbs en volume infini** du modèle d'Ising tout point d'accumulation des suites  $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^{\bar{\omega}_n})_{n \geq 1}$  introduites ci-dessus.

Comme cela a déjà été mentionné dans l'introduction, il n'y a pas nécessairement unicité de la mesure limite associée à un couple  $(\beta, h)$  donné (l'existence d'au moins un point d'accumulation est par contre garantie par compacité de l'espace des mesures de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  pour la topologie que l'on vient d'introduire; en fait, on construira même une telle mesure de Gibbs explicitement dans la Sous-Section 2.3.6). On dira qu'il y a **transition de phase du 1er ordre** en  $(\beta, h)$  lorsqu'il y a non-unicité. Nous verrons dans le prochain chapitre que cette définition correspond précisément à la transition de phase observée dans l'introduction à travers l'apparition d'une discontinuité de l'aimantation comme fonction du champ magnétique.

### 2.3.5 Deux familles de fonctions locales.

La topologie introduite reposant sur les fonctions locales, il est utile de déterminer certaines classes de fonctions locales engendrant toutes les autres. Le lemme suivant en propose deux, qui sont particulièrement adaptées aux inégalités de corrélation présentées dans la section précédente.

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $f$  une fonction locale. Alors*

$$f = \sum_{A \subseteq \text{supp}(f)} \hat{f}_A \sigma_A,$$

où  $\hat{f}_A \stackrel{\text{déf}}{=} 2^{-|\text{supp}(f)|} \sum_{\tilde{\omega} \in \Omega_{\text{supp}(f)}} f(\tilde{\omega}) \sigma_A(\tilde{\omega})$ . Par conséquent, on a également

$$f = \sum_{A \subseteq \text{supp}(f)} \tilde{f}_A n_A,$$

pour des coefficients  $\tilde{f}_A$  appropriés.

*Démonstration.* Pour démontrer la première affirmation, il suffit d'utiliser la relation

$$2^{-|B|} \sum_{A \subseteq B} \sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega) = \mathbf{1}_{\{\omega \equiv \tilde{\omega} \text{ sur } B\}}.$$

Cette relation d'orthogonalité se démontre très facilement. Supposons tout d'abord que  $\omega_i = \tilde{\omega}_i$ , pour tout  $i \in B$ . Alors  $\sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega) = \prod_{i \in A} \tilde{\omega}_i \omega_i = 1$ , puisque  $\tilde{\omega}_i \omega_i = 1$  pour tout  $i \in B$ . Supposons donc à présent qu'il existe  $i \in B$  tel que  $\omega_i \neq \tilde{\omega}_i$  (et donc  $\omega_i \tilde{\omega}_i = -1$ ) ; on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{A \subseteq B} \sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega) &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i\}} (\sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega) + \sigma_{A \cup \{i\}}(\tilde{\omega}) \sigma_{A \cup \{i\}}(\omega)) \\ &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i\}} (\sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega) + \omega_i \tilde{\omega}_i \sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega)) \\ &= \sum_{A \subseteq B \setminus \{i\}} \sigma_A(\tilde{\omega}) \sigma_A(\omega) (1 + \omega_i \tilde{\omega}_i) = 0. \end{aligned}$$

La seconde affirmation suit immédiatement en insérant  $\sigma_A = \prod_{i \in A} (2n_i - 1)$  dans la première formule.  $\square$

### 2.3.6 Mesures limites avec conditions au bord + et -.

Les inégalités de corrélation introduites dans la section précédente permettent de démontrer de nombreux résultats concernant les limites possibles. Commençons par montrer que les mesures avec conditions au bord + et - admettent bien chacune une limite, quelle que soit la suite  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  considérée.

**Théorème 2.3.2.** *Soit  $\beta \geq 0$  et  $h \in \mathbb{R}$ . Pour toute suite  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ , la suite de mesures  $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^+)_n$  converge vers une mesure  $\mu_{\beta, h}^+$  (indépendante de la suite  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ ). De même, la suite  $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^-)_n$  converge vers une mesure  $\mu_{\beta, h}^-$  (indépendante de la suite  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ ).*

*De plus, les mesures  $\mu_{\beta, h}^+$  et  $\mu_{\beta, h}^-$  sont invariantes sous l'action du groupe des translations de  $\mathbb{Z}^d$  :  $\langle f \circ \theta_t \rangle_{\beta, h}^+ = \langle f \rangle_{\beta, h}^+$ , pour toute fonction locale  $f$ , où  $(\theta_t \omega)_i = \omega_{i-t}$ .*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord la convergence de la suite de mesures  $\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^+$ . Les inégalités FKG impliquent que pour toute fonction  $f$  locale et croissante,

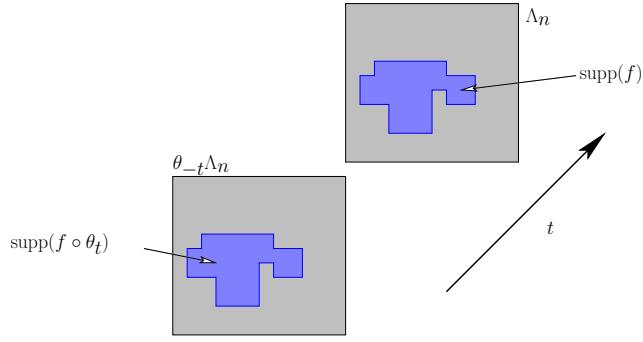
$$\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \geq \langle f \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+. \quad (2.5)$$

En effet, on vérifie facilement (*cf.* (2.1)) que

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ = \langle f \mid \sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+.$$

Comme l'indicatrice  $\mathbf{1}_{\{\sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n\}}$  est une fonction croissante, il suit bien des inégalités FKG que

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ &= \frac{\langle f \mathbf{1}_{\{\sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n\}} \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+}{\langle \mathbf{1}_{\{\sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n\}} \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+} \\ &\geq \frac{\langle f \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+ \langle \mathbf{1}_{\{\sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n\}} \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+}{\langle \mathbf{1}_{\{\sigma_i = 1, \forall i \in \Lambda_{n+1} \setminus \Lambda_n\}} \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+} = \langle f \rangle_{\Lambda_{n+1}; \beta, h}^+. \end{aligned}$$



**Fig. 2.1** – Preuve de l'invariance sous les translations.

$f$  étant nécessairement bornée, on en déduit la convergence de la suite  $(\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+)_n$  pour toute fonction locale croissante  $f$ . Par conséquent, une application du Lemme 2.3.1 montre que, pour toute fonction locale  $g$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ &= \sum_{A \subseteq \text{supp}(g)} \tilde{g}_A \lim_{n \rightarrow \infty} \langle n_A \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \\ &= \sum_{A \subseteq \text{supp}(g)} \tilde{g}_A \langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ = \langle g \rangle_{\beta, h}^+, \end{aligned}$$

puisque les fonctions  $n_A$  sont locales et croissantes. Par conséquent, on a bien convergence de la suite  $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^+)_n$  vers une mesure  $\mu_{\beta, h}^+$ .

Vérifions à présent que la limite ne dépend pas de la suite  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  considérée. Soit  $\Lambda_n^1 \uparrow \mathbb{Z}^d$  et  $\Lambda_n^2 \uparrow \mathbb{Z}^d$  deux telles suites, et notons  $\mu_{\beta, h}^{+, 1}$  et  $\mu_{\beta, h}^{+, 2}$  les limites correspondantes. On construit une nouvelle suite  $\Delta_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  de la façon suivante :  $\Delta_1 = \Lambda_1^1$ , et, pour  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{2k} &= \bigcap \{ \Lambda_n^2 : \Lambda_n^2 \supseteq \Delta_{2k-1} \}, \\ \Delta_{2k+1} &= \bigcap \{ \Lambda_n^1 : \Lambda_n^1 \supseteq \Delta_{2k} \}. \end{aligned}$$

La convergence de la suite  $(\mu_{\Delta_n; \beta, h}^+)_n \geq 1$  implique donc que  $\mu_{\beta, h}^{+, 1} = \mu_{\beta, h}^{+, 2}$ , ces dernières correspondant, respectivement, aux limites obtenues pour les sous-suites  $(\mu_{\Delta_{2n+1}; \beta, h}^+)_n \geq 1$  et  $(\mu_{\Delta_{2n}; \beta, h}^+)_n \geq 1$ .

La preuve pour la suite  $(\mu_{\Lambda_n; \beta, h}^-)_n$  est identique.

L'invariance sous les translations est immédiate. Soit  $t \in \mathbb{Z}^d$ ,  $f$  une fonction locale et  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ . Alors  $f \circ \theta_t$  est également une fonction locale et  $\theta_{-t} \Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  ( $\theta_{-t} A \stackrel{\text{déf}}{=} A - t$ , pour tout  $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ ). On a donc

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \rightarrow \langle f \rangle_{\beta, h}^+ \quad \text{et} \quad \langle f \circ \theta_t \rangle_{\theta_{-t} \Lambda_n; \beta, h}^+ \rightarrow \langle f \circ \theta_t \rangle_{\beta, h}^+,$$

et la conclusion suit puisque  $\langle f \circ \theta_t \rangle_{\theta_{-t} \Lambda_n; \beta, h}^+ = \langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+$ . □

# Chapitre 3

## Aimantation et énergie libre

Ce chapitre a deux buts. D'une part, introduire et discuter des propriétés de base de deux quantités essentielles : l'aimantation et l'énergie libre. D'autre part, dériver deux critères caractérisant l'unicité de la mesure de Gibbs en volume infini. Le premier fait le lien entre la définition mathématique de transition de phase de premier ordre et le comportement de l'aimantation décrit dans l'introduction. Le second relie les transitions de phase de premier ordre aux propriétés de différentiabilité de l'énergie libre, reproduisant la caractérisation utilisée en Thermodynamique.

### 3.1 Une première caractérisation de l'unicité

L'importance des mesures  $\mu_{\beta,h}^+$  et  $\mu_{\beta,h}^-$  introduites dans la Sous-Section 2.3.6 est rendue manifeste par le résultat suivant, qui permet de réduire le problème de l'unicité/non-unicité des mesures de Gibbs en volume infini du modèle d'Ising à celui de comparer uniquement ces deux mesures.

**Théorème 3.1.1.** *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *Il y a une unique mesure de Gibbs en volume infini.*
2.  $\mu_{\beta,h}^+ = \mu_{\beta,h}^-$ .
3.  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^-$ .

*Démonstration.* Une application des inégalités FKG montre que, pour toute fonction  $f$  locale et croissante,

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^- \leq \langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^{\bar{\omega}} \leq \langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+, \quad (3.1)$$

quelle que soit la condition au bord  $\bar{\omega}$ . En effet, en utilisant que, pour tout  $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}$  et  $\bar{\omega}, \tilde{\omega} \in \Omega$ ,

$$\mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, h}(\omega \bar{\omega}) = \mathcal{H}_{\Lambda_n; \beta, h}(\omega \tilde{\omega}) + \beta \sum_{\substack{i \in \Lambda_n, j \notin \Lambda_n \\ i \sim j}} \omega_i (\tilde{\omega}_j - \bar{\omega}_j),$$

on a par exemple

$$\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ = \frac{\langle e^{\beta \sum_{i \in \Lambda_n, j \notin \Lambda_n, i \sim j} (1 - \bar{\omega}_j) \sigma_i} f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^{\bar{\omega}}}{\langle e^{\beta \sum_{i \in \Lambda_n, j \notin \Lambda_n, i \sim j} (1 - \bar{\omega}_j) \sigma_i} \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^{\bar{\omega}}} \geq \langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^{\bar{\omega}},$$

puisque la fonction  $\exp(\beta \sum_{i \in \Lambda_n, j \notin \Lambda_n, i \sim j} (1 - \bar{\omega}_j) \sigma_i)$  est croissante.

On en déduit qu'il y a une unique mesure de Gibbs si et seulement si  $\mu_{\beta,h}^- = \mu_{\beta,h}^+$ . Pour montrer qu'il est suffisant de vérifier  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^- = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,h}^+$ , on utilise une fois de plus les inégalités FKG. On observe

tout d'abord que pour tout  $A \Subset \mathbb{Z}^d$ , la fonction  $\sum_{i \in A} n_i - n_A$  est croissante. Par conséquent, (3.1) implique que

$$\left\langle \sum_{i \in A} n_i - n_A \right\rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^- \leq \left\langle \sum_{i \in A} n_i - n_A \right\rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+,$$

ce qui nous fournit l'inégalité suivante sur les mesures limites,

$$\sum_{i \in A} (\langle n_i \rangle_{\beta, h}^+ - \langle n_i \rangle_{\beta, h}^-) \geq \langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ - \langle n_A \rangle_{\beta, h}^-.$$

Il suit de (3.1) que le membre de droite de cette dernière inégalité est positif. Par invariance sous les translations, la condition  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^- = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  (et donc  $\langle n_0 \rangle_{\beta, h}^- = \langle n_0 \rangle_{\beta, h}^+$ ) implique que le membre de gauche est nul. Il suit que  $\langle n_A \rangle_{\beta, h}^+ = \langle n_A \rangle_{\beta, h}^-$  pour tout  $A$  fini. Ceci conclut la démonstration grâce au Lemme 2.3.1.  $\square$

## 3.2 Quelques propriétés de l'aimantation

Le critère d'unicité de la Section 3.1 fait intervenir les espérances  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  et  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ . La première question que l'on peut se poser est s'il existe une relation entre ces espérances et l'espérance de l'aimantation dans une boîte finie. Le lemme suivant montre qu'elles coïncident dans la limite, au moins pour de bonnes boîtes. C'est la raison pour laquelle nous appellerons également aimantation ces espérances.

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^d$ . Alors*

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle |\Lambda_n|^{-1} \sum_{i \in \Lambda_n} \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+,$$

et similairement pour  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ .

*Démonstration.* On utilise (2.5). D'une part,

$$\min_{i \in \Lambda_n} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \geq \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_{2n}; \beta, h}^+,$$

et donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_{2n}; \beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+.$$

D'autre part, soit  $R > 0$ ; pour tout  $i \in \Lambda_N$  se trouvant à distance au moins  $R$  du bord de  $\Lambda_N$ ,  $\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_R; \beta, h}^+$ . On a donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_R; \beta, h}^+.$$

La conclusion suit en laissant  $R \rightarrow \infty$ .  $\square$

Montrons à présent quelques propriétés élémentaires de ces fonctions.

**Proposition 3.2.2.** 1. Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ .  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+$  et  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^-$  sont des fonctions croissantes de  $h$ , pour tout  $\beta \geq 0$ .  
2. Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ .  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+$  (resp.  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^-$ ) est une fonction croissante (resp. décroissante) de  $\beta$ , pour tout  $h \geq 0$  (resp.  $h \leq 0$ ).  
3.  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  (resp.  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ ) est une fonction continue à droite (resp. à gauche) du champ magnétique  $h$ .

*Remarque 3.2.1.* Évidemment, les propriétés de monotonie sont encore vérifiées dans la limite thermodynamique. Il est en fait possible de montrer que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  est concave (et en particulier continue) pour  $h \geq 0$ . Nous le ferons au chapitre 7, comme application d'une autre inégalité de corrélation, l'inégalité GHS. Nous prouverons également plus loin (Théorème 4.3.2) que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  est en fait une fonction *analytique* de  $h$  pour  $h \neq 0$ . Par symétrie, on a des résultats analogues pour  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$  et  $h$  négatif.

*Démonstration.* 1. C'est une conséquence immédiate de (2.4) :

$$\frac{\partial}{\partial h} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ = \sum_{i \in \Lambda} \left( \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \right) \geq 0.$$

2. C'est une conséquence immédiate de (2.3) :

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ = \sum_{\substack{\{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset \\ i \sim j}} \left( \langle \sigma_0 \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \right) \geq 0.$$

3. Soient  $(h_m)_{m \geq 1}$  une suite telle que  $h_m \downarrow h$ , et  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite telle que  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ . La suite  $(\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, h_m}^+)_{m, n \geq 1}$  est décroissante et bornée, par le point 1 et (2.5). Par conséquent, il suit du Lemme A.3.1 que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h_m}^+ = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, h_m}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, h_m}^+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+,$$

puisque  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, h}^+$  est évidemment une fonction continue de  $h$ . □

### 3.3 L'énergie libre

Nous allons avoir besoin d'une notion appropriée de convergence de parties finies de  $\mathbb{Z}^d$  vers  $\mathbb{Z}^d$  tout entier. L'idée est que l'on désire extraire les effets de volume, et négliger les corrections dues aux effets de surface. Nous dirons qu'une suite  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  telle que  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  converge vers  $\mathbb{Z}^d$  au sens de van Hove,  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ , si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\partial \Lambda_n| / |\Lambda_n| = 0, \quad (3.2)$$

où  $\partial C \stackrel{\text{déf}}{=} \{i \in C : \exists j \notin C, j \sim i\}$ .

**Théorème 3.3.1.** Soit  $f_{\Lambda}^{\bar{\omega}}(\beta, h) \stackrel{\text{déf}}{=} |\Lambda|^{-1} \log \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ . La limite

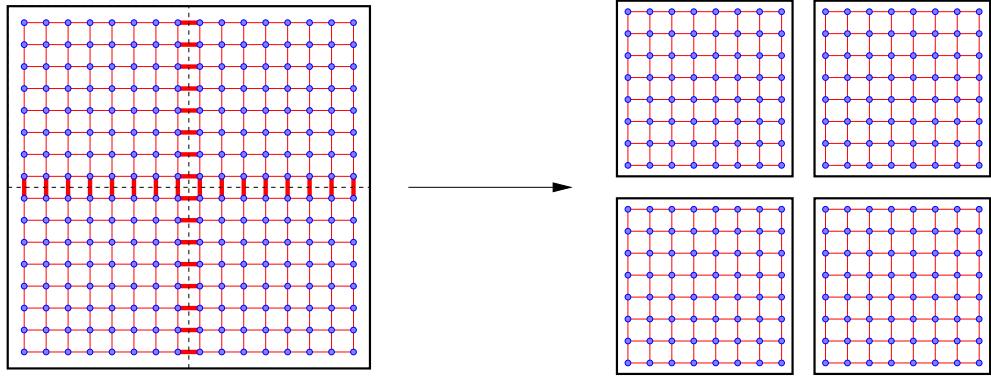
$$f(\beta, h) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} f_{\Lambda}^{\bar{\omega}}(\beta, h)$$

existe et est indépendante de  $\bar{\omega}$  et de la suite  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ . De plus, la fonction  $f(\beta, h)$  est convexe.

La quantité  $f(\beta, h)$  joue un rôle essentiel dans la relation entre Physique Statistique et Thermodynamique ; on l'appelle énergie libre<sup>1</sup>. Nous verrons plus bas que les propriétés analytiques de cette fonction sont profondément liées à la présence de transitions de phase.

*Démonstration. Existence de la limite.* On commence par démontrer la convergence dans le cas de la condition au bord libre. La preuve se fait en deux étapes : tout d'abord pour une suite de boîtes cubiques, puis pour des boîtes générales.

<sup>1</sup>En fait, pour être plus précis, les physiciens appellent la quantité  $\beta f(\beta, h)$  l'énergie libre (par unité de volume).



**Fig. 3.1** – Un cube  $B_{n+1}$  et sa partition en  $2^d$  cubes  $B_n$ . Les interactions entre les différents sous-cubes sont indiquées.

Soit  $B_n \stackrel{\text{déf}}{=} \{1, \dots, 2^n\}^d$ . L'énergie libre associée à la boîte  $B_{n+1}$  peut aisément être comparée à celle associée à la boîte  $B_n$ . En effet, si l'on décompose  $B_{n+1}$  en  $2^d$  copies disjointes de  $B_n$ , notées  $B_n^{(1)}, \dots, B_n^{(2^d)}$  (cf. Figure 3.1), alors l'énergie provenant de l'interaction entre les spins de deux sous-boîtes différentes est bornée par  $\beta$  multiplié par le nombre de sites dans une face de  $B_n$ , soit  $2^{n(d-1)}$ . Comme il y a précisément  $\frac{1}{2}d2^d$  faces à considérer (chacune étant partagée entre deux cubes), on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{B_{n+1};\beta,h}^\varnothing &= \sum_{\omega \in \Omega_{B_{n+1}}} \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq B_{n+1} \\ i \sim j}} e^{\beta \omega_i \omega_j} \prod_{i \in B_{n+1}} e^{h \omega_i} \\ &\geq e^{-\beta \frac{1}{2}d2^d 2^{n(d-1)}} \sum_{\omega \in \Omega_{B_{n+1}}} \prod_{k=1}^{2^d} \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq B_n^{(k)} \\ i \sim j}} e^{\beta \omega_i \omega_j} \prod_{i \in B_n^{(k)}} e^{h \omega_i} \\ &= e^{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} \prod_{k=1}^{2^d} \sum_{\omega \in \Omega_{B_n^{(k)}}} \prod_{\substack{\{i,j\} \subseteq B_n^{(k)} \\ i \sim j}} e^{\beta \omega_i \omega_j} \prod_{i \in B_n^{(k)}} e^{h \omega_i} \\ &= e^{-\beta d 2^{(n+1)(d-1)}} \left( \mathbf{Z}_{B_n;\beta,h}^\varnothing \right)^{2^d}, \end{aligned}$$

et donc que

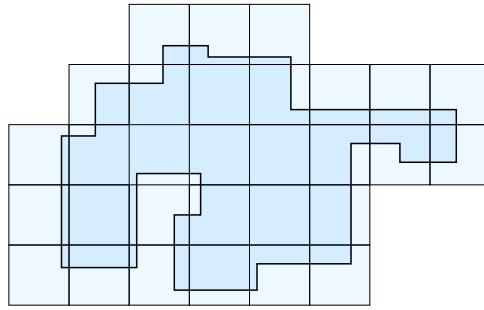
$$\begin{aligned} f_{B_{n+1}}^\varnothing(\beta, h) &= 2^{-d(n+1)} \log \mathbf{Z}_{B_{n+1};\beta,h}^\varnothing \\ &\geq 2^{-d(n+1)} \log (\mathbf{Z}_{B_n;\beta,h}^\varnothing)^{2^d} - \frac{\beta d 2^{(n+1)(d-1)}}{2^{d(n+1)}} \\ &= f_{B_n}^\varnothing(\beta, h) - \beta d 2^{-(n+1)}. \end{aligned}$$

En procédant de la même façon pour obtenir une borne dans l'autre direction, on arrive à

$$|f_{B_{n+1}}^\varnothing(\beta, h) - f_{B_n}^\varnothing(\beta, h)| \leq \beta d 2^{-(n+1)}.$$

L'existence de la limite le long de la suite de cubes  $B_n$  suit immédiatement ; on la note  $f(\beta, h)$ .

Considérons à présent une suite  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  arbitraire. On recouvre  $\Lambda_n$  par des translatés disjoints de  $B_k$ ,  $k$  fixé (cf. Figure 3.2). On note  $\Lambda_n^{\text{ext},k}$  la partie de  $\mathbb{Z}^d$  ainsi obtenue. On vérifie facilement que  $\Lambda_n^{\text{ext},k} \setminus \Lambda_n$  contient au plus  $|\partial \Lambda_n| |B_k|$  sites.



**Fig. 3.2** – Un ensemble  $\Lambda_n$  et un recouvrement possible par des translatés de  $B_k$ .

En procédant comme ci-dessus par découpage de  $\Lambda_n^{\text{ext},k}$  en ses sous-boîtes (exercice !), on voit que, pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $k_0(\epsilon, \beta, d)$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$ ,

$$|f_{\Lambda_n^{\text{ext},k}}^\varnothing(\beta, h) - f_{B_k}^\varnothing(\beta, h)| < \epsilon/3.$$

Comme  $f_{B_k}^\varnothing(\beta, h) \rightarrow f(\beta, h)$ , on a donc également

$$|f_{\Lambda_n^{\text{ext},k}}^\varnothing(\beta, h) - f(\beta, h)| < \epsilon/2$$

pour tout  $k > k_1(\epsilon, \beta, d)$ .

D'autre part, on peut comparer  $\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, h}^\varnothing$  et  $\mathbf{Z}_{\Lambda_n^{\text{ext},k}; \beta, h}^\varnothing$  de façon similaire, en éliminant toutes les interactions liant un spin de  $\Lambda_n^{\text{ext},k} \setminus \Lambda_n$  à ses voisins. On obtient ainsi

$$|f_{\Lambda_n}^\varnothing(\beta, h) - f_{\Lambda_n^{\text{ext},k}}^\varnothing(\beta, h)| \leq \frac{2d|B_k||\partial\Lambda_n|}{|\Lambda_n|} C(\beta, h).$$

Par conséquent, il suit de (3.2) qu'il existe  $n_0(\epsilon, k)$  tel que, pour tout  $n > n_0$ ,

$$|f_{\Lambda_n}^\varnothing(\beta, h) - f_{\Lambda_n^{\text{ext},k}}^\varnothing(\beta, h)| \leq \epsilon/2.$$

La conclusion suit.

*Indépendance de la condition au bord.* Le fait que la même limite est atteinte quelle que soit la condition au bord se vérifie de façon élémentaire, puisque pour tout  $\bar{\omega}$ ,

$$e^{\beta 2d|\partial\Lambda|} \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\varnothing \geq \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}} \geq e^{-\beta 2d|\partial\Lambda|} \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\varnothing,$$

et que l'affirmation suit alors immédiatement de la propriété (3.2).

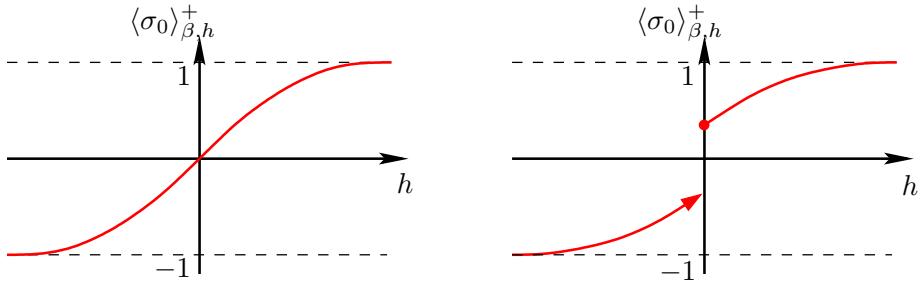
*Convexité.* La convexité peut se vérifier de multiples façons. Par exemple, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\Lambda; \alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2, \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2}^{\bar{\omega}} &= \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}} e^{-\alpha \mathcal{H}_{\Lambda; \beta_1, h_1}(\omega) - (1-\alpha) \mathcal{H}_{\Lambda; \beta_2, h_2}(\omega)} \\ &\leq \left( \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda; \beta_1, h_1}(\omega)} \right)^\alpha \left( \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}} e^{-\mathcal{H}_{\Lambda; \beta_2, h_2}(\omega)} \right)^{(1-\alpha)}, \end{aligned}$$

et donc

$$f_{\Lambda}^{\bar{\omega}}(\alpha\beta_1 + (1-\alpha)\beta_2, \alpha h_1 + (1-\alpha)h_2) \leq \alpha f_{\Lambda}^{\bar{\omega}}(\beta_1, h_1) + (1-\alpha) f_{\Lambda}^{\bar{\omega}}(\beta_2, h_2).$$

□



**Fig. 3.3** – Représentation schématique de  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  en fonction de  $h$ . Gauche : régime d'unicité. Droite : régime de non-unicité. Le comportement est analogue pour toute autre condition au bord, la valeur prise ne différant que lors de la transition. Voir également la Fig. 1.6 (droite).

### 3.4 Une seconde caractérisation de l'unicité

Le théorème suivant montre que la présence d'une transition de phase dans le modèle d'Ising se manifeste par la non-différentiabilité de l'énergie libre : une dérivée première de l'énergie libre est discontinu ; c'est pour cette raison que l'on parle de transition de phase du *premier ordre*<sup>2</sup>.

**Théorème 3.4.1.** *On a les identités suivantes, pour tout  $\beta \geq 0$  et  $h \in \mathbb{R}$ ,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial h^+} f(\beta, h) &= \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+, \\ \frac{\partial}{\partial h^-} f(\beta, h) &= \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-,\end{aligned}$$

où  $\frac{\partial}{\partial h^+}$  et  $\frac{\partial}{\partial h^-}$  représentent les dérivées à droite et à gauche respectivement. En particulier, la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial h} f(\beta, h)$$

existe si et seulement si il y a unicité de la mesure de Gibbs en  $(\beta, h)$ .

*Démonstration.* La démonstration qui suit repose sur un certain nombre de résultats élémentaires sur les fonctions convexes, qui sont regroupés dans l'Appendice A.2.

Soit  $\Lambda_n$  le cube de côté  $2n + 1$ . La convexité de  $f(\beta, h)$  implique que les dérivées à gauche et à droite par rapport à  $h$  existent, sont respectivement continues à gauche et à droite, et diffèrent au plus pour un ensemble dénombrable de valeurs de  $h$ . Par conséquent, pour tout  $h$  il est possible de trouver une suite  $h_k \downarrow h$  telle que  $f$  soit différentiable pour tous les  $h_k$ , ce qui implique que

$$\frac{\partial}{\partial h^+} f(\beta, h) = \lim_{h_k \downarrow h} \frac{\partial}{\partial h} f(\beta, h_k).$$

En volume fini,

$$\frac{\partial}{\partial h} f_{\Lambda_n}^+(\beta, h_k) = \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n, \beta, h_k}^+,$$

et donc, par le point 6 du Théorème A.2.1,

$$\frac{\partial}{\partial h} f(\beta, h_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_n|} \sum_{i \in \Lambda_n} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda_n, \beta, h_k}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h_k}^+,$$

<sup>2</sup>La classification des transitions de phase en fonction du degré de régularité de l'énergie libre (transition d'ordre  $k$  si celle-ci est  $\mathcal{C}^{k-1}$ , mais pas  $\mathcal{C}^k$ ) est dûe à Ehrenfest. Elle est essentiellement abandonnée aujourd'hui, car à la fois trop précise, et trop peu générale pour prendre en compte toute la richesse des comportements possibles. En particulier, on ne parle plus, en général, que de transition de premier ordre, lorsque l'énergie libre n'est pas différentiable, et de transition continue, lorsqu'elle l'est mais qu'un autre type de singularité a lieu.

puisque que la dérivée existe. La dernière identité suit de la proposition 3.2.1. On en conclut que

$$\frac{\partial}{\partial h^+} f(\beta, h) = \lim_{h_k \downarrow h} \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h_k}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+,$$

la dernière identité suivant du point 3 de la proposition 3.2.2.

On montre de la même façon que  $\frac{\partial}{\partial h^-} f(\beta, h) = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ , ce qui prouve que l'existence de la dérivée est équivalente à  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^-$ , cette dernière propriété caractérisant le régime d'unicité par le Théorème 3.1.1.  $\square$

Observez que le Théorème 3.4.1 fait le lien entre la notion mathématique de transition de phase de premier ordre et la discontinuité de l'aimantation comme fonction de  $h$  observée dans l'introduction : lors d'une transition de premier ordre, l'aimantation se comporte qualitativement comme représenté sur la Fig. 3.3. En effet, étant égale à la dérivée de l'énergie libre partout sauf sur l'ensemble au plus dénombrable  $\mathcal{A}$  des points de discontinuité de cette dernière<sup>3</sup>, celle-ci est indépendante de la condition au bord, partout, sauf sur  $\mathcal{A}$ . Lorsqu'une transition de phase du premier ordre a lieu, l'aimantation doit donc être discontinue, puisqu'elle doit coïncider avec  $\mu_{\beta, h}^-$  et  $\mu_{\beta, h}^+$  juste avant et juste après la transition, et que ces deux quantités diffèrent à la transition.

---

<sup>3</sup>Comme nous le verrons au chapitre suivant, cet ensemble est en fait soit vide, soit réduit au point  $\{0\}$ .



## Diagramme de phase

Dans ce chapitre, nous allons analyser le **diagramme de phase** du modèle d’Ising, c’est-à-dire caractériser les valeurs des paramètres  $(\beta, h)$  pour lesquelles il y a unicité ou non de la mesure de Gibbs en volume infini. Avant de procéder, il convient de faire une remarque.

Tout d’abord,  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = -\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^-$ , et donc  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ \neq \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^-$  si et seulement si  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ > 0$ . Il suit de la proposition 3.2.2 que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+$  est une fonction croissante de  $\beta$ . Par conséquent, la **température critique inverse**  $\beta_c(d) \in [0, \infty]$ , définie par

$$\beta_c(d) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup\{\beta \geq 0 : \langle \sigma_0 \rangle_{\beta,0}^+ = 0\},$$

sépare (pour  $h = 0$ ) le régime d’unicité du régime de non-unicité : il y aura transition de phase du premier ordre lorsque  $\beta > \beta_c$ , mais pas lorsque  $\beta < \beta_c$ . La question (pour  $h = 0$ ) est donc de déterminer si  $0 < \beta_c < \infty$ .

L’analyse du diagramme de phase se fait en trois étapes :

- i) Non unicité à basse température :  $\beta_c(d) < \infty \ \forall d \geq 2$ .
- ii) Unicité à haute température :  $\beta_c(d) > 0 \ \forall d \geq 2$ , et  $\beta_c(1) = \infty$ .
- iii) Unicité lorsque  $h \neq 0$ .

La question de l’unicité de la mesure lorsque  $h = 0$  et  $\beta = \beta_c$  est beaucoup plus délicate, et nous nous contenterons des remarques suivantes. L’unicité, ainsi que la continuité de l’aimantation, en  $\beta_c$  est démontrée dans [5] lorsque  $d \geq 4$ . Il suit également du calcul explicite (1.2) qu’il en est de même lorsque  $d = 2$  [54]. Ces résultats sont certainement également vrais en dimension 3, mais cela n’a pas encore été démontré.

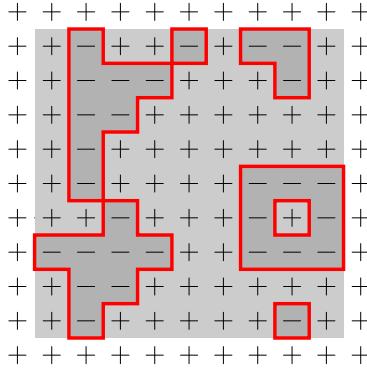
*Remarque 4.0.1.* Il est intéressant de comparer ces résultats aux résultats correspondants dans d’autres modèles.

Dans le cas du modèle de Potts avec un nombre  $q$  d’états suffisamment grand, on peut montrer que : (i) il y a non unicité à la température critique, les  $q$  phases de basse température coexistant avec la phase de haute température, et l’aimantation y est discontinue [34], (ii) il y a non unicité lorsque le champ magnétique est suffisamment faible [6].

Dans les modèles  $O(N)$  avec  $N \geq 2$ , on peut démontrer qu’il n’y a pas de transition de phase du premier ordre en dimensions 1 et 2. Plus généralement une symétrie continue ne se brise pas spontanément en dimensions 1 et 2 (Théorème de Mermin-Wagner) [12, 45, 27].

### 4.1 Non unicité à basse température

Le résultat principal de cette sous-section est le théorème suivant, qui montre que lorsque  $d \geq 2$  et  $h = 0$ ,  $\beta_c < \infty$ , ce qui implique l’existence de multiples mesures de Gibbs en volume infini à basses



**Fig. 4.1** – Les contours d'une configuration du modèle d'Ising bidimensionnel dans une boîte finie avec condition au bord +.

températures.

**Théorème 4.1.1.** *Pour toute dimension  $d \geq 2$ , on a  $\beta_c(d) < \infty$ .*

*Remarque 4.1.1.* Ce théorème montre qu'il n'y a pas unicité lorsque  $\beta$  est suffisamment grand et  $h = 0$  (si  $d \geq 2$ ), mais ne décrit pas l'ensemble des mesures de Gibbs. En dimension 2, on peut en fait montrer que toutes les mesures de Gibbs en volume infini sont de la forme  $\alpha\mu_{\beta,0}^+ + (1 - \alpha)\mu_{\beta,0}^-$ ,  $1 \geq \alpha \geq 0$  (Théorème d'Aizenman-Higuchi [1, 25]). Ceci reste vrai en dimension 3 et plus si l'on se restreint aux mesures invariantes sous les translations [7], mais est faux pour des mesures plus générales [11].

La preuve, donnée en Sous-Section 4.1.2, repose sur une représentation graphique des configurations du modèle d'Ising : la représentation basse température.

### 4.1.1 Représentation basse température

À chaque sommet  $i \in \mathbb{Z}^d$ , on associe le cube  $\mathcal{S}_i \stackrel{\text{déf}}{=} i + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$  centré en  $i$ . Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  ; on note

$$\mathcal{E}_\Lambda^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ \{i, j\} \subseteq \mathbb{Z}^d : \{i, j\} \cap \Lambda \neq \emptyset, i \sim j \right\}. \quad (4.1)$$

À une configuration  $\omega \in \Omega_\Lambda^+$ , on associe le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^d$  défini par

$$\mathcal{M}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{i \in \Lambda : \omega_i = -1} \mathcal{S}_i.$$

Les composantes connexes maximales du bord de  $\mathcal{M}(\omega)$  sont appelées les **contours** de la configuration  $\omega$ , et sont notées  $\Gamma(\omega) = (\gamma_1, \dots, \gamma_{m(\omega)})$  (voir la figure 4.1). Il est évident qu'une telle configuration  $\omega$  est entièrement déterminée par l'ensemble de ses contours.

L'énergie d'une configuration  $\omega$  s'exprime de manière particulièrement simple en termes de ses contours :

$$\mathcal{H}_{\Lambda; \beta, 0}(\omega) = 2\beta \sum_{\gamma \in \Gamma(\omega)} |\gamma| - \beta |\mathcal{E}_\Lambda^+|,$$

où  $|\gamma|$  représente l'“aire” du contour  $\gamma$ . En effet, il suffit de réécrire l'Hamiltonien sous la forme

$$\mathcal{H}_{\Lambda; \beta, 0}(\omega) = -\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^+} (\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - 1) - \beta |\mathcal{E}_\Lambda^+|,$$

et d'observer que  $\sigma_i(\omega)\sigma_j(\omega) - 1 \neq 0$  si et seulement si  $\omega_i \neq \omega_j$ , c'est-à-dire si et seulement si les sommets  $i$  et  $j$  sont séparés par un contour.

En particulier, la fonction de partition du modèle d'Ising dans  $\Lambda$  avec conditions au bord + et  $h = 0$  peut se réécrire en termes des contours sous la forme

$$Z_{\Lambda; \beta, 0}^+ = e^{\beta |\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}. \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Preuve du Théorème 4.1.1

La méthode utilisée dans la preuve suivante est très importante, et peut être étendue à des situations beaucoup plus générales ; on l'appelle l'*argument de Peierls*<sup>1</sup>.

Soit  $\Lambda_n$  le cube de côté  $2n+1$  centré à l'origine. Au vu de l'observation faite en début de chapitre, il est suffisant de montrer qu'uniformément en  $n$ ,  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ > c > 0$  pour tout  $\beta$  suffisamment grand. Nous ne traiterons que du cas de la dimension 2, puisque le cas général est similaire<sup>2</sup>. Bien sûr,  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ = 1 - 2\mu_{\Lambda_n; \beta, 0}^+(\sigma_0 = -1)$ , et il est donc suffisant de montrer que  $\mu_{\Lambda_n; \beta, 0}^+(\sigma_0 = -1) < \frac{1}{2} - c$ , pour une constante  $c > 0$  indépendante de  $n$ .

L'observation cruciale est que

$$\{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^+ : \omega_0 = -1\} \subseteq \{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^+ : \exists \gamma^* \in \Gamma(\omega), \gamma^* \text{ entoure } 0\}.$$

Soit  $\gamma^*$  un contour ; à chaque configuration  $\omega$  telle que  $\Gamma(\omega) \ni \gamma^*$ , on peut associer la configuration  $\mathcal{E}_{\gamma^*}(\omega)$  telle que  $\Gamma(\mathcal{E}_{\gamma^*}(\omega)) = \Gamma(\omega) \setminus \{\gamma^*\}$  (la configuration  $\mathcal{E}_{\gamma^*}(\omega)$  est donc la configuration que l'on obtient en partant de  $\omega$  et en enlevant le contour  $\gamma^*$ ). L'introduction de l'ensemble

$$\mathfrak{C}(\gamma^*) \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathcal{E}_{\gamma^*}(\omega) : \Gamma(\omega) \ni \gamma^*\}$$

de toutes les configurations que l'on peut obtenir en éliminant le contour  $\gamma^*$  d'une autre configuration nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda_n; \beta, 0}^+(\sigma_0 = -1) &\leq \mu_{\Lambda_n; \beta, 0}^+(\exists \gamma^* \in \Gamma, \text{ entourant } 0) \\ &\leq \frac{\sum_{\gamma^* \text{ entourant } 0} \sum_{\omega: \Gamma(\omega) \ni \gamma^*} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}}{\sum_{\omega} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}} \\ &= \sum_{\gamma^* \text{ entourant } 0} e^{-2\beta |\gamma^*|} \frac{\sum_{\omega \in \mathfrak{C}(\gamma^*)} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}}{\sum_{\omega} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}} \\ &\leq \sum_{\gamma^* \text{ entourant } 0} e^{-2\beta |\gamma^*|} \\ &\leq \sum_{k \geq 4} e^{-2\beta k} \#\{\gamma^* \text{ entourant } 0, |\gamma^*| = k\} \\ &\leq 4 \sum_{k \geq 4} \frac{k}{2} 3^{k-1} e^{-2\beta k}, \end{aligned}$$

ce qui est strictement inférieur à  $1/2$ , dès que  $\beta$  est suffisamment grand. La dernière inégalité provient des observations suivantes :

– Le nombre total de contours de longueur  $k$  partant d'un point donné est au plus égal à  $4 \cdot 3^{k-1}$ .

En effet, on a 4 directions possibles pour le premier segment, puis au plus 3 pour chacun des  $k-1$  segments suivants (puisque le contour ne traverse jamais deux fois la même arête).

<sup>1</sup>L'argument donné ici repose de façon essentielle sur la symétrie du modèle d'Ising sous l'échange des spins + et - (où utilise-t-on cette propriété?). L'argument de Peierls peut cependant être étendu à des situations très générales, sans symétrie : c'est le contenu de la théorie de Пирогов-Синай [46, 55]

<sup>2</sup>En fait, on peut utiliser l'inégalité (A.2) pour montrer que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+$  est une fonction croissante de la dimension (exercice !), et le résultat général suit donc de celui en dimension 2.

- Un contour de longueur  $k$  entourant l'origine intersecte nécessairement l'ensemble  $\{(u - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : u = 1, \dots, [k/2]\}$ . Par conséquent, on peut choisir le point de départ dans cet ensemble et appliquer l'observation précédente.

## 4.2 Unicité à haute température

Dans cette section, nous terminons l'analyse du modèle sans champ magnétique, en montrant le résultat complémentaire que  $\beta_c > 0$ , et en prouvant qu'il y a toujours unicité en dimension 1.

Il existe plusieurs approches pour montrer ce type de résultat : par exemple, on peut démontrer que l'énergie libre est analytique pour  $\beta$  suffisamment petit, en utilisant un développement perturbatif (le développement en amas, *cluster expansion* en anglais) ; deux autres approches très générales sont le *critère d'unicité de Dobrushin*, et la “*disagreement percolation*”. Nous utiliserons ici une méthode très simple, proche de celle utilisée dans l'argument de Peierls. Le résultat principal de cette section est le théorème suivant.

**Théorème 4.2.1.** *Pour tout  $d \geq 1$ ,  $\beta_c(d) > 0$ . De plus,  $\beta_c(1) = \infty$ .*

La preuve de ce théorème, donnée dans la Sous-Section 4.2.2, repose sur une autre représentation graphique du modèle d'Ising, appelée **représentation haute-température**.

### 4.2.1 La représentation haute température

Le but de cette sous-section est de dériver une représentation graphique des fonctions de corrélation du modèle d'Ising. À l'aide de cette dernière, il sera alors facile de démontrer que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+$  décroît exponentiellement vite vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, pourvu que  $\beta$  soit choisi suffisamment petit.

La représentation haute température repose sur l'identité élémentaire suivante :

$$e^{\beta \sigma_i \sigma_j} = \cosh(\beta) + \sigma_i \sigma_j \sinh(\beta) = \cosh(\beta) (1 + \tanh(\beta) \sigma_i \sigma_j). \quad (4.3)$$

Nous allons utiliser (4.3) afin de réécrire la fonction de partition sous une nouvelle forme. Pour tout  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ , nous noterons  $\mathfrak{E}_\Lambda^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \{E \subseteq \mathcal{E}_\Lambda^+ : \{i, j\} \in E\}$ , avec  $\mathcal{E}_\Lambda^+$  donné par (4.1). On a alors,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^+ &= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^+} e^{\beta \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega)} \\ &= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^+} (1 + \tanh(\beta) \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega)) \\ &= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \sum_{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^+} \tanh(\beta)^{|E|} \prod_{\{i, j\} \in E} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) \\ &= \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^+} \tanh(\beta)^{|E|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i, j\} \in E} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega). \end{aligned}$$

On pose, pour tout  $i \in \Lambda$  et  $E \in \mathfrak{E}_\Lambda^+$ ,  $I(i, E) \stackrel{\text{déf}}{=} \#\{j \in \mathbb{Z}^d : \{i, j\} \in E\}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\{i, j\} \in E} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) &= \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{i \in \Lambda} \sigma_i(\omega)^{I(i, E)} \\ &= \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega_i \in \{-1, 1\}} \omega_i^{I(i, E)} \\ &= \begin{cases} 2^{|\Lambda|} & \text{si } I(i, E) \text{ est pair pour tout } i \in \Lambda, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On en conclut que

$$Z_{\Lambda; \beta, 0}^+ = 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; \text{pair}}} \tanh(\beta)^{|E|}, \quad (4.4)$$

où l'on a introduit  $\mathfrak{E}_\Lambda^{+; \text{pair}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^+ : I(i, E) \text{ est pair pour tout } i \in \Lambda\}$ .

En procédant de la même façon, on montre également que

$$Z_{\Lambda; \beta, 0}^+ \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; 0}} \tanh(\beta)^{|E|},$$

où  $\mathfrak{E}_\Lambda^{+; 0} \stackrel{\text{déf}}{=} \{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^+ : I(i, E) \text{ est pair pour tout } i \in \Lambda \setminus \{0\}, \text{ mais } I(0, E) \text{ est impair}\}$ .

Étant donné  $E \in \mathfrak{E}_\Lambda^+$ , on note  $\Delta(E)$  l'ensemble de toutes les arêtes de  $\mathcal{E}_\Lambda^+$  n'ayant aucune extrémité en commun avec une arête de  $E$ . On peut alors décomposer toute configuration d'arêtes  $E \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; 0}$  sous la forme  $E = E_0 \cup E'$ , où  $E_0$  est la composante connexe de  $E$  contenant 0 et  $E' \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; \text{pair}}$  satisfait  $E' \subseteq \Delta(E_0)$ .

On peut alors écrire

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \sum_{\substack{E_0 \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; 0} \\ E_0 \ni 0, \text{ connexe}}} \tanh(\beta)^{|E_0|} \frac{\sum_{E' \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; \text{pair}} : E' \subseteq \Delta(E_0)} \tanh(\beta)^{|E'|}}{\sum_{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^{+; 0}} \tanh(\beta)^{|E|}}. \quad (4.5)$$

*Exercice 4.2.1.* Étendre cette représentation à  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+$  et  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\varnothing$ .

#### 4.2.2 Preuve du Théorème 4.2.1

Soit  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^d$ . La représentation haute température (4.5) nous fournit la borne supérieure suivante.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ &= \sum_{\substack{E_0 \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+; 0} \\ E_0 \ni 0, \text{ connexe}}} \tanh(\beta)^{|E_0|} \frac{\sum_{E \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+; \text{pair}} : E \subseteq \Delta(E_0)} \tanh(\beta)^{|E|}}{\sum_{E \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+; \text{pair}}} \tanh(\beta)^{|E|}} \\ &\leq \sum_{\substack{E_0 \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+; 0} \\ E_0 \ni 0, \text{ connexe}}} \tanh(\beta)^{|E_0|}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Cette dernière somme peut être aisément bornée supérieurement en utilisant le lemme suivant.

**Lemme 4.2.1.** *Soit  $G$  un graphe connexe possédant  $N$  arêtes. Il existe un chemin dans  $G$  traversant toutes les arêtes de  $G$  exactement deux fois et partant d'un sommet arbitraire.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $N$ , en observant qu'un graphe connexe quelconque peut toujours être construit arête par arête de telle sorte que tous les graphes intermédiaires soient également connexes. Lorsque  $N = 1$ , le résultat est trivial. Supposons le résultat vrai pour  $N = k$ , et notons  $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(2k))$  un tel chemin. On ajoute au graphe une nouvelle arête, en le maintenant connexe; ceci implique qu'au moins une des extrémités,  $v$ , de cette arête appartienne au graphe de départ. Le chemin désiré est obtenu en suivant  $\pi$  jusqu'à la première visite en  $v$ , puis en faisant un aller-retour à travers la nouvelle arête, et finalement en poursuivant le chemin  $\pi$ .  $\square$

En utilisant ce lemme, on voit que le nombre de graphes  $E_0$  de cardinalité  $\ell$  contribuant à (4.6) est borné par le nombre de chemins de longueur  $2\ell$  partant de 0. Ce dernier est certainement inférieur à  $(2d)^{2\ell}$  puisque chaque nouvelle arête peut être prise dans  $2d$  directions différentes. D'un autre côté,



Fig. 4.2 – Les graphes appartenant à  $\mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+;\text{pair}}$  (gauche) et à  $\mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+;0}$  (droite) en dimension 1.

$E_0$  connecte nécessairement 0 à  $\Lambda_n^c$  : en effet,  $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} I(i, E_0) = 2|E_0|$  est paire ; comme  $I(0, E_0)$  est impair, il doit y avoir au moins un sommet  $i \neq 0$  avec  $I(i, E_0)$  impair, et un tel sommet ne peut pas appartenir  $\Lambda_n$ . On en conclut donc que  $|E_0| \geq n$ , ce qui, avec  $\tanh(\beta) \leq \beta$ , nous donne

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ \leq e^{-c(d)n},$$

avec  $c(d) > 0$ , pour tout  $\beta < 1/(4d^2)$ . En particulier,  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+ = 0$  pour tout  $\beta < 1/(4d^2)$ , ce qui implique l'unicité à haute température.

En dimension 1, la situation est encore meilleure, puisque  $\mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+;\text{pair}} = \{\emptyset, \mathcal{E}_{\Lambda_n}^+\}$ , et  $\mathfrak{E}_{\Lambda_n}^{+;0}$  se réduit également à deux graphes seulement (celui composé de toutes les arêtes dont les extrémités sont négatives, et celui composé de toutes les arêtes dont les extrémités sont positives) ; voir la Fig. 4.2. Par conséquent,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ = \frac{2 \tanh(\beta)^{n+1}}{1 + \tanh(\beta)^{2n+2}},$$

ce qui tend vers 0, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , pour tout  $\beta < \infty$ .

*Exercice 4.2.2.* Montrer qu'il existe  $c = c(\beta) > 0$  tel que  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\beta, 0} \leq \frac{1}{c} e^{-c\|j-i\|_2}$ , pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $\beta$  suffisamment petit.

*Remarque 4.2.1.* On peut en fait montrer que la décroissance exponentielle de  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\beta, 0}$  et la relaxation exponentielle de  $\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+$  vers  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, 0}^+$  restent vraies pour tout  $\beta < \beta_c(d)$  [4].

### 4.3 Unicité en champ magnétique non nul

Il nous reste à étudier l'effet du champ magnétique  $h$ . Dans cette section, nous allons montrer qu'il y a toujours unicité de la mesure de Gibbs en volume infini du modèle d'Ising lorsque le champ magnétique  $h$  n'est pas nul. Il existe au moins deux façons de démontrer ce résultat : la première passe par une autre inégalité de corrélation (l'inégalité GHS, *cf.* Section 7.3.2) qui implique que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  est une fonction concave (et donc continue) de  $h \geq 0$ . Ici, nous utiliserons un autre type d'argument, montrant que l'énergie libre est analytique lorsque  $h \neq 0$ .

Puisque l'énergie libre ne dépend pas de la condition au bord, il suffit de considérer le modèle avec condition au bord libre. Manifestement, à volume fini, la fonction de partition est une fonction analytique de  $h$  (c'est essentiellement un polynôme en  $e^h$ ), et ne s'annule pas sur l'axe réel (c'est une somme de termes strictement positifs), ce qui montre que, pour  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,  $f_\Lambda^\emptyset(\beta, \cdot)$  est également une fonction analytique sur l'axe réel. Le résultat suivant montre que le seul mécanisme pouvant conduire à l'existence d'une singularité de l'énergie libre dans la limite thermodynamique est lorsque des zéros complexes de  $\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\emptyset$ ,  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ , s'accumulent vers l'axe réel.

**Théorème 4.3.1.** Soit  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  un ouvert connexe contenant un segment de la droite réelle. Soit  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$ . Fixons  $\beta \in \mathbb{R}^+$  et supposons que

$$\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, h}^\emptyset \neq 0, \quad \forall h \in \mathcal{D}, \forall n \geq 1. \quad (4.7)$$

Alors, l'énergie libre  $f(\beta, \cdot)$  est analytique dans  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* On considère la suite de fonctions  $g_n(h) \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, h}^\emptyset)^{1/|\Lambda_n|}$  (on choisit la détermination qui est réelle pour  $h \in \mathbb{R}$ ). On a les propriétés suivantes :

- $g_n(h)$  est analytique dans le domaine  $\mathcal{D}$ , puisque  $\mathbf{Z}_{\Lambda_n; \beta, h}^\otimes \neq 0$ .
- $|g_n(h)| \leq g_n(\Re h)$ , et donc la famille  $(g_n)$  est localement uniformément bornée dans  $\mathcal{D}$ .
- La suite de fonctions  $g_n$  converge vers une fonction  $g$ , strictement positive, sur l'axe réel (Théorème 3.3.1).

Il suit du Théorème de convergence de Vitali<sup>3</sup> que la suite de fonctions  $g_n$  converge localement uniformément vers une fonction  $g$  analytique dans le domaine  $\mathcal{D}$ . D'autre part, le théorème de Hurwitz<sup>4</sup> montre que  $g$  ne s'annule pas dans  $\mathcal{D}$ ; par conséquent,  $f(\beta, h) = \log g$  est aussi analytique dans  $\mathcal{D}$ , ce qui démontre le théorème.  $\square$

Afin de démontrer l'unicité de la mesure de Gibbs dès que  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , il suffit donc de trouver un ouvert connexe  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$  contenant  $\{h \in \mathbb{R} : h > 0\}$  (le cas  $h < 0$  suivant alors par symétrie).

**Théorème 4.3.2.** *La condition (4.7) est satisfaite pour  $\mathcal{D} = \{h \in \mathbb{C} : |\Re h| > |\Im h|\}$ . En particulier, l'énergie libre  $f(\beta, \cdot)$  est analytique dans  $\mathcal{D}$ .*

*Remarque 4.3.1.* Il est en fait possible démontrer que  $f(\beta, \cdot)$  est analytique dans tout le domaine  $\{h \in \mathbb{C} : \Re h \neq 0\}$ ; c'est le célèbre Théorème du cercle de Lee-Yang [36] (appelé ainsi parce qu'il montre que les singularités de l'énergie libre, vue comme fonction de  $e^h$ , ne peuvent se trouver que sur le cercle unité). On peut également montrer que l'énergie libre possède une singularité essentielle en  $h = 0$  lorsque  $\beta$  est suffisamment grand<sup>5</sup> [28, 18].

*Remarque 4.3.2.* Il suit du théorème 3.4.1 que l'aimantation est également une fonction analytique de  $h$  lorsque  $h \in \mathbb{R}^*$ .

*Démonstration.* La preuve repose sur un argument de duplication du système<sup>6</sup> : on écrit

$$|\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\otimes|^2 = \sum_{\omega, \omega'} e^{\beta \sum_{\{i, j\} \subset \Lambda, i \sim j} (\omega_i \omega_j + \omega'_i \omega'_j) + \sum_{i \in \Lambda} (h \omega_i + \bar{h} \omega'_i)}.$$

On fait le changement de variables suivant :  $\cos \theta_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\omega_i + \omega'_i)$  et  $\sin \theta_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2}(\omega_i - \omega'_i)$ ; manifestement  $\theta_i \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ . On vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \omega_i \omega_j + \omega'_i \omega'_j &= 2 \cos(\theta_i - \theta_j) = e^{i(\theta_i - \theta_j)} + e^{-i(\theta_i - \theta_j)}, \\ h \omega_i + \bar{h} \omega'_i &= 2 \Re h \cos(\theta_i) + 2i \Im h \sin(\theta_i) = (\Re h + \Im h) e^{i\theta_i} + (\Re h - \Im h) e^{-i\theta_i}. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions, on voit que

$$|\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\otimes|^2 = \sum_{(\theta_i)_{i \in \Lambda}} \exp \left\{ \sum_{\substack{\mathbf{m} = (m_i)_{i \in \Lambda} \\ m_i \in \{0, 1, 2, 3\}}} \alpha_{\mathbf{m}} e^{i \sum_{i \in \Lambda} m_i \theta_i} \right\},$$

pour certains coefficients  $\alpha_{\mathbf{m}}$  positifs, et croissants en  $\Re h + \Im h$  et en  $\Re h - \Im h$ . Par conséquent, en développant l'exponentielle, on obtient

$$|\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\otimes|^2 = \sum_{(\theta_i)_{i \in \Lambda}} \sum_{\substack{\mathbf{m} = (m_i)_{i \in \Lambda} \\ m_i \in \{0, 1, 2, 3\}}} \hat{\alpha}_{\mathbf{m}} e^{i \sum_{i \in \Lambda} m_i \theta_i},$$

<sup>3</sup>**Théorème de convergence de Vitali.** [10, p. 154] Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions analytiques dans  $\mathcal{D}$ , localement uniformément bornées, convergeant sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans  $\mathcal{D}$ . Alors  $f_n$  converge localement uniformément dans  $\mathcal{D}$ , la limite étant par conséquent une fonction analytique.

<sup>4</sup>**Théorème de Hurwitz.** [10, Corollary 2.6] Soit  $\mathcal{D}$  un ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions analytiques convergant localement uniformément dans  $\mathcal{D}$  vers une fonction analytique  $f$ . Si  $f_n(z) \neq 0$ , pour tout  $z \in \mathcal{D}$  et pour tout  $n$ , alors  $f$  est soit identiquement nulle soit jamais nulle dans  $\mathcal{D}$ .

<sup>5</sup>Ce résultat implique qu'il est impossible de prolonger analytiquement l'énergie libre à travers 0, et donc que la description classique de la métastabilité en thermodynamique n'est pas correcte, au moins pour les modèles avec forces à courte portée.

<sup>6</sup>L'argument présenté ici est inspiré de [13].

où les coefficients  $\widehat{\alpha}_m$  sont encore positifs, et croissants en  $\Re h + \Im h$  et en  $\Re h - \Im h$ . À présent, on observe que

$$\sum_{(\theta_i)_{i \in \Lambda}} e^{i \sum_{i \in \Lambda} m_i \theta_i} = \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\theta_i} e^{im_i \theta_i} = \begin{cases} 4^{|\Lambda|} & \text{si } m_i = 0, \forall i \in \Lambda \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que  $|\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\varnothing|^2 = 4^{|\Lambda|} \widehat{\alpha}_{(0,0,\dots,0)}$ , et donc que  $|\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\varnothing|^2$  est croissant en  $\Re h + \Im h$  et en  $\Re h - \Im h$ . Ceci prouve que

$$|\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^\varnothing| \geq \mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, \Re h - |\Im h|}^\varnothing > 0,$$

puisque  $\Re h - |\Im h| = \min(\Re h + \Im h, \Re h - \Im h)$ . □

# Dualité de Kramers-Wannier

Dans ce chapitre, nous allons étudier une propriété spécifique au modèle d'Ising en champ nul sur  $\mathbb{Z}^2$  : la **dualité de Kramers-Wannier**. Cette dernière permet de relier certaines propriétés du modèle à haute température à des propriétés à basse température. Elle constitue l'un des outils importants pour l'analyse non-perturbative de ce modèle, et est une des raisons pour lesquelles le modèle bidimensionnel est beaucoup mieux compris que le modèle en dimensions supérieures. Ici, nous nous contenterons de voir une application élémentaire de cette dualité permettant d'exhiber une symétrie remarquable de l'énergie libre. Nous expliquerons également comment cette symétrie permet de déterminer, sous une hypothèse raisonnable (pouvant être justifiée rigoureusement), la valeur de  $\beta_c(2)$  sans passer par le calcul explicite de l'énergie libre.

## 5.1 Dualité haute température/basse température

La dualité de Kramers-Wannier repose sur une combinaison des représentations basse température et haute température introduites dans les sections 4.1.1 et 4.2.1. Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^2$ . Nous avons vu que la fonction partition dans  $\Lambda$  avec condition au bord + peut s'écrire

$$\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^+ = e^{\beta |\mathcal{E}_\Lambda^+|} \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} e^{-2\beta |\gamma|}. \quad (5.1)$$

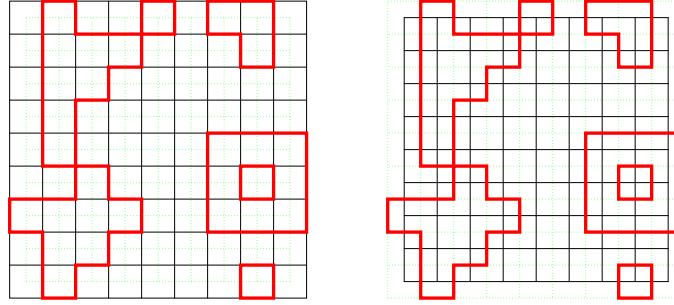
Nous avons également dérivé en (4.4) la représentation haute température de cette fonction de partition. Ce dont nous allons avoir besoin, cependant, c'est de la représentation haute température pour  $\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^\circ$ . Celle-ci s'obtient exactement de la même façon (exercice !), en remplaçant simplement l'ensemble  $\mathcal{E}_\Lambda^+$  par  $\mathcal{E}_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \{i, j\} \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \{i, j\} \subseteq \Lambda, i \sim j \}$ . On obtient ainsi

$$\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, 0}^\circ = 2^{|\Lambda|} \cosh(\beta)^{|\mathcal{E}_\Lambda|} \sum_{E \in \mathfrak{E}_\Lambda^{\text{pair}}} \tanh(\beta)^{|E|}, \quad (5.2)$$

où l'on a naturellement posé  $\mathfrak{E}_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \{E \subseteq \mathcal{E}_\Lambda\}$  et similairement pour  $\mathfrak{E}_\Lambda^{\text{pair}}$ .

Nous allons appliquer les représentations (5.1) et (5.2), respectivement, aux boîtes suivantes :  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^2$  et  $\Lambda_n^* \stackrel{\text{déf}}{=} \{-n - \frac{1}{2}, -n + \frac{3}{2}, \dots, n + \frac{1}{2}\}^2$ . Dans la suite, nous identifierons toujours une arête avec le segment de droite joignant ses deux extrémités.

**Lemme 5.1.1.** *Soit  $E \subseteq \mathcal{E}_{\Lambda_n^*}$ . Alors  $E \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n^*}^{\text{pair}}$  si et seulement si  $E$  coïncide avec l'ensemble des arêtes des contours associés à une configuration  $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^+$ .*



**Fig. 5.1** – Un ensemble d’arêtes appartenant à  $\mathfrak{E}_{\Lambda_n^*}^{\text{pair}}$  (gauche) correspondant également aux contours associés à une configuration de spins dans  $\Lambda_n$  (droite ; cf. Fig. 4.1).

*Démonstration.* Soit  $E$  l’ensemble des arêtes des contours associés à une configuration  $\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^+$ . Soit  $x \in \Lambda_n^*$  et soient  $i, j, k, l$  les quatre sommets de  $\Lambda_n$  se trouvant à distance  $1/\sqrt{2}$  de  $x$ , ordonnés de sorte que  $i \sim j$ ,  $j \sim k$  et  $k \sim l$ . On a évidemment

$$(\omega_i \omega_j)(\omega_j \omega_k)(\omega_k \omega_l)(\omega_l \omega_i) = \omega_i^2 \omega_j^2 \omega_k^2 \omega_l^2 = 1,$$

ce qui implique que le nombre de produits égaux à  $-1$  dans le membre de gauche est pair. Or, un produit est égal à  $-1$  précisément lorsqu’un contour sépare les sommets correspondants. Par conséquent,  $E \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n^*}^{\text{pair}}$ .

Réciproquement, étant donné un ensemble  $E \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n^*}^{\text{pair}}$ , on peut construire une configuration de spins  $\omega$  dont l’ensemble des arêtes des contours est précisément donné par  $E$ . On procède comme suit : à chaque sommet de  $\Lambda_n^*$  où se rencontrent 4 arêtes, on déforme les arêtes de façon à remplacer  $+$  par  $\prec$ . Manifestement, après cette opération  $E$  donne lieu à une famille de courbes fermées simples disjointes. On vérifie à présent facilement que la configuration

$$\omega_i = (-1)^{\#\text{boucles entourant } i}, \quad i \in \mathbb{Z}^d,$$

possède les propriétés recherchées.  $\square$

Il suit du lemme précédent que

$$\sum_{E \in \mathfrak{E}_{\Lambda_n^*}^{\text{pair}}} \tanh(\beta^*)^{|E|} = \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda_n}^+} \prod_{\gamma \in \Gamma(\omega)} \tanh(\beta^*)^{|\gamma|}.$$

Ainsi, si l’on choisit  $\beta^*$  de sorte que

$$\tanh(\beta^*) = e^{-2\beta}, \quad (5.3)$$

on obtient l’identité

$$2^{-|\Lambda_n^*|} \cosh(\beta^*)^{-|\mathcal{E}_{\Lambda_n^*}|} \mathbf{Z}_{\Lambda_n^*; \beta^*, 0}^{\otimes} = e^{-\beta|\mathcal{E}_{\Lambda_n^*}^+|} \mathbf{Z}_{\Lambda_n^*; \beta, 0}^+.$$
 (5.4)

Étant donné que l’on a, lorsque  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{|\Lambda_n^*|}{|\Lambda_n|} \rightarrow 1, \quad \frac{|\mathcal{E}_{\Lambda_n^*}|}{|\Lambda_n|} \rightarrow 2, \quad \frac{|\mathcal{E}_{\Lambda_n^*}^+|}{|\Lambda_n|} \rightarrow 2,$$

il suit de (5.4) et (5.3) (après quelques manipulations algébriques) que

$$f(\beta, 0) = f(\beta^*, 0) - \log \sinh(2\beta^*), \quad (5.5)$$

puisque l’énergie libre est indépendante de la condition au bord choisie (Théorème 3.3.1).

La remarquable identité (5.5) relie le comportement de l’énergie libre (en champ nul) lorsque  $\beta$  est grand et lorsque  $\beta$  est petit. En effet, l’involution (5.3) possède un unique point fixe en  $\beta_{\text{sd}}$ , solution de  $\tanh \beta_{\text{sd}} = e^{-2\beta_{\text{sd}}}$ , et échange les intervalles  $[0, \beta_{\text{sd}}]$  et  $(\beta_{\text{sd}}, \infty]$ . Il n’est pas difficile de déterminer explicitement  $\beta_{\text{sd}}$  :  $\beta_{\text{sd}} = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \approx 0,441$ .

## 5.2 Détermination de $\beta_c(2)$

Une application intéressante de la relation (5.5) est la dérivation faite par Kramers et Wannier en 1941 de la température critique du modèle d'Ising bidimensionnel, 3 ans avant le calcul (rigoureux) de l'énergie libre par Onsager. Cette dérivation repose sur l'hypothèse suivante : nous avons vu que la fonction  $f(\beta, 0)$  est non-analytique en  $\beta = \beta_c$  ; nous allons supposer qu'il s'agit de la seule singularité sur  $(0, \infty)$ . Dans ce cas,  $\beta_c$  doit être le point fixe  $\beta_{\text{sd}}$  de la transformation (5.3), car si  $f$  était singulière en  $\beta \neq \beta_{\text{sd}}$ , alors elle le serait également en  $\beta^* \neq \beta$ , par la relation (5.5). On en déduit que

$$\beta_c = \beta_{\text{sd}} = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \cong 0,441.$$



# Chapitre 6

## La FK-percolation

Dans ce chapitre, nous allons introduire le modèle de FK-percolation, une généralisation de la percolation de Bernoulli. Après avoir énoncé quelques propriétés de base, nous montrerons comment ce modèle permet d'unifier au sein d'une même famille à un paramètre tous les modèles de Potts (donc, en particulier, le modèle d'Ising) en champ nul, ainsi que le modèle de percolation.

Nous verrons comment cela rend possible de donner un sens précis à la propagation de l'information dans les modèles de Potts. En particulier, nous reliersons l'existence d'une transition de phase du premier ordre avec l'existence d'un amas infini le long duquel l'information est transmise.

### 6.1 Définition et propriétés élémentaires

#### 6.1.1 Définition

La FK-percolation doit son nom à ses inventeurs, Fortuin et Kastelyn [16] ; on emploie en général la terminologie *random cluster model* en anglais.

Notons  $\mathcal{E}^d$  l'ensemble des arêtes de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\mathcal{E}^d \stackrel{\text{déf}}{=} \{\{i, j\} \subseteq \mathbb{Z}^d : i \sim j\}$ .

**Configurations.** L'ensemble des configurations de la FK-percolation est  $\Omega^{\text{FK}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d}$  ; les configurations sont notées  $\eta = (\eta_e)_{e \in \mathcal{E}^d}$ . Une arête  $e \in \mathcal{E}^d$  est dite ouverte dans la configuration  $\eta$  si  $\eta_e = 1$  ; sinon, elle est dite fermée. Une configuration  $\eta \in \Omega^{\text{FK}}$  est identifiée avec le graphe ayant pour sommets  $\mathbb{Z}^d$  et pour arêtes les arêtes ouvertes de  $\eta$ .

**Condition au bord.** Soit  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^d$ . Étant donnée une configuration  $\bar{\eta} \in \Omega^{\text{FK}}$ , on note  $\Omega_{\mathcal{E}, \bar{\eta}}^{\text{FK}} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\eta \in \Omega^{\text{FK}} : \eta_e = \bar{\eta}_e, \forall e \notin \mathcal{E}\}$  l'ensemble des configurations coïncidant avec  $\bar{\eta}$  hors de  $\mathcal{E}$ . Dans une telle situation, on dit que  $\bar{\eta}$  est la **condition au bord**.

**Amas.** On appelle **amas** de la configuration  $\eta$  les composantes connexes maximales de  $\eta$  (y compris les sommets isolés). On note  $\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)$  le nombre d'amas de la configuration  $\eta \in \Omega^{\text{FK}}$  intersectant  $\mathcal{E}$ . Soient  $i, j \in \mathbb{Z}^d$  ; on note  $\{i \leftrightarrow j\}$  l'événement “ $i$  et  $j$  appartiennent au même amas” et  $\{i \leftrightarrow A\}$  l'événement “il existe  $j \in A$  tel que  $i \leftrightarrow j$ ”.

**Mesure de probabilité.** La FK-percolation dépend de deux paramètres réels :  $p \in [0, 1]$  et  $q \in (0, \infty)$ . Étant donnés  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^d$  et une condition au bord  $\bar{\eta}$ , la FK-percolation est définie par la mesure de probabilité suivante sur  $\Omega_{\mathcal{E}, \bar{\eta}}^{\text{FK}}$  :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{E}; p, q}^{\bar{\eta}}(\eta) = \frac{1}{Z_{\mathcal{E}; p, q}^{\bar{\eta}}} q^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)} \prod_{e \in \mathcal{E}} p^{\eta_e} (1-p)^{1-\eta_e}. \quad (6.1)$$

La constante de normalisation  $Z_{\mathcal{E}; p, q}^{\bar{\eta}}$  est appelée **fonction de partition**.

*Remarque 6.1.1.* Observez que lorsque  $q = 1$  on retrouve le modèle de percolation de Bernoulli (restreint à  $\mathcal{E}$ ). Le modèle avec  $q = 1$  est le seul pour lequel les variables  $\eta_e$  sont indépendantes.

### 6.1.2 Propriétés de base

Comme pour le modèle d'Ising, l'ensemble des configurations du modèle de FK-percolation admet un ordre partiel naturel :  $\eta \leq \eta'$  si et seulement si  $\eta_e \leq \eta'_e$  pour tout  $e \in \mathcal{E}^d$ . Une propriété cruciale de ce modèle, qui rend son analyse possible, est la validité des inégalités FKG lorsque  $q \geq 1$ .

**Proposition 6.1.1.** *Soient  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^d$ ,  $p \in [0, 1]$  et  $q \in [1, \infty)$ . Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions croissantes de  $\Omega^{\text{FK}}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors*

$$\langle f g \rangle_{\mathcal{E};p,q}^{\bar{\eta}} \geq \langle f \rangle_{\mathcal{E};p,q}^{\bar{\eta}} \langle g \rangle_{\mathcal{E};p,q}^{\bar{\eta}},$$

pour tout  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^d$  et toute configuration au bord  $\bar{\eta}$ .

*Démonstration.* Notons  $\pi(\eta) = q^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)}$ . On applique le Théorème A.1.2 avec  $\mu_e(\eta_e = 1) = p$ , pour tout  $e \in \mathcal{E}$ , et les quatre fonctions  $f_1(\eta) = \pi(\eta)f(\eta)$ ,  $f_2(\eta) = \pi(\eta)g(\eta)$ ,  $f_3(\eta) = \pi(\eta)$  et  $f_4(\eta) = \pi(\eta)f(\eta)g(\eta)$ . La conclusion suit alors immédiatement une fois que l'on a vérifié que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta) + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta') \leq \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta \vee \eta') + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta \wedge \eta').$$

Afin de démontrer cette inégalité, il suffit de montrer que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta') \text{ est croissante en } \eta'. \quad (6.2)$$

En effet, on a alors

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta') \geq \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta \vee (\eta' \wedge \eta)) - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta' \wedge \eta) = \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta) - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta' \wedge \eta),$$

puisque  $\eta \vee (\eta \wedge \eta') = \eta$ .

Soit  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E},\bar{\eta}}^{\text{FK}}$ . On numérote les arêtes de  $\mathcal{E}$  ouvertes dans la configuration  $\eta$  :  $e_1, \dots, e_n$ . On peut ainsi écrire  $\eta = \bigvee_{i=1}^n \eta^i$ , où la configuration  $\eta^i \in \Omega_{\mathcal{E},\bar{\eta}}^{\text{FK}}$  satisfait  $\eta_e^i = \mathbf{1}_{\{e=e_i\}}$ , pour toute arête  $e \in \mathcal{E}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta') &= \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta^1 \vee \dots \vee \eta^n \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta') \\ &= \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta^1 \vee \dots \vee \eta^n \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta^1 \vee \dots \vee \eta^{n-1} \vee \eta') \\ &\quad + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta^1 \vee \dots \vee \eta^{n-1} \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta^1 \vee \dots \vee \eta^{n-2} \vee \eta') \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta^1 \vee \eta') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta'). \end{aligned}$$

Chacune des lignes dans le membre de droite est de la forme

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\tilde{\eta} \vee \tilde{\eta}') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\tilde{\eta}'),$$

avec  $\tilde{\eta} \in \Omega_{\mathcal{E},\bar{\eta}}^{\text{FK}}$  ne possédant qu'une unique arête ouverte dans  $\mathcal{E}$ . Il suffit donc de démontrer (6.2) dans ce cas particulier. Mais ceci est évident, car

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\tilde{\eta} \vee \tilde{\eta}') - \mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\tilde{\eta}') = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leftrightarrow j \text{ dans } \tilde{\eta}', \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on a noté  $e = (i, j)$  l'unique arête de  $\mathcal{E}$  ouverte dans  $\tilde{\eta}$ . □

Deux conditions au bord jouent à nouveau un rôle extrémal pour l'ordre partiel introduit plus haut : la condition au bord libre  $\bar{\eta} \equiv 0$ , et la condition au bord wired  $\bar{\eta} \equiv 1$ . On notera les mesures correspondantes  $\mathbb{P}_{\mathcal{E};p,q}^{\text{O}}$  et  $\mathbb{P}_{\mathcal{E};p,q}^{\text{W}}$  respectivement. Pour ces deux conditions au bord, on prouve facilement l'existence de mesures limites en volume infini.

**Théorème 6.1.1.** *Soient  $p \in [0, 1]$  et  $q \in [1, \infty)$ . Alors les limites*

$$\mathbb{P}_{p,q}^{\emptyset} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\mathcal{E} \uparrow \mathcal{E}^d} \mathbb{P}_{\mathcal{E};p,q}^{\emptyset}$$

et

$$\mathbb{P}_{p,q}^w \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\mathcal{E} \uparrow \mathcal{E}^d} \mathbb{P}_{\mathcal{E};p,q}^w$$

existent et sont indépendantes de la suite  $\mathcal{E} \uparrow \mathcal{E}^d$  choisie. De plus, les mesures limites sont invariantes sous l'action du groupe des translations de  $\mathbb{Z}^d$ .

*Démonstration.* Ce théorème se démontrant comme le Théorème 2.3.2, la preuve est laissée en exercice.  $\square$

## 6.2 Relation avec les modèles d'Ising et de Potts

On a déjà observé que le modèle de FK-percolation se réduit au modèle de percolation de Bernoulli lorsque  $q = 1$ . Nous allons montrer à présent que la FK-percolation est intimement liée aux modèles d'Ising (lorsque  $q = 2$ ) et de Potts (lorsque  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$ ). Cette observation est à la base de nombreuses approches rigoureuses de ces modèles, permettant d'une part d'utiliser certaines idées et méthodes développées pour le modèle de percolation, et d'autre part de démontrer simultanément des résultats pour toute cette famille de modèles.

Dans cette section, nous ne traiterons explicitement que le modèle d'Ising ( $q = 2$ ), afin d'éviter de devoir introduire trop de nouvelles notations, mais tout s'étend immédiatement aux autres valeurs de  $q \in \{2, 3, \dots\}$  (exercice).

Il existe plusieurs moyens de faire le lien entre le modèle d'Ising et la FK-percolation. Le plus profond est sans doute de construire un couplage de ces deux modèles [14]. Nous nous contenterons de construire ce couplage entre les mesures avec condition au bord + (pour Ising) et wired (pour la FK-percolation), mais les mêmes arguments s'appliquent plus généralement.

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . La mesure d'Edwards-Sokal est la mesure de probabilité sur  $\Omega_{\Lambda}^+ \times \Omega_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+, w}^{\text{FK}}$  définie par

$$\mathbb{Q}_{\Lambda; p}(\omega, \eta) \propto \prod_{e=\{i,j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}^+} \left( (1-p) \delta_{\eta_e, 0} + p \delta_{\eta_e, 1} \delta_{\omega_i, \omega_j} \right).$$

**Théorème 6.2.1.** *Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,  $\beta \in [0, \infty]$  et  $p_{\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - e^{-2\beta} \in [0, 1]$ . La mesure d'Edwards-Sokal fournit un couplage de  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$  et  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+; p_{\beta}, 2}^w$ , c'est-à-dire*

$$\sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+, w}^{\text{FK}}} \mathbb{Q}_{\Lambda; p_{\beta}}(\omega, \eta) = \mu_{\Lambda; \beta, 0}^+(\omega),$$

pour toute configuration  $\omega \in \Omega_{\Lambda}^+$ , et

$$\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}^+} \mathbb{Q}_{\Lambda; p_{\beta}}(\omega, \eta) = \mathbb{P}_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+; p_{\beta}, 2}^w(\eta),$$

pour toute configuration  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+, w}^{\text{FK}}$ .

*Démonstration.* Afin d'alléger l'écriture on écrira simplement  $\mathcal{E}$  au lieu de  $\mathcal{E}_\Lambda^+$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E}, w}^{\text{FK}}} \mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\omega, \eta) &\propto \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E}, w}^{\text{FK}}} \prod_{e=\{i, j\} \in \mathcal{E}} ((1-p_\beta)\delta_{\eta_e, 0} + p_\beta \delta_{\eta_e, 1}\delta_{\omega_i, \omega_j}) \\ &= \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}} \{1 - p_\beta + p_\beta \delta_{\omega_i, \omega_j}\} \\ &\propto \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}} e^{\beta \omega_i \omega_j}, \end{aligned}$$

puisque  $1 - p_\beta + p_\beta \delta_{\omega_i, \omega_j} = e^{-\beta} e^{\beta \omega_i \omega_j}$ . La première affirmation suit. Passons à la seconde. On a

$$\mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\omega, \eta) \propto \prod_{e=\{i, j\} \in \mathcal{E}} ((1-p_\beta)\delta_{\eta_e, 0} + p_\beta \delta_{\eta_e, 1}\delta_{\omega_i, \omega_j}) = \left( \prod_{e \in \mathcal{E}} p_\beta^{\eta_e} (1-p_\beta)^{1-\eta_e} \right) \mathbf{1}_{\{\omega_i = \omega_j, \forall i \leftrightarrow j\}}. \quad (6.3)$$

Par conséquent,

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\omega, \eta) \propto \left( \prod_{e \in \mathcal{E}} p_\beta^{\eta_e} (1-p_\beta)^{1-\eta_e} \right) \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \mathbf{1}_{\{\omega_i = \omega_j, \forall i \leftrightarrow j\}}.$$

La somme sur  $\omega$  est facilement évaluée : les spins sur chaque amas fini de  $\eta$  peuvent soit tous prendre la valeur 1, soit tous la valeur  $-1$ . Par contre, les spins appartenant à l'amas infini ont leur valeur fixée à 1 par la condition au bord. Il s'ensuit que la somme sur  $\omega$  contient précisément  $2^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)-1}$  termes, et la seconde affirmation est démontrée.  $\square$

L'intérêt du couplage d'Edwards-Sokal est qu'il permet de décrire très simplement les mesures conditionnelles, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 6.2.2.** Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,  $\beta \in [0, \infty]$  et  $p_\beta = 1 - e^{-2\beta}$ .

1. Soit  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}_\Lambda^+, w}^{\text{FK}}$ . La mesure conditionnelle  $\mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\cdot | \eta)$  est obtenue en mettant tous les spins appartenant à un même amas fini à la même valeur 1 ou  $-1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ , indépendamment pour chaque tel amas, et tous les spins appartenant à l'amas infini à 1.
2. Soit  $\omega \in \Omega_\Lambda^+$ . La mesure conditionnelle  $\mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\cdot | \omega)$  est obtenue de la façon suivante. Si  $e = \{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda^+$  est telle que  $\omega_i \neq \omega_j$ , alors  $\eta_e = 0$ . Sinon, on pose

$$\eta_e = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } p_\beta, \\ 0 & \text{avec probabilité } 1 - p_\beta, \end{cases}$$

ce choix étant fait indépendamment pour chaque telle arête.

*Démonstration.* À nouveau, on écrit simplement  $\mathcal{E}$  au lieu de  $\mathcal{E}_\Lambda^+$ . Il suit de (6.3) que

$$\mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\omega | \eta) = \frac{\mathbf{1}_{\{\omega_i = \omega_j, \forall i \leftrightarrow j\}}}{2^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)}}, \quad \forall \omega \in \Omega_\Lambda^+.$$

Par conséquent, la mesure conditionnelle est concentrée sur les configurations de spins constantes sur chaque amas de  $\eta$  (les spins situés sur l'amas infini étant fixés à 1), et uniforme sur ces configurations. La première affirmation est démontrée.

Pour la seconde affirmation, on a similairement, pour une certaine constante  $C = C(\omega)$ ,

$$\mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\eta | \omega) = C(\omega) \prod_{\substack{e=\{i, j\} \in \mathcal{E} \\ \omega_i \neq \omega_j}} \delta_{\eta_e, 0} \prod_{\substack{e=\{i, j\} \in \mathcal{E} \\ \omega_i = \omega_j}} ((1-p_\beta)\delta_{\eta_e, 0} + p_\beta \delta_{\eta_e, 1}).$$

Par conséquent, restreinte aux arêtes de  $\mathcal{E}$ , la mesure conditionnelle est la mesure produit avec

$$\eta_e = 1 \text{ avec probabilité } \begin{cases} 0 & \text{si } \omega_i \neq \omega_j, \\ p_\beta & \text{si } \omega_i = \omega_j. \end{cases}$$

□

Une interprétation du résultat précédent est la suivante. On aimerait décrire de manière quantitative la propagation de l'information due à l'interaction entre spins voisins dans le modèle d'Ising. Clairement, si deux spins voisins prennent des valeurs différentes, aucune information n'a été transmise de l'un vers l'autre. D'un autre côté, s'ils prennent la même valeur, cela peut être dû à un transfert d'information, mais également au pur hasard. Le couplage précédent donne un sens précis à une telle image : de l'information est échangée entre deux spins voisins s'ils sont reliés par une arête dans la configuration FK correspondante. Ceci a lieu avec probabilité 0 si les valeurs des spins sont différentes, et avec probabilité  $p_\beta$  sinon. Bien entendu, ce choix de la probabilité  $p_\beta$  peut sembler arbitraire. Nous allons cependant voir, dans la section suivante, que c'est précisément la valeur nécessaire afin que la présence d'ordre à longue distance dans le modèle d'Ising coïncide avec la présence d'un amas infini dans la configuration FK. On peut ainsi interpréter la présence de la transition de phase dans le modèle d'Ising comme résultant de la transmission de l'information arbitrairement loin dans le système.

### 6.3 Transition de phase et percolation

Dans cette section, nous allons montrer comment la relation entre la FK-percolation et le modèle d'Ising permet de réinterpréter la transition en  $\beta_c$  comme une transition de percolation dans la représentation FK : pour  $\beta < \beta_c$ , la probabilité que l'origine appartienne à un amas de cardinalité infinie est nulle, mais elle est strictement positive lorsque  $\beta > \beta_c$ .

Cette réinterprétation est basée sur une reformulation de certaines espérances sous  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$  en termes de la FK-percolation. Le lemme suivant donne deux exemples particuliers de cette procédure.

**Lemme 6.3.1.** *Soient  $\beta \in [0, \infty]$  et  $p_\beta = 1 - e^{-2\beta}$ . Alors, pour tout  $i, j \in \Lambda$ , et tout  $B \subseteq \Lambda$ ,*

$$\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w(i \leftrightarrow \Lambda^c), \quad (6.4)$$

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w(i \leftrightarrow j), \quad (6.5)$$

$$\langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \mathbb{P}^w(|B \cap C| \text{ pair pour tout amas fini } C). \quad (6.6)$$

*Démonstration.* À nouveau, on écrit simplement  $\mathcal{E}$  au lieu de  $\mathcal{E}_\Lambda^+$ . On utilise le Théorème 6.2.2. On a

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ &= \sum_{\substack{\omega \in \Omega_\Lambda^+ \\ \eta \in \Omega_{\mathcal{E}, w}^{\text{FK}}}} \omega_i \mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\omega, \eta) \\ &= \sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda, w}^{\text{FK}}} \mathbb{P}_{\mathcal{E}; p_\beta, 2}^w(\eta) \sum_{\omega \in \Omega_\Lambda^+} \omega_i \mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\omega | \eta) \\ &= \sum_{\eta \in \Omega_{\Lambda, w}^{\text{FK}}} \mathbb{P}_{\mathcal{E}; p_\beta, 2}^w(\eta) \mathbf{1}_{\{i \leftrightarrow \Lambda^c\}}, \end{aligned}$$

puisque, sous  $\mathbb{Q}_{\Lambda; p_\beta}(\cdot | \eta)$ ,  $\omega_i$  prendra valeur 1 et -1 avec même probabilité si l'amas contenant  $i$  est fini, mais prendra toujours valeur 1 s'il est infini. Cela démontre (6.4).

Les identités (6.5) et (6.6) se démontrent similairement, et sont laissées en exercice. □

On dit qu'il y a percolation dans le modèle de FK-percolation aux valeurs  $p$  et  $q$  des paramètres si  $\mathbb{P}_{p,q}^w(0 \leftrightarrow \infty) > 0$ , où l'on a noté  $\{0 \leftrightarrow \infty\}$  l'événement "0 appartient à un amas infini".

Un coup d'œil à (6.4) montre qu'il devrait y avoir percolation précisément lorsque  $\langle \sigma_i \rangle_{\beta,0}^+ > 0$ , ce qui montrerait qu'il y a non-unicité de la mesure de Gibbs en volume infini du modèle d'Ising si et seulement s'il y a FK-percolation pour les paramètres correspondants, donnant ainsi une interprétation précise à l'affirmation que la non-unicité provient de la transmission de l'information depuis l'infini. Le résultat suivant justifie cette heuristique.

**Théorème 6.3.1.** *Soient  $\beta \in [0, \infty]$  et  $p_\beta = 1 - e^{-2\beta}$ . Alors*

$$\mathbb{P}_{p_\beta,2}^w(i \leftrightarrow \infty) = \langle \sigma_i \rangle_{\beta,0}^+.$$

*En particulier, il y a percolation sous  $\mathbb{P}_{p_\beta,2}^w$  si et seulement s'il y a non-unicité dans le modèle d'Ising à la température inverse  $\beta$ .*

*Démonstration.* Puisque (6.4) et le Théorème 2.3.2 impliquent que

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w(0 \leftrightarrow \Lambda^c) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \langle \sigma_i \rangle_{\beta, 0}^+,$$

il suffit de vérifier que  $\mathbb{P}_{p_\beta,2}^w(0 \leftrightarrow \infty) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w(0 \leftrightarrow \Lambda^c)$ . Pour cela on observe que, pour tout  $0 \in \Delta \subseteq \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,

$$\mathbb{P}_{p_\beta,2}^w(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \leq \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w(0 \leftrightarrow \Lambda^c) \leq \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w(0 \leftrightarrow \Delta^c),$$

la première inégalité suivant des inégalités FKG (vérifiez-le !), et la seconde de l'inclusion  $\{0 \leftrightarrow \Lambda^c\} \subseteq \{0 \leftrightarrow \Delta^c\}$ . Le résultat désiré suit en prenant la limite  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ , suivie de la limite  $\Delta \uparrow \mathbb{Z}^d$ .  $\square$

## 6.4 Inégalités de comparaison

Une application intéressante de la représentation FK est le résultat suivant, qui permet la comparaison des espérances sous des mesures correspondant à différentes valeurs des paramètres  $p$  et, surtout,  $q$ .

**Théorème 6.4.1.** *Soit  $\mathcal{E} \in \mathcal{E}^d$ . Alors, pour toute fonction croissante  $f$ ,*

$$\langle f \rangle_{\mathcal{E}; p_1, q_1}^w \leq \langle f \rangle_{\mathcal{E}; p_2, q_2}^w,$$

*dès que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

1.  $q_1 \geq \max(q_2, 1)$ ,  $p_1 \leq p_2$  ;
2.  $q_2 \geq \max(q_1, 1)$ ,  $\frac{p_1}{q_1(1-p_1)} \leq \frac{p_2}{q_2(1-p_2)}$ .

*Démonstration.* On note  $|\eta| = \sum_{e \in \mathcal{E}} \eta_e$  le nombre d'arêtes de  $\mathcal{E}$  ouvertes dans la configuration  $\eta$ .

On commence par montrer le résultat sous la première condition. Manifestement,

$$\sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E},w}^{\text{FK}}} f(\eta) \left( \frac{p_2}{1-p_2} \right)^{|\eta|} q_2^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)} = \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E},w}^{\text{FK}}} f(\eta) \left( \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} \right)^{|\eta|} \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)} \left( \frac{p_1}{1-p_1} \right)^{|\eta|} q_1^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)}.$$

Par conséquent, en observant que  $\phi(\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{p_2(1-p_1)}{p_1(1-p_2)} \right)^{|\eta|} \left( \frac{q_2}{q_1} \right)^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)}$  est une fonction croissante, il suit de la Proposition 6.1.1 que

$$\langle f \rangle_{\mathcal{E}; p_2, q_2}^w = \frac{\langle f \phi \rangle_{\mathcal{E}; p_1, q_1}^w}{\langle \phi \rangle_{\mathcal{E}; p_1, q_1}^w} \geq \langle f \rangle_{\mathcal{E}; p_1, q_1}^w.$$

On montre à présent le résultat sous la seconde condition. On procède similairement. Puisque

$$\sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E},w}^{\text{FK}}} f(\eta) \left( \frac{p_1}{1-p_1} \right)^{|\eta|} q_1^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)} = \sum_{\eta \in \Omega_{\mathcal{E},w}^{\text{FK}}} f(\eta) \left( \frac{q_2 p_1 (1-p_2)}{q_1 p_2 (1-p_1)} \right)^{|\eta|} \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta) + |\eta|} \left( \frac{p_2}{1-p_2} \right)^{|\eta|} q_2^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)},$$

et que  $\psi(\eta) \stackrel{\text{déf}}{=} \left( \frac{q_2 p_1 (1-p_2)}{q_1 p_2 (1-p_1)} \right)^{|\eta|} \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta) + |\eta|}$  est une fonction décroissante, il suit de la Proposition 6.1.1 que

$$\langle f \rangle_{\mathcal{E};p_1,q_1}^w = \frac{\langle f \psi \rangle_{\mathcal{E};p_2,q_2}^w}{\langle \psi \rangle_{\mathcal{E};p_2,q_2}^w} \leq \langle f \rangle_{\mathcal{E};p_2,q_2}^w.$$

□

Ces inégalités ont de nombreuses applications. À titre d'exemple, on se contentera d'énoncer le résultat suivant qui montre qu'il y a une transition de percolation pour le modèle de FK-percolation quelle que soit la valeur du paramètre  $q \geq 1$  si et seulement si il y a percolation pour ce modèle pour une valeur donnée du paramètre  $q \geq 1$ . En particulier, la transition que l'on a établie pour le modèle d'Ising ( $q = 2$ ) implique l'existence d'une transition de phase pour tous les modèles de Potts avec  $q \geq 3$ .

**Corollaire 6.4.1.** *Notons  $p_c(q) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup \{p \geq 0 : \mathbb{P}_{p,q}^w(i \leftrightarrow \infty) = 0\}$  le paramètre critique pour la FK-percolation de paramètre  $q$  (celui-ci dépend bien sûr de la dimension  $d$ ). Alors,*

$$\frac{1}{p_c(q)} \leq \frac{1}{p_c(q')} \leq \frac{q/q'}{p_c(q)} - \frac{q}{q'} + 1, \quad \text{dès que } 1 \leq q' \leq q.$$

*Démonstration.* La preuve est laissée en exercice. □

## 6.5 Dualité

Dans cette section, nous allons voir qu'il existe un analogue de la dualité de Kramers-Wannier dans la représentation FK sur  $\mathcal{E}^2$ . Ce dernier possède le grand avantage d'être valide configuration par configuration, alors que la dualité de Kramers-Wannier n'est valide que dans un sens intégral (elle porte sur les fonctions de partitions, les fonctions de corrélation, etc., mais n'a pas de sens au niveau d'une configuration donnée).

On note  $\mathcal{E}_*^2$  l'ensemble des arêtes joignant les sommets plus-proches-voisins du réseau dual  $\mathbb{Z}_*^2 \stackrel{\text{déf}}{=} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z}^2$ . À chaque arête  $e \in \mathcal{E}^2$  est associée exactement une arête  $e^* \in \mathcal{E}_*^2$  : celle qui l'intersecte en son milieu. On dira que  $e^*$  est l'arête **duale** à  $e$ . Étant donné un ensemble d'arêtes  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^2$ , on définit son dual  $\mathcal{E}^* \Subset \mathcal{E}_*^2$  par (*cf.* Fig. 6.1)

$$\mathcal{E}^* \stackrel{\text{déf}}{=} \{e^* \in \mathcal{E}_*^2 : e \in \mathcal{E}\}.$$

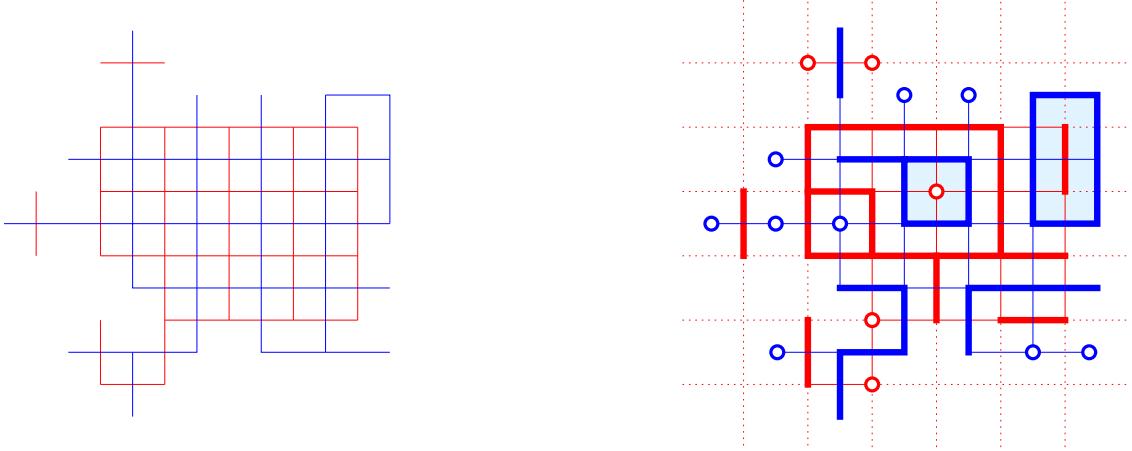
On considère la FK-percolation sur  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^2$  avec condition au bord libre. À chaque configuration  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E},\mathcal{O}}^{\text{FK}}$ , on associe la configuration  $\eta^* \in \Omega_{\mathcal{E}^*,w}^{\text{FK}}$  donnée par (*cf.* Fig. 6.1)

$$\eta_{e^*}^* \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - \eta_e, \quad \forall e^* \in \mathcal{E}_*^2.$$

Le résultat suivant montre que cette transformation induit une dualité pour la FK-percolation sur  $\mathcal{E}^2$  au niveau des configurations.

**Théorème 6.5.1.** *Supposons les configurations  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E},\mathcal{O}}^{\text{FK}}$  distribuées selon  $\mathbb{P}_{\mathcal{E};p,q}^w$ . Alors, les configurations  $\eta^* \in \Omega_{\mathcal{E}^*,w}^{\text{FK}}$  sont distribuées selon  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}^*;p^*,q}^w$ , où le paramètre dual  $p^*$  est solution de*

$$\frac{p^*}{1-p^*} = \frac{q(1-p)}{p}.$$



**Fig. 6.1** – Gauche : L’ensemble d’arêtes  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^2$  (en bleu) et son dual  $\mathcal{E}^* \subseteq \mathcal{E}_*^2$  (en rouge). Droite : Une configuration  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}, \emptyset}^{\text{FK}}$  et la configuration duale  $\eta^* \in \Omega_{\mathcal{E}^*, w}^{\text{FK}}$ . Les traits épais représentent les arêtes ouvertes, et les ronds les sommets isolés ; on a également représenté en pointillés les arêtes ouvertes correspondant à la condition au bord wired du dual. Observez que le graphe planaire correspondant à la configuration  $\eta$  possède 2 faces finies (grisées sur la figure) et une face infinie. À chacune de ces 3 faces est associé exactement un amas de  $\eta^*$  (se souvenir que chaque sommet isolé compte comme un amas, et faire attention à la condition au bord !).

*Démonstration.* La preuve repose sur la formule d’Euler : si  $G = (V, E)$  est un graphe fini planaire (pas nécessairement connexe), on a [8]

$$|V| - |E| + L(G) = N(G), \quad (6.7)$$

où  $L(G)$  et  $N(G)$  représentent respectivement le nombre de faces finies<sup>1</sup> et le nombre de composantes connexes de  $G$ .

On identifie chaque configuration  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}, \emptyset}^{\text{FK}}$  avec le graphe  $(V(\mathcal{E}), E(\eta))$  où

$$\begin{aligned} V(\mathcal{E}) &= \{i \in \mathbb{Z}^2 : i \text{ est l’extrémité d’au moins une arête } e \in \mathcal{E}\} \\ E(\eta) &= \{e \in \mathcal{E} : \eta_e = 1\}. \end{aligned}$$

Similairement, on identifie chaque configuration duale  $\eta^* \in \Omega_{\mathcal{E}^*, w}^{\text{FK}}$  avec le graphe  $(V(\mathcal{E}^*), E(\eta^*))$  où

$$\begin{aligned} V(\mathcal{E}^*) &= \{i \in \mathbb{Z}_*^2 : i \text{ est l’extrémité d’au moins une arête } e^* \in \mathcal{E}^*\} \\ E(\eta^*) &= \{e^* \in \mathcal{E}^* : \eta_e^* = 1\}. \end{aligned}$$

L’observation importante est l’identité élémentaire suivante (*cf.* Fig. 6.1) :

$$L(\eta) = \mathcal{N}_{\mathcal{E}^*}(\eta^*) - 1. \quad (6.8)$$

On conclut de (6.7) de (6.8) que

$$\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta) = N(\eta) = |V(\mathcal{E})| - |E(\eta)| + L(\eta) = |E(\eta^*)| + \mathcal{N}_{\mathcal{E}^*}(\eta^*) + \text{const}, \quad (6.9)$$

où la constante est indépendante de la configuration  $\eta$  (et donc de  $\eta^*$ ). Nous pouvons donc à présent aisément conclure, puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{E}; p, q}^{\emptyset}(\eta) &\propto \left(\frac{p}{1-p}\right)^{|E(\eta)|} q^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}}(\eta)} \propto \left(\frac{p}{1-p}\right)^{-|E(\eta^*)|} q^{|E(\eta^*)|} q^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^*}(\eta^*)} \\ &\propto \left(\frac{q(1-p)}{p}\right)^{|E(\eta^*)|} q^{\mathcal{N}_{\mathcal{E}^*}(\eta^*)} \propto \mathbb{P}_{\mathcal{E}^*; p^*, q}^w(\eta^*). \end{aligned}$$

□

<sup>1</sup>On appelle **faces finies** d’un graphe planaire le nombre de composantes connexes bornées de  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  (on identifie  $G$  à un de ses plongements dans le plan). Les composantes connexes non-bornées sont naturellement appelées **faces infinies**.

*Remarque 6.5.1.* Posons  $q = 2$  (Ising). En utilisant  $p_\beta = 1 - e^{-2\beta}$ , la relation de dualité montre que la paramètre dual  $(p_\beta)^\star$  est donné par

$$(p_\beta)^\star = \frac{2(1 - p_\beta)}{p_\beta + 2(1 - p_\beta)} = \frac{2}{e^{2\beta} + 1}.$$

Par conséquent, si l'on définit  $\beta^\star$  par  $(p_\beta)^\star \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - e^{-2\beta^\star}$ , on obtient

$$e^{-2\beta^\star} = \tanh \beta,$$

et on retrouve la relation (5.3). La dualité discutée ci-dessus est donc bien une autre manifestation (plus profonde, car valide configuration par configuration) de la dualité de Kramers-Wannier.

## 6.6 Une application de la dualité

Dans cette section, nous donnons une application de la dualité associée à la représentation FK. Notre hypothèse de base sera

$$\mathbf{H}_{p,q} : \quad \exists c = c(p, q) > 0 \text{ telle que, } \forall n \geq 0, \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(0 \leftrightarrow \mathcal{E}_n^c) \leq e^{-cn},$$

où  $\mathcal{E}_n \equiv \mathcal{E}_{\Lambda_n}$  avec  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^2$ .

*Remarque 6.6.1.* L'hypothèse  $\mathbf{H}_{p,q}$  est conjecturée être satisfaite pour tout  $q \geq 1$  et tout  $p < p_c(q)$ . Cette conjecture a été démontrée, en toute dimension, pour  $q = 1$  (suit immédiatement de [3]),  $q = 2$  (suit de [4] et de l'inégalité GHS, cf. Théorème 7.3.3), et pour  $q$  suffisamment grand [35].

Nous allons montrer que sous  $\mathbf{H}_{p,q}$  ou sous  $\mathbf{H}_{p^\star, q}$ , la mesure FK en volume fini est exponentiellement bien approximée par la mesure en volume infini. Pour cela, nous aurons besoin d'un peu de terminologie, analogue à celle introduite pour le modèle d'Ising. Nous dirons qu'un événement  $A \subseteq \Omega^{\text{FK}}$  est local s'il existe  $E \in \mathcal{E}^d$  tel que  $A$  est déterminé par l'état des arêtes de  $E$ ; nous noterons  $\text{supp}(A)$  le plus petit ensemble  $E$  avec cette propriété.

**Théorème 6.6.1.** *Si l'une des hypothèses  $\mathbf{H}_{p,q}$  ou  $\mathbf{H}_{p^\star, q}$  est vérifiée, alors il existe  $c' = c'(p, q) > 0$  telle que*

$$0 \leq \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(A) - \mathbb{P}_{p, q}^w(A) \leq \frac{n_0}{c'} e^{-c'(n - n_0)}, \quad \forall n \geq n_0,$$

pour tout événement local croissant  $A$  tel que  $\text{supp}(A) \subseteq \Lambda_{n_0}$ .

Ce résultat reste vrai pour l'événement croissant, mais non local,

$$D = \{|B \cap C| \text{ est pair pour tout amas fini } C\},$$

avec  $B \subseteq \Lambda_0$ .

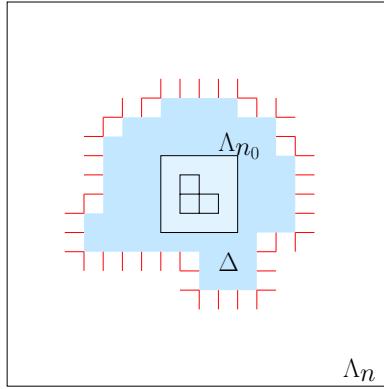
*Démonstration.* La borne inférieure suit immédiatement de FKG. Nous démontrons la borne supérieure. On commence par montrer le résultat pour  $A$  local croissant, sous l'hypothèse  $\mathbf{H}_{p,q}$ . L'idée est que dans ce cas, avec grande probabilité, la condition au bord ne se propage pas loin à l'intérieur de la boîte  $\mathcal{E}_n$ .

Soit  $\mathcal{G} = \{\Lambda_{n_0} \leftrightarrow \Lambda_n^c\}$ . On a bien sûr

$$\mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(A) \leq \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(\mathcal{G}) + \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(A \mid \mathcal{G}^c).$$

Il suit de l'hypothèse  $\mathbf{H}_{p,q}$  et des inégalités FKG que

$$\mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(\mathcal{G}) \leq \sum_{i \in \partial \Lambda_{n_0}} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(i \leftrightarrow \Lambda_n^c) \leq (8n_0 + 4) \mathbb{P}_{\mathcal{E}_{n-n_0}; p, q}^w(0 \leftrightarrow \Lambda_{n-n_0}^c) \leq (8n_0 + 4) e^{-c(n - n_0)}.$$



**Fig. 6.2** – Illustration correspondant au cas où l'événement  $\mathcal{G}$  n'a pas lieu. Le système est alors contenu dans une boîte aléatoire  $\Delta$  avec condition au bord libre (les arêtes, fermées, de  $\partial_e \Delta$  sont indiquées en rouge).

D'autre part, lorsque  $\mathcal{G}$  n'a pas lieu, il existe  $\Lambda_{n_0} \subseteq \Delta \subseteq \Lambda_n$  tel que toutes les arêtes de  $\partial_e \Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \{e = \{i, j\} \in \mathcal{E}^2 : i \in \Delta, j \notin \Delta\}$  soient fermées, *cf.* Fig. 6.2 ; l'événement “ $\mathcal{G}$  n'a pas lieu et  $\Delta$  est le plus grand (pour l'inclusion) ensemble ayant les propriétés précédentes” est noté  $\mathcal{G}_\Delta^c$ . Il suit alors des inégalités FKG que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(A | \mathcal{G}^c) &= \sum_{\substack{\Delta: \\ \Lambda_{n_0} \subseteq \Delta \subseteq \Lambda_n}} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(A | \mathcal{G}_\Delta^c) \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(\mathcal{G}_\Delta^c | \mathcal{G}^c) = \sum_{\substack{\Delta: \\ \Lambda_{n_0} \subseteq \Delta \subseteq \Lambda_n}} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Delta; p, q}^\varnothing(A) \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(\mathcal{G}_\Delta^c | \mathcal{G}^c) \\ &\leq \mathbb{P}_{p, q}^\varnothing(A) \sum_{\substack{\Delta: \\ \Lambda_{n_0} \subseteq \Delta \subseteq \Lambda_n}} \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(\mathcal{G}_\Delta^c | \mathcal{G}^c) = \mathbb{P}_{p, q}^\varnothing(A) \leq \mathbb{P}_{p, q}^w(A), \end{aligned} \quad (6.10)$$

et la conclusion suit. Le cas de  $D = \{|B \cap C| \text{ est pair pour tout amas fini } C\}$ , avec  $B \Subset \mathbb{Z}^d$  est identique, le caractère non-local ne posant aucun problème, car  $D$  est tout de même déterminé par l'état des arêtes de  $\Delta$  lorsque  $\mathcal{G}$  n'a pas lieu.

Supposons à présent que  $H_{p^*, q}$  soit vérifiée. On considère tout d'abord un événement  $A$  local et croissant. L'idée est que sous  $H_{p^*, q}$  il y a percolation pour les paramètres  $p, q$ , et donc, avec grande probabilité sous  $\mathbb{P}_{p, q}^w$ , un chemin ouvert va séparer  $\Lambda_{n_0}$  de  $\Lambda_n^c$  (*cf.* Fig. 6.3). Notons  $\tilde{\mathcal{G}}$  l'événement correspondant. On a

$$\mathbb{P}_{p, q}^w(A) \geq \mathbb{P}_{p, q}^w(A | \tilde{\mathcal{G}}) \mathbb{P}_{p, q}^w(\tilde{\mathcal{G}}).$$

D'une part,

$$\mathbb{P}_{p, q}^w(\tilde{\mathcal{G}}) = 1 - \mathbb{P}_{p, q}^w(\tilde{\mathcal{G}}^c),$$

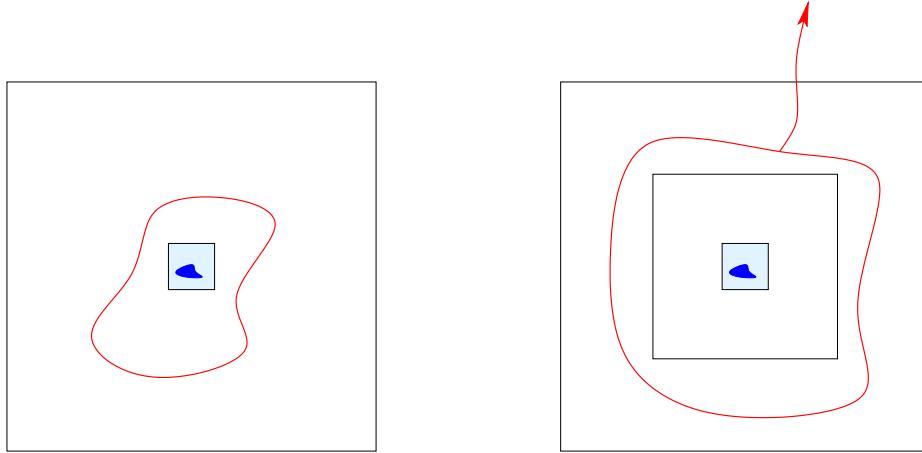
et lorsque  $\tilde{\mathcal{G}}^c$  a lieu, il doit y avoir un chemin ouvert dans la configuration duale reliant  $\Lambda_{n_0}^*$  à l'extérieur de  $\Lambda_n^*$ . Par conséquent, il suit de l'hypothèse  $H_{p^*, q}$  et des inégalités FKG que

$$\mathbb{P}_{p, q}^w(\tilde{\mathcal{G}}^c) \leq \sum_{i \in \partial \Lambda_{n_0}^*} \mathbb{P}_{p^*, q}^\varnothing(i \leftrightarrow (\Lambda_n^*)^c) \leq (8n_0 + 8)n_0 e^{-c(n - n_0)}.$$

D'autre part, lorsque  $\tilde{\mathcal{G}}$  est réalisé, il existe  $\Lambda_{n_0} \subseteq \Delta \subseteq \Lambda_n$  et tel que toutes les arêtes de  $\partial_e \Delta$  soient ouvertes. Par conséquent, en raisonnant comme dans (6.10) (l'inégalité allant dans l'autre sens cette fois, car la condition au bord est wired), on en déduit que

$$\mathbb{P}_{p, q}^w(A | \tilde{\mathcal{G}}) \geq \mathbb{P}_{\mathcal{E}_n; p, q}^w(A),$$

et la conclusion suit.



**Fig. 6.3** – Idée de la preuve sous l’hypothèse  $H_{p^*,q}$ . Gauche : cas de l’événement local  $A$  ; avec grande probabilité sous  $\mathbb{P}_{p,q}^w$ , il y aura un circuit d’arêtes ouvertes séparant  $\Lambda_{n_0}$  et l’extérieur de  $\Lambda_n$  (sinon il devrait y avoir un long chemin d’arêtes ouvertes dans le dual reliant ces deux ensembles). Droite : la variante pour l’événement  $D$  ; dans ce cas on exige que le circuit sépare  $\Lambda_{n/2}$  de l’extérieur de  $\Lambda_n$  et qu’il appartienne à l’amas infini (cela arrive avec grande probabilité sous  $\mathbb{P}_{p,q}^w$ , sinon il faut soit un grand chemin d’arêtes ouvertes dans le modèle dual empêchant la présence du circuit, soit un grand circuit d’arêtes ouvertes dans le modèle dual entourant ce dernier afin de l’empêcher de se connecter à l’amas infini).

Il reste à considérer le cas d’un événement  $D = \{|B \cap C| \text{ est pair pour tout amas fini } C\}$ , avec  $B \subseteq \Lambda_{n_0}$ , sous  $H_{p^*,q}$ . L’argument précédent ne suffit pas, car il est alors nécessaire de savoir si le circuit d’arêtes ouvertes appartient à l’amas infini,  $D$  n’étant déterminé par l’état des arêtes de  $\Delta$  que lorsqu’on possède cette information. Il n’est pas difficile de remédier à cette difficulté : on va simplement imposer au circuit entourant  $\Lambda_{n_0}$  d’être suffisamment grand ; de cette façon, la probabilité qu’il ne fasse pas partie de l’amas infini sera très petite (*cf.* Fig. 6.3). Plus précisément, on introduit l’événement “ $\Lambda_{n/2}$  est séparé de  $\Lambda_n^c$  par un circuit appartenant à l’amas infini”, que l’on notera  $\widehat{\mathcal{G}}$ . L’argument est alors identique au précédent, en observant simplement que si l’événement  $\widehat{\mathcal{G}}$  n’est pas réalisé, alors soit il y a un chemin composé d’arêtes ouvertes reliant  $\Lambda_{n/2}^*$  à l’extérieur de la boîte dans la configuration duale (ce qui empêche la présence du circuit d’arêtes ouvertes), soit il y a un circuit d’arêtes ouvertes dans la configuration duale entourant  $\Lambda_{n/2}^*$  (et empêchant ainsi de relier le circuit à l’amas infini). Les deux contributions sont exponentiellement petites en  $n$  et la conclusion suit.  $\square$

**Corollaire 6.6.1.** *Soit  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^2$ . Pour tout  $\beta \neq \beta_c$ , il existe  $c'' = c''(\beta)$  telle que*

$$|\langle f \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ - \langle f \rangle_{\beta, 0}^+| \leq \frac{n_0}{c''} \|f\|_\infty e^{-c''(n-n_0)}, \quad \forall n \geq n_0,$$

*pour toute fonction locale  $f$  telle que  $\text{supp}(f) \subseteq \Lambda_{n_0}$ .*

*Démonstration.* Par le Lemme 2.3.1, il suffit de démontrer le résultat pour la fonction  $\sigma_B$ , avec  $B \subseteq \text{supp}(f)$ . Or  $\langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \mathbb{P}^w(|B \cap C| \text{ est pair pour tout amas fini } C)$ , par le Lemme 6.3.1. On peut donc conclure à l’aide de théorème précédent, la validité de l’hypothèse  $H_{p_\beta, q}$  étant garantie dans le modèle d’Ising, lorsque  $\beta < \beta_c$  (*cf.* Remarque 6.6.1).  $\square$



# Représentation en courants aléatoires

Dans ce chapitre, nous introduisons une autre représentation graphique, extrêmement puissante, du modèle d'Ising : la représentation en courants aléatoires (dorénavant : représentation RC), introduite par Aizenman dans [2]. Celle-ci donne accès à des informations très fines sur ce modèle, et a permis de démontrer un certain nombre de résultats fondamentaux sur le modèle d'Ising, qui n'ont pas encore pu être étendus à d'autres modèles.

## 7.1 La représentation

### 7.1.1 Champ magnétique nul

Nous commençons par dériver la représentation RC pour la fonction de partition en champ magnétique nul et condition au bord libre. Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . On a

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda; \beta, 0}^{\emptyset} &= \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}} e^{\beta \omega_i \omega_j} \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}} \sum_{n \geq 0} \frac{\beta^n}{n!} (\omega_i \omega_j)^n \\ &= \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \sum_{\mathbf{n}} \prod_{e \in \{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda}} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!} (\omega_i \omega_j)^{n_e} \\ &= e^{\beta |\mathcal{E}_{\Lambda}|} \sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \sum_{\mathbf{n}} \prod_{e \in \mathcal{E}_{\Lambda}} e^{-\beta} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{\#(\mathbf{n}, i)}, \end{aligned}$$

où la somme dans les deux dernières lignes est sur les familles de courants <sup>1</sup>  $\mathbf{n} = (n_e)_{e \in \mathcal{E}_{\Lambda}}$ , avec  $n_e \in \mathbb{N}$ , et on a introduit  $\#(\mathbf{n}, i) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{e \in \mathcal{E}_{\Lambda}, e \ni i} n_e$ , pour chaque  $i \in \Lambda$ .

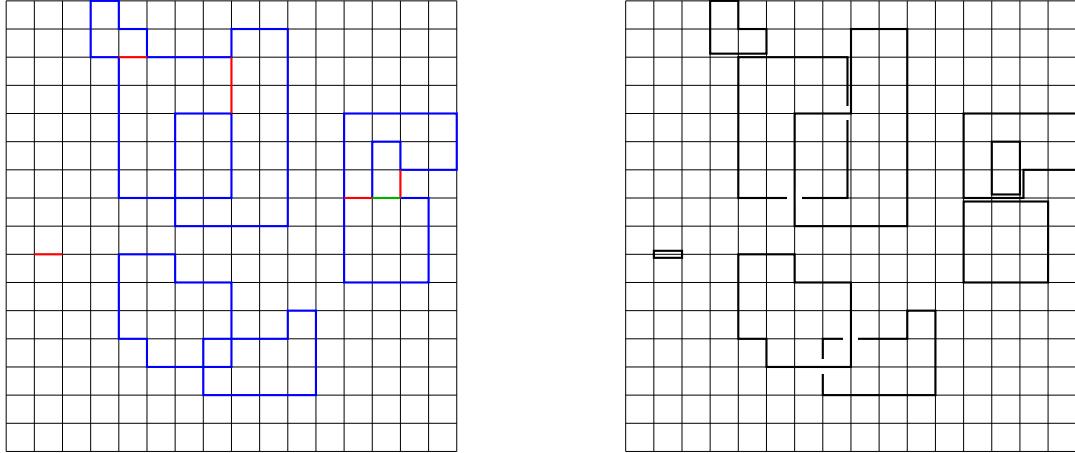
En procédant de façon similaire à ce que l'on a fait pour la représentation haute température, on calcule explicitement à présent la somme sur les configurations  $\omega$  :

$$\sum_{\omega \in \Omega_{\Lambda}} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{\#(\mathbf{n}, i)} = \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega \in \{-1, 1\}} \omega^{\#(\mathbf{n}, i)} = 2^{|\Lambda|} \mathbf{1}_{\{\#(\mathbf{n}, i) \text{ est pair, } \forall i \in \Lambda\}}.$$

Par conséquent, en notant  $\partial \mathbf{n} \stackrel{\text{déf}}{=} \{i \in \Lambda : \#(\mathbf{n}, i) \text{ est impair}\}$ , on obtient

$$Z_{\Lambda; \beta, 0}^{\emptyset} = 2^{|\Lambda|} e^{\beta |\mathcal{E}_{\Lambda}|} P_{\Lambda; \beta, 0}(\partial \mathbf{n} = \emptyset),$$

<sup>1</sup>Faites attention au fait que si chaque arête porte un certain courant, ce dernier n'a pas de direction, uniquement une intensité.



**Fig. 7.1** – Gauche : une configuration de courants  $\mathbf{n}$ . La couleur associée à une arête  $e$  indique la valeur de  $n_e$  :  $n_e = 1$  pour le bleu,  $n_e = 2$  pour le rouge,  $n_e = 3$  pour le vert. Droite : Une décomposition possible en “boucles” (certaines arêtes ont été légèrement décalées afin d’améliorer la lisibilité).

où l’on a réinterprété  $\mathbf{n} = (n_e)_{e \in \mathcal{E}_\Lambda}$  comme une collection de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune une loi de Poisson de paramètre  $\beta$  :  $P_{\Lambda; \beta, 0}(n_e = k) = e^{-\beta} \beta^k / k!$ . Il peut être utile de visualiser une configuration de courants  $\mathbf{n}$  telle que  $\partial \mathbf{n} = \emptyset$  comme résultant de la superposition de boucles de courants (c’est-à-dire de circuits fermés le long desquels le courant est égal à 1), cf. Fig. 7.1. Bien entendu, une telle décomposition en boucles n’est pas unique en général.

La même procédure permet de dériver une représentation analogue pour les fonctions de corrélations  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\emptyset$ ,  $A \subseteq \Lambda$ . En effet, si l’on développe le numérateur de  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\emptyset$  de la même façon que ci-dessus, la seule différence provient de l’évaluation de la somme sur les configurations  $\omega$  : la présence du terme supplémentaire  $\omega_A$  conduit à

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \omega_A \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{\#(\mathbf{n}, i)} = \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega \in \{-1, 1\}} \omega^{\#(\mathbf{n}, i) + \mathbf{1}_{\{i \in A\}}} = 2^{|\Lambda|} \mathbf{1}_{\{\partial \mathbf{n} = A\}}.$$

En d’autres termes, on a à présent des sources de courants aux sommets de  $A$  (le courant n’étant pas “conservé” en ces sommets), cf. Fig. 7.2. En résumé, on obtient l’élégante formule

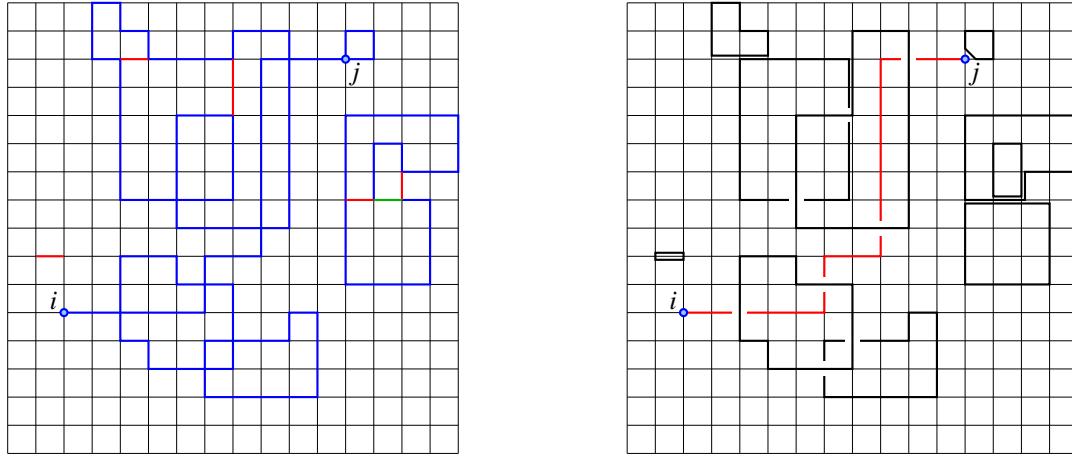
$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\emptyset = \frac{P_{\Lambda; \beta, 0}(\partial \mathbf{n} = A)}{P_{\Lambda; \beta, 0}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)}.$$

Observez que l’on a bien  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\emptyset = 0$  lorsque  $|A|$  est impair, car  $\sum_{i \in \Lambda} \#(\mathbf{n}, i)$  est toujours pair et il est donc impossible de trouver une configuration de courants telle qu’il y ait un nombre impair de sommets où  $\#(\mathbf{n}, i)$  est impair.

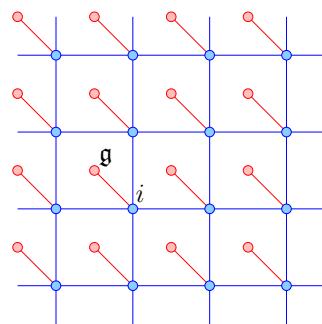
### 7.1.2 Champ magnétique $h > 0$

Nous allons à présent voir comment étendre la représentation RC au cas  $h > 0$ . La même procédure permet de remplacer également la condition au bord libre par la condition au bord +, et est laissée en exercice.

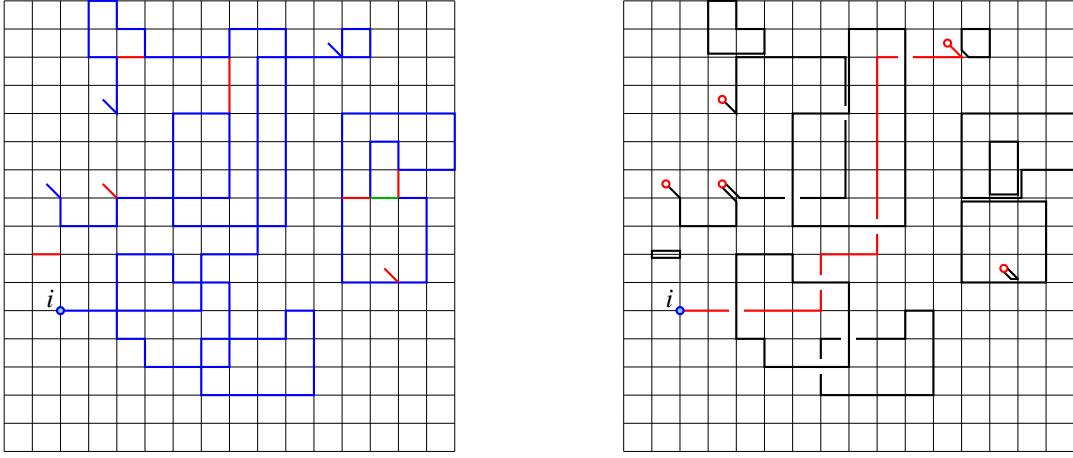
L’idée est d’introduire un **spin fantôme** (*ghost spin* en anglais) permettant de réinterpréter le terme de l’Hamiltonien faisant intervenir le champ magnétique comme provenant d’une condition au bord appropriée. On introduit tout d’abord un nouveau sommet  $\mathbf{g}$ . On remplace ensuite le graphe  $(\Lambda, \mathcal{E}_\Lambda)$  par le graphe  $(\Lambda^\mathbf{g}, \bar{\mathcal{E}}_\Lambda)$ , où  $\Lambda^\mathbf{g} \stackrel{\text{déf}}{=} \Lambda \cup \{\mathbf{g}\}$  et  $\bar{\mathcal{E}}_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{E}_\Lambda \cup \mathcal{E}_\Lambda^\mathbf{g}$ , avec  $\mathcal{E}_\Lambda^\mathbf{g} = \{\{i, \mathbf{g}\} : i \in \Lambda\}$ , cf. Fig. 7.3. Au sommet  $\mathbf{g}$ , on place un spin  $\bar{\omega}_\mathbf{g}$  dont la valeur est fixée à +1 ; ce spin fantôme joue donc le rôle



**Fig. 7.2** – Gauche : une configuration de courants contribuant à la fonction à 2-point  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}$ ; observez que  $\#(\mathbf{n}, i)$  et  $\#(\mathbf{n}, j)$  sont impairs. Les codes de couleur sont les mêmes que sur la Fig. 7.1. Droite : Une décomposition possible en “boucles”. Observez la présence d’un chemin ouvert reliant les deux points  $i$  et  $j$ .



**Fig. 7.3** – Chaque sommet  $i \in \Lambda$  est lié par une arête au sommet  $\mathbf{g}$ ; ce dernier est représenté, pour des raisons de lisibilité, par chacun des sommets en rouge. Un spin fantôme, dont la valeur est fixée à 1, est placé au sommet  $\mathbf{g}$ .



**Fig. 7.4** – Une configuration de courants contribuant à la fonction à 1-point  $\langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset}$ ; les arêtes en diagonale mènent à  $\mathbf{g}$ . Il y a une source en  $\mathbf{g}$  (un nombre impair d'arêtes étant incidentes en ce sommet).

de “condition au bord”. L’énergie associée à une configuration  $\omega \in \Omega_\Lambda$  peut alors être écrite sous la forme

$$-\beta \sum_{\{i,j\} \in \mathcal{E}_\Lambda} \omega_i \omega_j - h \sum_{i \in \Lambda} \omega_i \bar{\omega}_{\mathbf{g}}.$$

On peut à présent répéter les dérivations effectuées précédemment pour le cas  $h = 0$ . Le développement est formellement identique, les configurations de courants étant à présent définies sur le graphe étendu,  $\mathbf{n} = (n_e)_{e \in \bar{\mathcal{E}}_\Lambda}$ . La seule différence a à nouveau lieu lorsque l’on évalue la somme sur les configurations de spins. Dans le cas de la fonction de partition, cette dernière devient

$$\sum_{\omega \in \Omega_\Lambda} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{\#(\mathbf{n}, i)} = \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega \in \{-1, 1\}} \omega^{\#(\mathbf{n}, i)} = 2^{|\Lambda|} \mathbf{1}_{\{\#(\mathbf{n}, i) \text{ est pair, } \forall i \in \Lambda\}}.$$

Observez qu’il n’y a pas de contraintes de parité explicite sur  $\#(\mathbf{n}, \mathbf{g})$ , puisqu’on ne somme que sur les valeurs des spins dans  $\Lambda$  (le spin fantôme a sa valeur fixée à  $+1$ ). On définit la notion de bord d’une configuration de courants par la même formule qu’avant,  $\partial \mathbf{n} \stackrel{\text{déf}}{=} \{i \in \Lambda : \#(\mathbf{n}, i) \text{ est impair}\}$ . Similairement au cas  $h = 0$ , on réinterprète  $\mathbf{n} = (n_e)_{e \in \bar{\mathcal{E}}_\Lambda}$  comme une collection de variables aléatoires indépendantes telles que  $n_e$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\beta$  si  $e \in \mathcal{E}_\Lambda$  et de paramètre  $h$  si  $e \in \mathcal{E}_\Lambda^{\mathbf{g}}$ ; on note  $\mathbf{P}_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset}$  la loi de  $\mathbf{n}$ . On peut donc écrire

$$\mathbf{Z}_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset} = 2^{|\Lambda|} e^{\beta |\mathcal{E}_\Lambda| + h |\mathcal{E}_\Lambda^{\mathbf{g}}|} \mathbf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset).$$

Similairement, on obtient pour les fonctions de corrélation :

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset} = \frac{\mathbf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = A)}{\mathbf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)}.$$

La possibilité d’avoir une source présente en  $\mathbf{g}$  a pour conséquence que les fonctions de corrélation  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\emptyset}$  ne sont plus nécessairement nulles lorsque  $|A|$  est impair et  $h \neq 0$ , cf. Fig. 7.4.

### 7.1.3 Un peu de terminologie

Comme c’était le cas pour la représentation FK, la donnée d’une réalisation de  $\mathbf{n}$  permet de définir une notion de connectivité. Nous dirons que deux sommets distincts  $i, j \in \Lambda$  sont connectés dans la configuration  $\mathbf{n}$ , ce que l’on notera  $i \rightsquigarrow j$ , s’il existe un chemin dans  $\mathcal{E}_\Lambda$  connectant  $i$  à  $j$  le long duquel

$\mathbf{n}$  ne prend que des valeurs strictement positives. Nous appellerons **amas** de  $i \in \Lambda$  dans la configuration  $\mathbf{n}$  l'ensemble  $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}(i)$  défini par

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n}}(i) \stackrel{\text{déf}}{=} \{i\} \cup \left\{ j \in \Lambda : i \xleftrightarrow{\mathbf{n}} j \right\}.$$

Nous appellerons **g-amas** l'ensemble

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n}}^g \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{\substack{i \in \Lambda \\ n_{\{i,g\}} > 0}} \mathcal{C}_{\mathbf{n}}(i)$$

de tous les sommets connectés au spin fantôme via un courant strictement positif. Nous écrirons également  $i \xrightarrow{\mathbf{n}} g$  lorsque  $i \in \mathcal{C}_{\mathbf{n}}^g$ . Nous dirons que  $i$  et  $j$  sont **g-connectés** dans  $\mathbf{n}$ , noté  $i \xleftrightarrow{\mathbf{n}} j$ , si  $i \xleftrightarrow{\mathbf{n}} j$  ou si  $i, j \in \mathcal{C}_{\mathbf{n}}^g$ .

## 7.2 Le “switching lemma”

Jusqu'à présent, l'avantage de la représentation RC sur, par exemple, la représentation FK est loin d'être évident. Il se trouve cependant que la représentation RC permet d'obtenir des représentations très utiles des fonctions de corrélations tronquées<sup>2</sup> comme, par exemple, la covariance  $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \stackrel{\text{déf}}{=} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ - \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+ \langle \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^+$ . Observez que la représentation FK fournit une expression pour chacune des trois espérances du membre de droite, mais ne permet pas de les regrouper de façon naturelle. En particulier, elle ne permet pas de voir de manière immédiate la positivité de cette quantité (qui suit des inégalités GKS). Nous allons voir qu'au contraire la représentation RC permet d'obtenir une expression manifestement positive de cette covariance, ainsi que de très nombreuses autres quantités d'intérêt.

Ces propriétés essentielles de la représentation RC suivent du remarquable résultat suivant. Nous noterons  $\mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}^{(2)} = \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h} \times \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}$ , et  $\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2$  les deux configurations aléatoires indépendantes correspondantes.

**Lemme 7.2.1** (Switching Lemma). *Soient  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,  $A \subseteq \Lambda$ ,  $i, j$  deux sommets distincts de  $\Lambda$  et  $\mathcal{I}$  un ensemble de configurations de courants dans  $\Lambda$ . Alors<sup>3</sup>*

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = A, \partial \mathbf{n}^2 = \{i, j\}, \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}) \\ = \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = A \Delta \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} j). \end{aligned} \quad (7.1)$$

et

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = A, \partial \mathbf{n}^2 = \{i\}, \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}) \\ = \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = A \Delta \{i\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} g). \end{aligned} \quad (7.2)$$

*Démonstration.* On ne démontre que la première identité, la seconde étant laissée en exercice. On utilisera les notations suivantes :

$$w(\mathbf{n}) \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{e \in \mathcal{E}_{\Lambda}} \frac{\beta^{n_e}}{n_e!} \prod_{e \in \mathcal{E}_{\Lambda}^g} \frac{h^{n_e}}{n_e!},$$

et pour deux configurations de courants satisfaisant  $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$  (c'est-à-dire  $n_e \leq m_e$ ,  $\forall e \in \mathcal{E}_{\Lambda}$ ),

$$\binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{e \in \mathcal{E}_{\Lambda}} \binom{m_e}{n_e}.$$

<sup>2</sup>Également appelées **cumulants**, ou **semi-invariants**.

<sup>3</sup> $A \Delta B \stackrel{\text{déf}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

Nous allons passer du couple  $(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)$  au couple  $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$  où  $\mathbf{m} = \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2$  (l'addition étant comprise arête par arête) et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^2$ . Comme  $\partial(\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2) = \partial\mathbf{n}^1 \Delta \partial\mathbf{n}^2$ ,  $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$  et

$$w(\mathbf{n}^1)w(\mathbf{n}^2) = \binom{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2}{\mathbf{n}^2} w(\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2) = \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} w(\mathbf{m}),$$

on peut écrire

$$\sum_{\substack{\partial\mathbf{n}^1 = A \\ \partial\mathbf{n}^2 = \{i,j\} \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} w(\mathbf{n}^1)w(\mathbf{n}^2) = \sum_{\substack{\partial\mathbf{m} = A \Delta \{i,j\} \\ \mathbf{m} \in \mathcal{I}}} w(\mathbf{m}) \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = \{i,j\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}. \quad (7.3)$$

La première observation est que  $i \xrightarrow{\mathbf{m}} j \implies i \xrightarrow{\mathbf{n}} j$ , puisque  $\mathbf{n} \leq \mathbf{m}$ . Par conséquent, pour de telles configurations  $\mathbf{m}$ , on a

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = \{i,j\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = 0. \quad (7.4)$$

On peut donc supposer à présent que  $i \xleftrightarrow{\mathbf{m}} j$ . Pour ces dernières, on peut appliquer le lemme suivant.

**Lemme 7.2.2.** *Soit  $\mathbf{m}$  une configuration de courants dans  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ , et  $C, D \subseteq \Lambda$ . S'il existe une configuration de courants  $\mathbf{k}$  telle que  $\mathbf{k} \leq \mathbf{m}$  et  $\partial\mathbf{k} = C$ , alors*

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = D}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = C \Delta D}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}. \quad (7.5)$$

La preuve du lemme est donnée plus loin. Une application de ce dernier avec  $C = D = \{i, j\}$  donne

$$\sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = \{i, j\}}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}. \quad (7.6)$$

En substituant (7.4) et (7.6) dans (7.3), et en repassant aux variables  $\mathbf{n}^1 = \mathbf{m} - \mathbf{n}$  et  $\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}$ , on obtient

$$\sum_{\substack{\partial\mathbf{n}^1 = A \\ \partial\mathbf{n}^2 = \{i, j\} \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} w(\mathbf{n}^1)w(\mathbf{n}^2) = \sum_{\substack{\partial\mathbf{m} = A \Delta \{i, j\} \\ \mathbf{m} \in \mathcal{I} \\ i \xleftrightarrow{\mathbf{m}} j}} w(\mathbf{m}) \sum_{\substack{\mathbf{n} \leq \mathbf{m} \\ \partial\mathbf{n} = \emptyset}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = \sum_{\substack{\partial\mathbf{n}^1 = A \Delta \{i, j\} \\ \partial\mathbf{n}^2 = \emptyset \\ \mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2 \in \mathcal{I}}} w(\mathbf{n}^1)w(\mathbf{n}^2) \mathbf{1}_{\{i \xleftrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} j\}},$$

et le résultat est démontré.  $\square$

*Preuve du Lemme 7.2.2.* On associe à la configuration  $\mathbf{m}$  le graphe  $G_{\mathbf{m}}$  avec sommets  $\Lambda^{\mathfrak{g}}$  et possédant  $m_e$  arêtes entre les extrémités de chaque arête  $e \in \bar{\mathcal{E}}_{\Lambda}$ . Par hypothèse,  $G_{\mathbf{m}}$  possède un sous-graphe  $G_{\mathbf{k}}$  avec  $\partial G_{\mathbf{k}} = C$ , où  $\partial G_{\mathbf{k}}$  est l'ensemble des sommets de  $\Lambda$  appartenant à un nombre impair d'arêtes.

Le membre de gauche de (7.5) est égal au nombre de sous-graphes  $G$  de  $G_{\mathbf{m}}$  satisfaisant  $\partial G = D$ , alors que le membre de droite compte le nombre de sous-graphes  $G$  de  $G_{\mathbf{m}}$  satisfaisant  $\partial G = C \Delta D$ . Or l'application  $G \mapsto G \Delta G_{\mathbf{k}}$  définit une bijection entre ces deux familles de graphes, puisque  $\partial(G \Delta G_{\mathbf{k}}) = \partial G \Delta \partial G_{\mathbf{k}}$  et  $(G \Delta G_{\mathbf{k}}) \Delta G_{\mathbf{k}} = G$ .  $\square$

## 7.3 Applications

Dans cette section, nous donnons deux exemple d'application de la représentation RC : d'une part, nous montrerons la décroissance exponentielle de la fonction à 2-point tronquée lorsque  $h \neq 0$ , et d'autre part nous dériverons l'inégalité GHS et en verrons une application.

### 7.3.1 Décroissance exponentielle de la fonction tronquée

Nous allons prouver que  $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes$  est exponentiellement décroissant en  $\|j - i\|_2$  lorsque  $h \neq 0$ . Il existe d'autres façons de montrer un tel résultat, par exemple comme conséquence du Théorème 4.3.2, mais la preuve donnée ici est particulièrement simple et intuitive (une fois habitué à la représentation RC).

La première étape est de dériver une expression appropriée à l'aide de la représentation RC.

**Lemme 7.3.1.** *Pour tout  $i, j \in \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  distincts, on a*

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes = \frac{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} \mathbf{g})}{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \emptyset, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset)}.$$

Observez que cela implique immédiatement que  $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \geq 0$ . C'est le fait de pouvoir dériver ce type de représentation probabiliste des fonctions de corrélation tronquées qui fait la grande force de la représentation RC.

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes &= \frac{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \{i, j\})}{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)} - \frac{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \{i\})}{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)} \frac{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \{j\})}{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)} \\ &= \frac{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset) - P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i\}, \partial \mathbf{n}^2 = \{j\})}{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \emptyset, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset)}. \end{aligned}$$

Une application du Switching Lemma (7.2) au second terme du numérateur de cette dernière expression permet d'obtenir les mêmes sources que pour le premier terme :

$$P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i\}, \partial \mathbf{n}^2 = \{j\}) = P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} \mathbf{g}).$$

La conclusion suit. □

On peut à présent démontrer le résultat principal de cette section.

**Théorème 7.3.1.** *Pour tout  $h \neq 0$ , il existe  $c = c(h) > 0$  tel que*

$$0 \leq \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \leq e^{-c\|j - i\|_2},$$

*pour tout  $i, j \in \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$  et tout  $\beta < \infty$ .*

*Remarque 7.3.1.* Le même résultat est évidemment vrai pour  $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\beta, h}^+$ , puisqu'il y a unicité de la mesure en volume infini lorsque  $h \neq 0$ . Lorsque  $h = 0$  et  $\beta < \beta_c$ , la décroissance de  $\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\beta, h}^+$  est toujours exponentielle [4], mais la preuve est beaucoup plus difficile. On pense que le même résultat est également vrai lorsque  $h = 0$  et  $\beta > \beta_c$ , mais cela n'a été démontré que lorsque  $d = 2$  [39], ou lorsque  $\beta \gg 1$ . La décroissance n'est par contre plus exponentielle lorsque  $\beta = \beta_c$  (ce résultat est démontré dans [39] pour la dimension 2, et [38] pour le cas  $d \geq 3$ ).

*Démonstration.* Comme  $\{i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} \mathbf{g}\} \subseteq \{i \xrightarrow{\mathbf{n}^1} \mathbf{g}\}$ , on déduit de la représentation du Lemme 7.3.1 que

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes = \frac{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2} \mathbf{g})}{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \emptyset, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset)} \leq \frac{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \{i, j\}, i \xrightarrow{\mathbf{n}} \mathbf{g})}{P_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset)}. \quad (7.7)$$

Étant donné  $C \subseteq \Lambda$ , on note  $\partial_{\mathcal{E}} C \stackrel{\text{déf}}{=} \{e = \{k, \ell\} \in \mathcal{E}_{\Lambda} : k \in C, \ell \notin C\}$ . On introduit également les deux événements suivants

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_C &= \{n_e = 0, \forall e \in \partial_{\mathcal{E}}(C)\}, \\ \mathcal{G}_C &= \{\partial \mathbf{n} = \{i, j\}\} \cap \{k \xleftrightarrow{\mathbf{n}} i \ \forall k \in C\} \cap \{k \xleftrightarrow{\mathbf{n}} j \ \forall k \in C\} \cap \{k \xrightarrow{\mathbf{n}} \mathbf{g} \ \forall k \in C\}.\end{aligned}$$

Observez que l'événement  $\mathcal{B}_C$  découpe les sous-systèmes  $C$  et  $\Lambda \setminus C$ . Avec ces notations, on peut écrire le numérateur de (7.7)

$$\mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \{i, j\}, i \xrightarrow{\mathbf{n}} \mathbf{g}) = \sum_{\substack{C \subseteq \Lambda \\ i, j \in C}} \mathsf{P}_{\Lambda \setminus C; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset) \mathsf{P}_{C; \beta, h}(\mathcal{G}_C) \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\mathcal{B}_C).$$

Similairement, en introduisant l'événement

$$\tilde{\mathcal{G}}_C = \{\partial \mathbf{n} = \emptyset\} \cap \{k \xleftrightarrow{\mathbf{n}} i \text{ ou } k \xleftrightarrow{\mathbf{n}} j, \forall k \in C\},$$

on peut décomposer le dénominateur de (7.7) comme

$$\mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset) = \sum_{\substack{C \subseteq \Lambda \\ i, j \in C}} \mathsf{P}_{\Lambda \setminus C; \beta, h}(\partial \mathbf{n} = \emptyset) \mathsf{P}_{C; \beta, h}(\tilde{\mathcal{G}}_C) \mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\mathcal{B}_C).$$

Comme  $|C| \geq \|j - i\|_1 + 1$ , la conclusion suit alors immédiatement une fois que l'on aura montré qu'il existe  $c = c(h) > 0$  telle que

$$\frac{\mathsf{P}_{C; \beta, h}(\mathcal{G}_C)}{\mathsf{P}_{C; \beta, h}(\tilde{\mathcal{G}}_C)} \leq e^{-c|C|},$$

pour tout  $C \subseteq \Lambda$  connexe et contenant  $i$  et  $j$ .

Soit  $\mathbf{n}$  une configuration de courants sur  $C$  telle que  $\partial \mathbf{n} = \{i, j\}$  et  $i \xrightarrow{\mathbf{n}} \mathbf{g}$ . On peut lui associer la famille de courants  $\mathfrak{N}(\mathbf{n})$  sur  $C$  donnée par

$$\mathfrak{N}(\mathbf{n}) = \left\{ \tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \sum_{k \in C} 2r_k \mathbf{1}_{\{e=\{k, \mathbf{g}\}\}} + \mathbf{1}_{\{e=\{i, \mathbf{g}\}\}} + \mathbf{1}_{\{e=\{j, \mathbf{g}\}\}} : r_{\ell} \in \mathbb{N}, \forall \ell \in C \right\}.$$

Chacune des configurations  $\tilde{\mathbf{n}} \in \mathfrak{N}(\mathbf{n})$  satisfait  $\partial \tilde{\mathbf{n}} = \emptyset$ . De plus, les familles  $\mathfrak{N}(\mathbf{n})$  sont disjointes. Finalement, si  $\mathbf{n} \in \mathcal{G}_C$ , alors  $\mathfrak{N}(\mathbf{n}) \subseteq \tilde{\mathcal{G}}_C$ .

Il suffit alors d'observer que

$$\frac{\mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\mathfrak{N}(\mathbf{n}))}{\mathsf{P}_{\Lambda; \beta, h}(\mathbf{n})} = \left( \sum_{\ell \geq 0} \frac{h^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \right)^2 \left( \sum_{\ell \geq 0} \frac{h^{2\ell}}{(2\ell)!} \right)^{|C|-2} = (\sinh(h))^2 (\cosh(h))^{|C|-2},$$

et donc que, pour tout  $C$  tel que  $|C| \geq 2$ ,

$$\mathsf{P}_{C; \beta, h}(\mathcal{G}_C) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{G}_C} \mathsf{P}_{C; \beta, h}(\mathbf{n}) \leq e^{-c|C|} \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{G}_C} \mathsf{P}_{C; \beta, h}(\mathfrak{N}(\mathbf{n})) \leq e^{-c|C|} \mathsf{P}_{C; \beta, h}(\tilde{\mathcal{G}}_C),$$

avec  $c > 0$ . □

### 7.3.2 L'inégalité GHS

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . On définit

$$\begin{aligned}\langle \sigma_i; \sigma_j; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} &\stackrel{\text{déf}}{=} \langle \sigma_i \sigma_j \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} - \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} \langle \sigma_j \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} - \langle \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} \\ &\quad - \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} + 2 \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} \langle \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes} \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^{\otimes}.\end{aligned}$$

Le but de cette sous-section est de démontrer l'inégalité GHS (d'après Griffiths, Hurst et Sherman [22]).

**Théorème 7.3.2.** Pour tout  $h \geq 0$ ,

$$\langle \sigma_i; \sigma_j; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \leq 0, \quad (7.8)$$

pour tout  $i, j, k \in \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$ . En particulier, l'aimantation est une fonction concave du champ magnétique pour  $h > 0$ ,

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} \langle \sigma_i \rangle_{\beta, h}^\otimes \leq 0 \quad \forall h > 0.$$

*Démonstration.* On observe tout d'abord que

$$\langle \sigma_i; \sigma_j; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes = \langle \sigma_i; \sigma_j \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes - \langle \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \langle \sigma_i; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes - \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes. \quad (7.9)$$

Considérons tout d'abord le cas de points  $i, j, k$  non tous distincts. Par symétrie de  $\langle \sigma_i; \sigma_j; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes$  en  $i, j, k$ , il suffit de considérer le cas  $j = k$ . On a alors que  $\langle \sigma_i; \sigma_j \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes = 0$  et donc la conclusion suit de (7.9) et des inégalités GKS.

Supposons à présent  $i, j, k$  tous distincts. Le même argument que celui du Lemme 7.3.1 donne

$$\langle \sigma_i; \sigma_j \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes = \frac{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j, k\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 \neq \mathbf{n}^2} \mathbf{g})}{P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \emptyset, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset)}. \quad (7.10)$$

Dans une paire de configurations  $(\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2)$  contribuant au numérateur de cette dernière expression, l'amas de  $i$  contient toujours exactement un des deux sommets  $j$  ou  $k$ , l'autre devant nécessairement être connecté à  $\mathbf{g}$ . On considère le cas où  $\mathcal{C}_{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2}(i) \ni j$  (et donc  $\mathcal{C}_{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2}(i) \not\ni k$ ). On note  $\mathcal{G}_C$  l'événement  $\{\mathcal{C}_{\mathbf{n}^1 + \mathbf{n}^2}(i) = C\}$ . En conditionnant sur une réalisation de cet amas, le bord de l'amas (composé d'arêtes avec courant nul à la fois dans  $\mathbf{n}^1$  et  $\mathbf{n}^2$ ) découpe l'intérieur de l'extérieur. On obtient

$$\begin{aligned} \sum_C^* P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j, k\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 \neq \mathbf{n}^2} \mathbf{g} \mid \mathcal{G}_C) P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\mathcal{G}_C) = \\ \sum_C^* P_{C; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 \neq \mathbf{n}^2} \mathbf{g} \mid \mathcal{G}_C) P_{\Lambda \setminus C; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{k\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset) P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\mathcal{G}_C), \end{aligned}$$

la somme  $\sum_C^*$  étant prise sur les sous-ensembles  $C \subseteq \Lambda$  connexes satisfaisant  $i, j \in C$ , mais  $k \notin C$ . On observe à présent que

$$\begin{aligned} P_{\Lambda \setminus C; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{k\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset) &= \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda \setminus C; \beta, h}^\otimes P_{\Lambda \setminus C; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \emptyset, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset) \\ &\leq \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes P_{\Lambda \setminus C; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \emptyset, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset), \end{aligned}$$

la dernière égalité suivant des inégalités GKS. En substituant cette borne dans la précédente, on voit que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i; \sigma_j \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes &\leq \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes P_{\Lambda; \beta, h}^{(2)}(\partial \mathbf{n}^1 = \{i, j\}, \partial \mathbf{n}^2 = \emptyset, i \xrightarrow{\mathbf{n}^1 \neq \mathbf{n}^2} \mathbf{g}) + (j \Leftrightarrow k) \\ &= \langle \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes + \langle \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \langle \sigma_i; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes, \end{aligned}$$

et la première affirmation suit.

La seconde affirmation est une conséquence immédiate de la première, puisque

$$\frac{\partial^2}{\partial h^2} \langle \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes = \sum_{j, k \in \Lambda} \langle \sigma_i; \sigma_j; \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, h}^\otimes \leq 0.$$

□

*Remarque 7.3.2.* Observez que, bien que l'on ait toujours supposé le champ magnétique homogène, ceci n'a été utilisé nulle part dans ce chapitre. En particulier, l'inégalité précédente reste vraie lorsque le champ magnétique agissant sur le sommet  $i$  est  $h_i$ , pourvu que  $h_i \geq 0$  pour tout  $i$ . Nous aurons besoin de cette version ci-dessous.

L'inégalité GHS possède de nombreuses applications. En particulier, elle permet une preuve alternative de l'unicité de la mesure de Gibbs en volume infini lorsque  $h \neq 0$  (exercice). Nous donnons ci-dessous une application élémentaire, montrant que, dans le cas du modèle d'Ising, la décroissance exponentielle de la fonction à 2-point en volume infini implique la relaxation exponentielle de l'aimantation dans une boîte finie.

**Théorème 7.3.3.** Soit  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^d$ . Supposons qu'il existe  $c > 0$  telle que  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\beta, 0}^{\otimes} \leq e^{-c\|j-i\|_2}$ ,  $\forall i, j \in \mathbb{Z}^d$ . Alors, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$0 \leq \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ \leq \beta (2n+2)^{d-1} e^{-cn}.$$

*Démonstration.* La borne inférieure suit, par exemple, des inégalités GKS. On démontre la borne supérieure. Par symétrie,

$$\langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ = \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^+ - \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^{\otimes} = \int_0^\beta ds \frac{\partial}{\partial s} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^s,$$

où  $\mu_{\Lambda_n; \beta, 0}^s$  est la mesure de Gibbs dans  $\Lambda_n$  avec condition au bord libre et Hamiltonien

$$-\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_{\Lambda_n}} \sigma_i \sigma_j - s \sum_{i \in \partial \Lambda_n} \# \{j \notin \Lambda_n : j \sim i\} \sigma_i.$$

Il suit alors de l'inégalité GHS que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \langle \sigma_0 \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^s &= \sum_{i \in \partial \Lambda_n} \# \{j \notin \Lambda_n : j \sim i\} \langle \sigma_0; \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^s \\ &\leq (2n+2)^{d-1} \sup_{i \in \partial \Lambda_n} \langle \sigma_0; \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^0, \end{aligned}$$

puisque la fonction tronquée est une fonction décroissante de  $s \geq 0$ . La conclusion suit par symétrie et les inégalités GKS :  $\langle \sigma_0; \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^0 = \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\Lambda_n; \beta, 0}^{\otimes} \leq \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta, 0}^{\otimes} \leq e^{-cn}$ .  $\square$

*Remarque 7.3.3.* Observez que cela implique en particulier que l'hypothèse  $H_{p_\beta, 2}$  de la Section 6.6 est vérifiée lorsque  $\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta, 0}^{\otimes}$  décroît exponentiellement, ce qui est vrai lorsque  $\beta < \beta_c$  [4].

# Chapitre 8

## Retour sur la représentation haute température

Dans ce chapitre, nous retournons à la représentation haute température, introduite au chapitre 4, et montrons comment une approche plus fine permet d'obtenir des informations non perturbatives sur les fonctions de corrélation.

### 8.1 Représentation en ligne aléatoire

La représentation haute température permet d'obtenir une représentation très utile de la fonction à 2-point. Nous nous contenterons de quelques résultats de base et renvoyons à [43, 44] pour plus de détails. Mentionnons également que cette représentation peut alternativement être obtenue en resommant partiellement la représentation RC de la fonction à 2-point (*cf.* la représentation en marche aléatoire de [1]).

Partons de la représentation haute température de la fonction à 2-point (exercice 10) : pour toute paire de sommets distincts  $i, j$  dans  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ ,

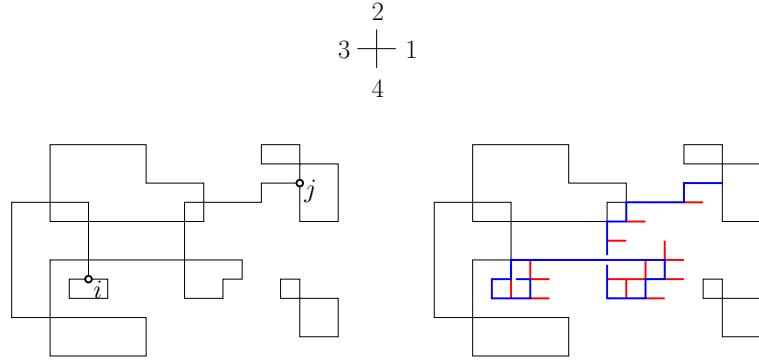
$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\emptyset} = \frac{1}{\Xi_{\beta}(\mathcal{E}_{\Lambda})} \sum_{\substack{E \subseteq \mathcal{E}_{\Lambda} \\ b(E) = \{i, j\}}} \tanh(\beta)^{|E|}, \quad (8.1)$$

avec  $b(E) \stackrel{\text{déf}}{=} \{k \in \Lambda : I(k, E) \text{ est impair}\}$ , et où l'on a introduit, pour  $\mathcal{E} \Subset \mathcal{E}^d$ ,

$$\Xi_{\beta}(\mathcal{E}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{E \subseteq \mathcal{E} \\ b(E) = \emptyset}} \tanh(\beta)^{|E|}.$$

Les degrés des sommets  $i, j$  étant impairs, et ceux des autres sommets pairs, il est possible de décomposer chaque  $E$  tel que  $b(E) = \{i, j\}$  en un chemin  $\lambda$  joignant  $i$  à  $j$ , et un ensemble d'arêtes  $E' \subset E$  avec  $b(E') = \emptyset$ . Nous employerons l'algorithme suivant afin d'extraire le chemin  $\lambda$  (*cf.* Fig. 8.1) :

1. Notons  $\mathcal{I}_k \stackrel{\text{déf}}{=} \{e \in \mathcal{E}_{\Lambda} : e \ni k\}$ . On fixe un ordre (arbitraire) sur l'ensemble  $\mathcal{I}_k$  pour chaque  $k \in \Lambda$ .
2. On initialise :  $m = 0$ ,  $x_0 = i$ ,  $\Delta_0 = \emptyset$ .
3. On définit  $x_{m+1}$  de façon à ce que  $\{x_m, x_{m+1}\}$  soit la première arête de  $(E \cap \mathcal{I}_{x_m}) \setminus \Delta_m$ . Si  $x_{m+1} = j$ , on arrête la procédure.
4. On pose  $\Delta_{m+1} = \Delta_m \cup \{e \in \mathcal{I}_{x_m} : e \leq \{x_m, x_{m+1}\}\}$ , et on incrémente  $m : m \leftarrow m + 1$ .
5. On retourne à l'étape 3.



**Fig. 8.1** – Gauche : Un ensemble d’arêtes  $E \subseteq \mathcal{E}_\Lambda$  avec  $b(E) = \{i, j\}$ . Droite : Le chemin  $\lambda : i \rightarrow j$ , en bleu. Les arêtes appartenant à  $\Delta(\lambda) \setminus \lambda$  sont indiquées en rouge. L’ordre des arêtes incidentes en chaque sommet est comme indiqué au milieu.

Cet algorithme nous fournit un chemin  $\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} (x_0, x_1, \dots, x_n)$  et un ensemble d’arêtes  $\Delta(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{m=1}^n \{e \in \mathcal{I}_{x_m} : e \leq \{x_{m-1}, x_m\}\}$ . Observons que la construction implique que  $x_0 = i$ ,  $x_n = j$ ,  $x_m \neq j$ ,  $\forall m < n$ , et chaque arête  $\{x_{m-1}, x_m\}$ ,  $m = 1, \dots, n$ , est utilisée exactement une fois ; on identifiera le chemin  $\lambda$  avec l’ensemble  $(e_1, \dots, e_n)$  des arêtes  $e_m = \{x_{m-1}, x_m\}$  lorsque cela sera utile.

Les chemins  $\lambda$  pouvant être extraits d’un ensemble  $E \subseteq \mathcal{E}_\Lambda$  avec  $b(E) = \{i, j\}$  par la procédure précédente sont dits admissibles. On notera l’ensemble des chemins admissibles de  $i$  à  $j$  par  $\{\lambda : i \rightarrow j\}$ .

**Lemme 8.1.1.** *L’ensemble  $\{E \subseteq \mathcal{E}_\Lambda : b(E) = \{i, j\}\}$  se compose de toutes les collections d’arêtes de la forme  $\lambda \cup E'$  avec  $\lambda : i \rightarrow j$  et  $E' \subseteq \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda)$  avec  $b(E') = \emptyset$ .*

*Démonstration.* Soit  $E \subseteq \mathcal{E}_\Lambda$  satisfaisant  $b(E) = \{i, j\}$ , et soit  $\lambda$  le chemin que l’on obtient en appliquant l’algorithme précédent à  $E$ , et  $E' = E \setminus \lambda$ . Supposons qu’il existe  $e \in \Delta(\lambda) \cap E'$ , et considérons l’étape lors de laquelle l’arête  $e$  est ajoutée à  $\Delta(\lambda)$ , c’est-à-dire l’étape  $m$  de l’algorithme telle que  $e \in \Delta_{m+1} \setminus \Delta_m$ . Par construction de  $\Delta_{m+1}$ , on a  $\{x_m, x_{m+1}\} > e$  pour l’ordre fixé sur  $\mathcal{I}_{x_m}$ . Mais ceci contredit le choix de  $x_{m+1}$  comme étant l’autre extrémité de la première arête de  $(E \cap \mathcal{I}_{x_m}) \setminus \Delta_m$ .

Soit à présent  $\lambda : i \rightarrow j$  et  $E' \subseteq \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda)$  satisfaisant  $b(E') = \emptyset$ . Alors,  $E = \lambda \cup E'$  appartient  $\mathfrak{E}_\Lambda^{ij}$ . On vérifie très facilement que l’application de l’algorithme précédent à  $E$  génère le chemin  $\lambda$ .  $\square$

Avec les notations précédentes, on peut réécrire (8.1) sous la forme

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\emptyset = \frac{1}{\Xi_\beta(\mathcal{E}_\Lambda)} \sum_{\lambda: i \rightarrow j} \tanh(\beta)^{|\lambda|} \sum_{\substack{E' \subseteq \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda) \\ b(E') = \emptyset}} \tanh(\beta)^{|E'|} = \sum_{\lambda: i \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda), \quad (8.2)$$

où l’on a introduit les poids, pour  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^d$  et  $\lambda \subseteq \mathcal{E}$ ,

$$q_{\mathcal{E}; \beta}(\lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \tanh(\beta)^{|\lambda|} \frac{\Xi_\beta(\mathcal{E} \setminus \Delta(\lambda))}{\Xi_\beta(\mathcal{E})}.$$

L’identité (8.2) est appelée **représentation en ligne aléatoire** de la fonction à 2-point (ou **représentation en marche aléatoire**, dans la terminologie de [1]).

Il sera pratique ci-dessous de définir  $q_{\mathcal{E}; \beta}$  pour un chemin arbitraire sur  $\mathbb{Z}^d$  en posant  $q_{\mathcal{E}; \beta}(\lambda) = 0$  si  $\lambda$  n’est pas un chemin admissible contenu dans  $\mathcal{E}$ .

## 8.2 Quelques propriétés des poids

Un des intérêts de la représentation (8.2) est qu’il est possible d’extraire de nombreuses propriétés des poids  $q_{\mathcal{E}; \beta}$  à partir d’inégalités de corrélation. Nous en donnons ici un exemple qui nous sera utile plus bas, mais il est possible d’extraire beaucoup plus d’information [43, 44].

Nous allons nous intéresser à la situation suivante : que peut-on dire de la somme sur tous les chemins joignant  $i$  à  $j$  et contraints à visiter un sommet intermédiaire  $k$ ? Plus précisément, si  $i, j, k$  sont trois sommets distincts de  $\Lambda$ , nous noterons  $\lambda : i \rightarrow k \rightarrow j$  lorsque  $\lambda : i \rightarrow j$  et  $\lambda \ni k$ . L'inégalité suivante, très utile, est dûe à Pfister [42] ; elle peut être aisément étendue au cas où  $\lambda$  est contraint à visiter plusieurs sommets intermédiaires.

**Théorème 8.2.1.** *Soient  $i, j, k$  trois sommets distincts de  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . Alors*

$$\sum_{\substack{\lambda: \\ i \rightarrow k \rightarrow j}} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda) \leq \sum_{\lambda: i \rightarrow k} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda) \sum_{\lambda: k \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda).$$

*Démonstration.* On considère  $\lambda$  comme une courbe dans  $\mathbb{R}^d$ , partant de  $i$ . L'observation cruciale est que

$$\lambda : i \rightarrow j, \lambda \ni k \iff \lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2 \text{ avec } \lambda_1 : i \rightarrow k, \lambda_2 : k \rightarrow j, \lambda_2 \subseteq \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1).$$

En effet, si  $\lambda = (x_1, \dots, x_n) : i \rightarrow j$  contient  $k$ , alors tous les chemins partiels  $(x_1, \dots, x_m)$ ,  $m \leq n$ , sont admissibles pour peu que  $x_m \neq x_{m'}$  pour tout  $m' < m$ . On peut donc extraire de  $\lambda$  un chemin admissible  $\lambda_1 : i \rightarrow k$  en l'interrompant à sa première visite en  $k$ . Lors de l'extraction d'un chemin admissible  $\lambda$ , la seule contrainte imposée par la partie de chemin déjà construite  $(x_1, \dots, x_m)$  aux arêtes ajoutées par la suite est d'être disjointes des arêtes de  $\Delta_m$ . Par conséquent, étant donné  $\lambda_1, \lambda_2$  est un chemin admissible connectant  $k$  à  $j$  sans utiliser d'arêtes de  $\Delta(\lambda_1)$ .

Réciproquement, on vérifie immédiatement que tout chemin de la forme  $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$  avec  $\lambda_1 : i \rightarrow k$ ,  $\lambda_2 : k \rightarrow j$ ,  $\lambda_2 \subseteq \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1)$ , est nécessairement un chemin admissible connectant  $i$  à  $j$  (et passant par  $k$ ).

Par conséquent, en observant que  $\Delta(\lambda_1 \cup \lambda_2) = \Delta(\lambda_1) \cup \Delta(\lambda_2)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\lambda: \\ i \rightarrow k \rightarrow j}} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda) &= \sum_{\lambda_1: i \rightarrow k} \sum_{\substack{\lambda_2: k \rightarrow j \\ \lambda_2 \cap \Delta(\lambda_1) = \emptyset}} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda_1 \cup \lambda_2) \\ &= \sum_{\lambda_1: i \rightarrow k} \tanh(\beta)^{|\lambda_1|} \frac{\Xi_\beta(\mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1))}{\Xi_\beta(\mathcal{E}_\Lambda)} \sum_{\substack{\lambda_2: k \rightarrow j \\ \lambda_2 \subseteq \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1)}} \tanh(\beta)^{|\lambda_2|} \frac{\Xi_\beta((\mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1)) \setminus \Delta(\lambda_2))}{\Xi_\beta(\mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1))} \\ &= \sum_{\lambda_1: i \rightarrow k} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda_1) \sum_{\lambda_2: k \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1); \beta}(\lambda_2). \end{aligned}$$

La conclusion suit alors des inégalités GKS, puisque

$$\sum_{\lambda_2: k \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1); \beta}(\lambda_2) = \langle \sigma_k \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0, \lambda_1}^\otimes \leq \langle \sigma_k \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\otimes = \sum_{\lambda_2: k \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_\Lambda; \beta}(\lambda_2),$$

où l'espérance  $\langle \cdot \rangle_{\Lambda; \beta, 0, \lambda_1}^\otimes$  est prise sous la mesure de Gibbs dans  $\Lambda$  avec Hamiltonien

$$-\beta \sum_{\{i, j\} \in \mathcal{E}_\Lambda \setminus \Delta(\lambda_1)} \sigma_i \sigma_j.$$

□

Le corollaire suivant, originellement dû à Simon [51], possède de nombreuses conséquences remarquables. Nous en verrons une dans la Section 8.4.

**Corollaire 8.2.1.** *Soit  $A \subseteq \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  tel que  $i \in A \setminus \partial A$  et  $j \notin A$ . Alors*

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\otimes \leq \sum_{k \in \partial A} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\otimes \langle \sigma_k \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^\otimes. \quad (8.3)$$

*Démonstration.* Soit  $\lambda : i \rightarrow j$ . On définit  $\lambda_1$  comme la partie du chemin allant de  $i$  jusqu'à la première visite en  $\partial A$ . Il suit alors du Théorème 8.2.1 que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\circ} &= \sum_{\lambda: i \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_{\Lambda}; \beta}(\lambda) \leq \sum_{k \in \partial A} \sum_{\substack{\lambda: \\ i \rightarrow k \rightarrow j}} q_{\mathcal{E}_{\Lambda}; \beta}(\lambda) \\ &\leq \sum_{k \in \partial A} \sum_{\lambda: i \rightarrow k} q_{\mathcal{E}_{\Lambda}; \beta}(\lambda) \sum_{\lambda: k \rightarrow j} q_{\mathcal{E}_{\Lambda}; \beta}(\lambda) = \sum_{k \in \partial A} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\circ} \langle \sigma_k \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\circ}. \end{aligned}$$

□

*Remarque 8.2.1.* On peut en fait assez facilement améliorer cette inégalité sous la forme

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\circ} \leq \sum_{k \in \partial A} \langle \sigma_i \sigma_k \rangle_{A; \beta, 0}^{\circ} \langle \sigma_k \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\circ}.$$

Cette amélioration (qui a des conséquences très intéressantes) est dûe à Lieb [37]. Elle peut se démontrer en combinant la preuve précédente et l'inégalité  $q_{\mathcal{E}_1}(\lambda) \leq q_{\mathcal{E}_2}(\lambda)$ , valide pour tout  $\lambda \subseteq \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$  [43, 44].

### 8.3 Existence de la masse

La représentation en ligne aléatoire est particulièrement utile lorsque la fonction à 2-point décroît exponentiellement rapidement, ce qui a lieu si et seulement si  $\beta < \beta_c$  (et  $h = 0$ ) [4]. On peut alors associer à chaque direction  $\vec{n}$ , le taux de décroissance exponentielle dans cette direction, de la façon suivante. On appelle **masse** (ou **longueur de corrélation inverse**) dans la direction  $\vec{n}$  la fonction  $\xi_{\beta} : \mathbb{S}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\xi_{\beta}(\vec{n}) \stackrel{\text{déf}}{=} -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \langle \sigma_0 \sigma_{[k\vec{n}]} \rangle_{\beta, 0}^{\circ},$$

où l'on a introduit, pour  $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $\lfloor y \rfloor \stackrel{\text{déf}}{=} (\lfloor y_1 \rfloor, \dots, \lfloor y_d \rfloor)$ .

**Théorème 8.3.1.** *La limite ci-dessus existe pour tout  $\vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ , et*

$$\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\circ} \leq e^{-\xi_{\beta}(\vec{n}_i) \|i\|_2}, \quad \forall \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d, \forall i \in \Lambda, \quad (8.4)$$

où  $\vec{n}_i \stackrel{\text{déf}}{=} i / \|i\|_2$ . De plus,  $\xi_{\beta}(\vec{n}) > 0$ ,  $\forall \vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1}$ , dès que  $\beta < \beta_c$ .

*Remarque 8.3.1.* On peut en fait montrer [9], mais ceci est beaucoup plus difficile, que, pour tout  $\beta < \beta_c$ ,

$$\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta, 0}^{\circ} = \frac{\Psi_{\beta}(\vec{n}_i)}{\|i\|_2^{(d-1)/2}} e^{-\xi_{\beta}(\vec{n}_i) \|i\|_2} (1 + o(1)),$$

lorsque  $\|i\|_2 \rightarrow \infty$ , où  $\Psi_{\beta}$  est une fonction strictement positive et analytique sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ . La correction à la décroissance exponentielle établie dans le théorème est donc algébrique.

*Démonstration.* La stricte positivité est difficile et nous ne la ferons pas ici [4]. Passons à l'existence.

On traite tout d'abord le cas des vecteurs  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_d)$  tels que  $n_k / n_1 \in \mathbb{Q}$  pour tout  $2 \leq k \leq d$ ; évidemment l'ensemble  $\mathbb{S}^{d-1}$  de ces vecteurs est dense dans la sphère. Soit  $\vec{n}$  un tel vecteur. Il existe donc  $0 \neq \ell_0 \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\ell_0 = \alpha \vec{n}$  pour un certain  $\alpha > 0$ . Nous allons tout d'abord démontrer la convergence le long de la suite  $k_m = m\alpha$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . Il suffit pour cela d'observer que les inégalités GKS et l'invariance sous les translations (*cf.* Exercice 8) impliquent que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \sigma_{k_{m_1+m_2} \vec{n}} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} &= \langle \sigma_0 \sigma_{(m_1+m_2)\ell_0} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} \geq \langle \sigma_0 \sigma_{m_1 \ell_0} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} \langle \sigma_{m_1 \ell_0} \sigma_{(m_1+m_2)\ell_0} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} \\ &= \langle \sigma_0 \sigma_{m_1 \ell_0} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} \langle \sigma_0 \sigma_{m_2 \ell_0} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} = \langle \sigma_0 \sigma_{k_{m_1} \vec{n}} \rangle_{\beta, 0}^{\circ} \langle \sigma_0 \sigma_{k_{m_2} \vec{n}} \rangle_{\beta, 0}^{\circ}. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$a_{m_1+m_2} \leq a_{m_1} + a_{m_2}, \quad \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*,$$

où l'on a posé  $a_m = -\log \langle \sigma_0 \sigma_{k_m \vec{n}} \rangle_{\beta,0}^{\otimes}$ . Une application du Lemme A.4.1 montre donc que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{k_m} \log \langle \sigma_0 \sigma_{k_m \vec{n}} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} = \frac{1}{\alpha} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{m} = \frac{1}{\alpha} \inf_{m \geq 1} \left\{ \frac{a_m}{m} \right\}, \quad (8.5)$$

ce qui établit la convergence le long de cette suite particulière lorsque  $\vec{n} \in \mathbb{S}_r^{d-1}$ .

Montrons à présent la convergence le long d'une suite  $k_m \rightarrow \infty$  arbitraire, toujours pour les vecteurs  $\vec{n} \in \mathbb{S}_r^{d-1}$ . Il suffit d'observer que, pour tout  $k \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lfloor k\vec{n} \rfloor = r_k \ell_0 + w_k$  avec  $r_k \in \mathbb{N}$  et  $w_k \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $\|w_k\|_\infty < \|\ell_0\|_\infty$ . Par conséquent

$$\langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n} \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \geq \langle \sigma_0 \sigma_{r_k \ell_0} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \langle \sigma_0 \sigma_{w_k} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \geq C \langle \sigma_0 \sigma_{r_k \ell_0} \rangle_{\beta,0}^{\otimes},$$

puisque, pour tout  $j \in \mathbb{Z}^d$ ,

$$\langle \sigma_0 \sigma_j \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \geq \langle \sigma_0 \sigma_j \rangle_{\pi; \beta,0}^{\otimes} \geq \tanh(\beta)^{\|j\|_1}, \quad (8.6)$$

par les inégalités GKS et (8.1) en dimension 1,  $\pi$  étant un plus court chemin menant de 0 à  $j$ . De la même manière, on obtient que  $\langle \sigma_0 \sigma_{r_k \ell_0} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \geq C \langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n} \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes}$ . On a donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n} \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \langle \sigma_0 \sigma_{r_k \ell_0} \rangle_{\beta,0}^{\otimes},$$

et on a vu que la limite dans le membre de droite existe.

Il reste à montrer la convergence pour  $\vec{n} \in \mathbb{S}^{d-1} \setminus \mathbb{S}_r^{d-1}$ . Soit  $\epsilon > 0$  et  $\vec{n}' \in \mathbb{S}_r^{d-1}$  tel que  $\|\vec{n} - \vec{n}'\|_2 \leq \epsilon$ . En procédant comme ci-dessus, on montre qu'il existe  $c > 0$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{R}_+$ ,

$$e^{-ck\epsilon} \leq \frac{\langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n} \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes}}{\langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n}' \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes}} \leq e^{ck\epsilon},$$

puisque  $\|k\vec{n} - k\vec{n}'\|_2 \leq k\epsilon$ . Par conséquent,

$$\xi_\beta(\vec{n}') - c\epsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k} \log \langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n} \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k} \log \langle \sigma_0 \sigma_{\lfloor k\vec{n} \rfloor} \rangle_{\beta,0}^{\otimes} \leq \xi_\beta(\vec{n}') + c\epsilon,$$

et la conclusion suit.

Finalement, en partant de  $i \in \mathbb{Z}^d$ , on voit que  $\vec{n}_i \in \mathbb{S}_r^{d-1}$  et donc (8.4) suit de (8.5) (avec  $\ell_0 = i$  et  $m = 1$ ).  $\square$

La fonction  $\xi_\beta$  peut ensuite être étendue à  $\mathbb{R}^d$  par homogénéité positive :  $\xi_\beta(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \|x\|_2 \xi_\beta(n_x)$ . Il n'est alors pas difficile, en utilisant les inégalités GKS, de montrer que  $\xi_\beta$  est convexe et que, par conséquent, c'est une norme sur  $\mathbb{R}^d$  lorsque  $\beta < \beta_c$  (exercice).

## 8.4 Une application de l'inégalité de Simon

L'inégalité (8.3) a de nombreuses applications. Nous en donnerons une des plus importantes ici, dûe à Simon [51] : la fonction à 2-point décroît exponentiellement si et seulement si elle est sommable.

**Théorème 8.4.1.** *Supposons que*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta,0}^{\otimes} < \infty.$$

*Alors, la masse est strictement positive :  $\xi_\beta(x) > 0$ , pour tout  $x \neq 0$ .*

*Remarque 8.4.1.* La quantité  $\chi_\beta \stackrel{\text{déf}}{=} \beta \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta,0}^\otimes$  joue un rôle très important en physique statistique et en thermodynamique ; elle est appelée **susceptibilité magnétique**. Observez que ce théorème montre, en particulier, que si la fonction à 2-point décroît comme  $\|i\|_2^{-\alpha}$ , avec  $\alpha > d - 1$ , alors elle décroît exponentiellement vite.

*Démonstration.* On note  $B_R = \{j \in \mathbb{Z}^d : \|j\|_\infty \leq R\}$ . On choisit  $R$  tel que

$$\sum_{k \in \partial B_R} \langle \sigma_0 \sigma_k \rangle_{\beta,0}^\otimes \leq e^{-c} < 1.$$

L'existence d'un tel  $R$  est assurée par le fait que la série  $\sum_{R \geq 0} \sum_{k \in \partial B_R} \langle \sigma_0 \sigma_k \rangle_{\beta,0}^\otimes$  converge. On applique ensuite l'inégalité de Simon,

$$\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta,0}^\otimes \leq \sum_{k \in \partial B_R} \langle \sigma_0 \sigma_k \rangle_{\beta,0}^\otimes \langle \sigma_k \sigma_i \rangle_{\beta,0}^\otimes \leq e^{-c} \sup_{k \in \partial B_R} \langle \sigma_k \sigma_i \rangle_{\beta,0}^\otimes.$$

On peut itérer cette opération  $\|i\|_\infty/R$  fois, obtenant ainsi

$$\langle \sigma_0 \sigma_i \rangle_{\beta,0}^\otimes \leq e^{-c\|i\|_\infty/R},$$

pour tout  $i$  avec  $\|i\|_\infty$  suffisamment grande, ce qui démontre le résultat.  $\square$

# Algorithmes de simulation

Dans ce chapitre, nous décrivons brièvement quelques méthodes permettant de générer numériquement des configurations du modèle d'Ising.

## 9.1 Méthode de Monte-Carlo

Soit  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et  $\bar{\omega} \in \Omega$ . On désire tirer une configuration de  $\Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}$  avec probabilité  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ . Une façon naturelle de procéder est d'introduire une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur l'ensemble fini  $\Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}$ , choisie de sorte à ce que son unique mesure invariante soit  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ . Nous allons discuter le cas standard de l'algorithme du “bain thermique” (*heat bath*, en anglais). Dans celui-ci, on passe d'une configuration  $\omega$  à une autre configuration  $\omega'$  de la façon suivante : on tire, indépendamment, un nombre  $u \in [0, 1]$  avec la mesure uniforme, et un sommet  $i \in \Lambda$ , également de façon uniforme. On pose alors

$$\omega'_j = \begin{cases} \omega_j & \text{si } j \neq i, \\ 1 & \text{si } j = i \text{ et } u \leq \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\sigma_i = 1 \mid \sigma_j = \omega_j, \forall j \sim i), \\ -1 & \text{si } j = i \text{ et } u > \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\sigma_i = 1 \mid \sigma_j = \omega_j, \forall j \sim i). \end{cases} \quad (9.1)$$

En d'autres termes, après avoir choisi un sommet au hasard, on fixe la valeur de la configuration en  $i$  à  $\pm 1$  avec probabilité

$$\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\sigma_i = \pm 1 \mid \sigma_j = \omega_j, \forall j \sim i).$$

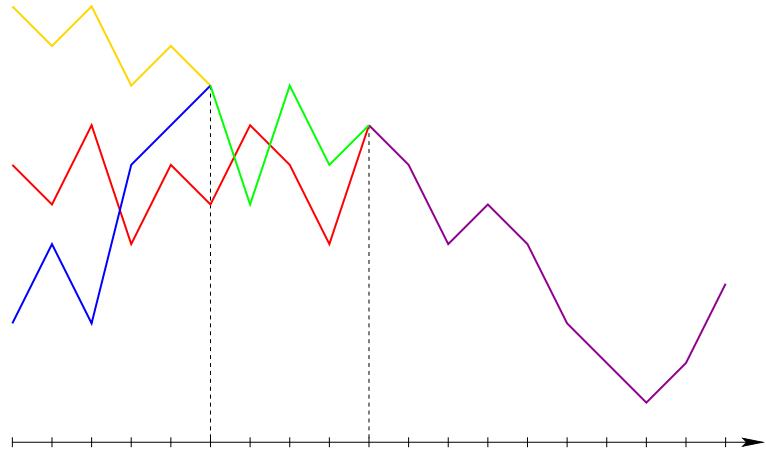
Notons  $\mathbb{T}(\omega \rightarrow \omega')$  les probabilités de transition correspondantes.

**Lemme 9.1.1.** *La chaîne de Markov construite ci-dessus est ergodique, et sa distribution stationnaire est  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, la chaîne construite est manifestement irréductible et apériodique, et par conséquent ergodique. Nous allons vérifier que la chaîne est réversible par rapport à  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ . On a, pour toute paire de configurations  $\omega, \omega' \in \Omega_{\Lambda}^{\bar{\omega}}$  coïncidant partout sauf au sommet  $i \in \Lambda$  où  $\omega_i = 1 = -\omega'_i$ ,

$$\begin{aligned} \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega) \mathbb{T}(\omega \rightarrow \omega') &= \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega) \frac{1}{|\Lambda|} \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\sigma_i = -1 \mid \sigma_j = \omega_j, \forall j \sim i) \\ &= \frac{1}{|\Lambda|} \frac{\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega) \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega')}{\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega) + \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega')} \\ &= \mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\omega') \mathbb{T}(\omega' \rightarrow \omega). \end{aligned}$$

Par conséquent, la distribution stationnaire de la chaîne (nécessairement unique) est bien  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$ .  $\square$



**Fig. 9.1** – Trois copies d’une chaîne partant de trois états différents. Les (ici, deux) instants de coalescence sont indiqués.

On est alors confronté à un problème d’ordre pratique : on ne peut évidemment laisser cet algorithme tourner infiniment longtemps, et il faut donc l’interrompre après un nombre fini  $M$  d’itérations. Comment doit-on choisir  $M$  si l’on veut être assuré d’être proche de la distribution stationnaire ? Une approche possible est d’étudier la vitesse de convergence de la chaîne. Malheureusement, une telle approche ne fournit en général que des bornes trop grossières pour être réellement utiles en pratique, même si elles peuvent donner des indications<sup>1</sup>. Par chance, il existe une variante de l’algorithme ci-dessus, ne nécessitant qu’un nombre fini (mais aléatoire !) de pas, et garantissant que la distribution obtenue est *exactement* la distribution stationnaire : on parle alors de simulation parfaite.

## 9.2 Simulation parfaite

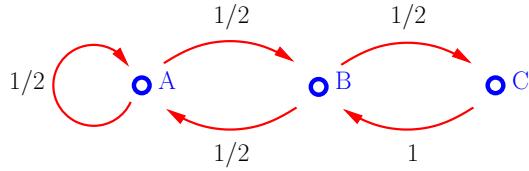
Nous avons vu qu’il est aisément de construire une chaîne de Markov possédant  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$  comme mesure stationnaire. Nous allons à présent en donner une variante appelée “couplage depuis le passé” (*coupling from the past*, en anglais) qui permet de générer des configurations distribuées exactement selon la mesure stationnaire tout en ne nécessitant qu’un nombre fini d’itérations. Cette variante est dûe à Propp et Wilson [47].

Soient  $q_{\omega, \omega'}, \omega, \omega' \in \Omega$ , avec  $\Omega$  un ensemble fini, les probabilités de transition d’une chaîne de Markov  $X$  irréductible et apériodique de mesure stationnaire  $\mathbb{P}$ . Afin d’analyser la dépendance en l’état initial de la chaîne, on démarre, au temps  $t_0$ ,  $|\Omega|$  copies de celle-ci, chacune partant d’un état différent. L’évolution se fait de façon indépendante, tant que les trajectoires ne coïncident pas. Si deux (ou plus) trajectoires coïncident à un temps  $t$ , alors on les fait évoluer ensemble pour tous les temps ultérieurs, comme représenté sur la Figure 9.1. On réalise ainsi un couplage de ces  $|\Omega|$  chaînes. Une façon équivalente de présenter ce couplage est de considérer une famille  $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  de fonctions aléatoires i.i.d.  $f_k : \Omega \rightarrow \Omega$  de loi  $\mathbb{Q}$  telles que, pour tout  $\omega' \in \Omega$ ,  $\mathbb{Q}(f_0(\omega) = \omega') = q_{\omega, \omega'}$  indépendamment pour chaque  $\omega \in \Omega$ . La distribution au temps  $t \in \mathbb{N}$  de la chaîne partant de l’état  $\omega$  au temps  $t_0 < t$  est donc identique à celle de  $F_{t_0}^t(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} f_{t-1} \circ f_{t-2} \circ \cdots \circ f_{t_0+1} \circ f_{t_0}(\omega)$ .

**Lemme 9.2.1.** *Il existe  $\mathbb{Q}$ -presque-sûrement un temps  $N < \infty$  tel que  $F_1^N$  est une constante.*

*Démonstration.* Par irréductibilité et apériodicité, il existe  $K < \infty$  tel que la probabilité d’aller de  $\omega$  à  $\omega'$  en  $K$  pas est strictement positive pour toute paire  $\omega, \omega' \in \Omega$ . Par conséquent,  $\mathbb{Q}(F_1^K = \text{const})$

<sup>1</sup>Pour nuancer un peu ces propos, de tels algorithmes de simulations sont utilisés régulièrement, par exemple par les physiciens, même en l’absence d’informations (rigoureuses) sur la vitesse de convergence ; pragmatiques, ils se contentent souvent de lancer la simulation à partir de différentes configurations initiales, et estiment avoir attendu suffisamment longtemps si les résultats obtenus ne dépendent pas (trop) de la configuration initiale.



**Fig. 9.2** – Un exemple montrant qu'à l'instant de coalescence, la chaîne n'est pas nécessairement dans la distribution stationnaire : l'état C ne pouvant être atteint qu'en venant de l'état B, il n'est pas possible que les chaînes soient dans l'état C au moment de la coalescence.

est également strictement positive. Les événements  $\{F_{nK+1}^{(n+1)K} = \text{const}\}$ ,  $n \geq 0$ , étant i.i.d., on peut trouver, avec  $\mathbb{Q}$ -probabilité 1, un  $n$  tel que  $F_{nK+1}^{(n+1)K}$  soit constante.

Soit  $t_2 > t_1 \geq 0$  ; observant que  $F_{t_1}^{t_2} = \text{const}$  implique  $F_0^{t'} = \text{const}$  pour tout  $t' > t_2$ , on en déduit que  $F_0^t$  sera constante pour tout  $t$  suffisamment grand.  $\square$

Manifestement, une fois que les  $|\Omega|$  trajectoires ont coalescé, toute information sur l'état de départ est perdue, et on pourrait donc penser que l'on obtient à cet instant un échantillon distribué selon la loi stationnaire. Mais c'est faux, comme on peut le voir facilement sur l'exemple de la Figure 9.2 ; le problème est que l'observation n'est pas faite en un temps déterministe, ce qui conduit à un biais. Cette idée n'est cependant pas à rejeter complètement, et il se trouve qu'une modification très simple permet de la faire fonctionner.

L'idée est de ne pas chercher à coupler “dans le futur” comme on vient de le faire, mais “depuis le passé” : on va démarrer les  $|\Omega|$  chaînes à un temps suffisamment reculé dans le passé, et observer le résultat au temps 0. Plus précisément, on sait que  $F_{-t}^0 = f_{-1} \circ f_{-2} \circ \dots \circ f_{-t+1} \circ f_{-t}$  est constante pour tout  $t$  suffisamment grand (remarquez que l'on n'exige pas que le temps auquel la coalescence de toutes les copies a lieu soit égal à 0, mais seulement que cela ait eu lieu *avant* 0 ; cette différence est cruciale).

**Lemme 9.2.2.** *Soit  $M$  une variable aléatoire telle que  $F_{-M}^0$  soit constante ( $M$  peut être choisie finie,  $\mathbb{Q}$ -presque sûrement). Alors la distribution de l'unique image de  $F_{-M}^0$  est précisément  $\mathbb{P}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\omega \in \Omega$ . Comme  $F_{-T}^0$  est  $\mathbb{Q}$ -presque sûrement constante pour tous les  $T$  suffisamment grands, la limite

$$F_{-\infty}^0(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} F_{-T}^0(\omega)$$

existe  $\mathbb{Q}$ -presque sûrement, et est  $\mathbb{Q}$ -presque sûrement indépendante de  $\omega$  (voir la Figure 9.3). De plus, on a l'égalité suivante (presque sûrement)

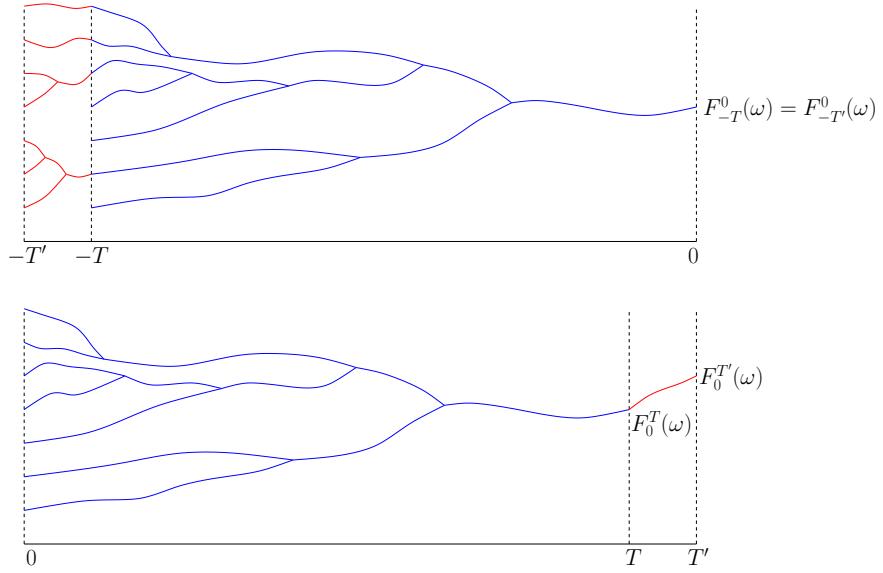
$$F_{-\infty}^0 = F_{-M}^0.$$

La conclusion suit, puisque, par ergodicité de la chaîne de markov, la loi de l'unique image de  $F_{-\infty}^0$  est la distribution stationnaire  $\mathbb{P}$ .  $\square$

*Remarque 9.2.1.* Il peut être utile de réaliser ce qui ne marcherait pas si l'on avait procédé “vers le futur” : dans ce cas, il n'est pas vrai que la limite

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_0^T(\omega)$$

existe. En effet,  $F_0^T(\omega) \neq F_0^{T+1}(\omega)$  en général! Un coup d'oeil à la Figure 9.3 peut peut-être aider.



**Fig. 9.3** – Représentation schématique de l'évolution. Haut : couplage depuis le passé ;  $F_{-T}^0$  étant constante, c'est également le cas de  $F_{-T'}^0$ , et leur unique image est identique. Bas : évolution vers le futur ;  $F_0^T$  étant constante,  $F_0^{T'}$  l'est aussi, mais il n'est plus vrai en général que leur unique image est identique.

En résumé : si `FctAleatoire()` est une routine qui retourne une fonction  $f$  distribuée selon  $\mathbb{Q}$ , alors l'algorithme

```

 $t \leftarrow 0$ 
 $F_t^0 \leftarrow$  identité
répéter
|    $t \leftarrow t - 1$ 
|    $f \leftarrow \text{FctAleatoire}()$ 
|    $F_t^0 \leftarrow F_{t+1}^0 \circ f$ 
jusqu'à  $F_t^0$  est constante
retourner l'unique valeur dans l'image de  $F_t^0$ 
    
```

renvoie un élément de  $\Omega$  distribué selon  $\mathbb{P}$  après un temps presque-sûrement fini.

Faisons à présent quelques commentaires à propos de l'implémentation d'un tel algorithme.

**Temps d'échantillonage.** Il n'est pas nécessaire (et pas désirable du tout !) d'appliquer l'algorithme ci-dessus pour chaque  $t < 0$ . Il suffit bien sûr de choisir une suite décroissante de temps  $T_k < 0$ ,  $T_k \downarrow -\infty$ , et de vérifier successivement, pour  $k = 1, 2, \dots$ , si  $F_{T_k}^0$  est constante. On peut montrer que le choix  $T_k = -2^k$  est proche du choix optimal.

**La dynamique sous-jacente.** Bien entendu, un pas de temps dans l'algorithme ci-dessus ne correspond pas nécessairement à l'application d'un pas de la chaîne de Markov sous-jacente. par exemple, dans le cas de la dynamique du bain thermique, un pas de la chaîne de Markov ne modifie qu'au plus un spin, et ne favorise donc guère la coalescence des trajectoires. Il est beaucoup plus judicieux pour chaque pas de l'algorithme ci-dessus, d'effectuer un nombre suffisant de pas de la chaîne de Markov.

Il est aussi important de bien choisir cette dynamique sous-jacente. Plus elle converge rapidement, plus l'algorithme de couplage depuis le passé s'arrêtera rapidement. Par exemple, appliquée au modèle d'Ising, la dynamique de bain thermique introduite précédemment converge rapidement dans le régime

d'unicité, mais sa convergence est catastrophique dans le régime de coexistence des phases,  $\beta > \beta_c$ . Heureusement, il en existe de meilleures, au moins dans certaines situations, *cf.* la section 9.3.

**Couplage indépendant.** Le couplage utilisé ci-dessus est tel que  $f_0(\omega)$  est choisie comme étant égale à  $\omega'$  avec probabilité  $q_{\omega, \omega'}$  indépendamment pour chaque  $\omega \in \Omega$ . Le choix d'un tel couplage indépendant entre les différentes trajectoires jusqu'à leur rencontre n'est bien entendu pas le seul possible. En fait, on peut en général faire beaucoup mieux, en choisissant un couplage qui favorise une coalescence plus rapide du processus. On en verra un exemple ci-dessous.

**Couplage monotone.** Une faiblesse de l'approche esquissée ci-dessus devrait être évidente : la nécessité de considérer des chaînes partant de chaque état de  $\Omega$  peut sembler rendre cette approche impossible à appliquer au modèle d'Ising : après tout, dans une boîte carrée de  $500 \times 500$  sommets (la taille utilisée pour les simulations de la Figure 1.4), le nombre de configurations est déjà de  $2^{250000} \simeq 10^{75257}$  ! La solution à ce problème, dans le cas du modèle d'Ising, est d'utiliser les propriétés d'ordre. Nous avons vu, dans la sous-section 2.2.2, que l'ensemble des configurations du modèle d'Ising peut être muni d'un ordre partiel naturel. On introduit le couplage suivant : on tire un nombre  $u$  uniformément dans  $[0, 1]$  et un sommet  $i$  uniformément dans  $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$  et on définit  $f_0(\omega)$  comme dans (9.1), c'est-à-dire qu'on pose  $f_0(\omega) = \omega'$ , où  $\omega'_j = \omega_j$  pour tout  $j \neq i$ , et

$$\omega'_i = \begin{cases} 1 & \text{si } u \leq \mu_{\Lambda, \beta, h}^{\bar{\omega}}(\sigma_i = 1 \mid \sigma_k = \omega_k, \forall k \sim i) = \left(1 + \exp(-2\beta \sum_{j \sim i} \omega_j - 2h)\right)^{-1} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquez que ce couplage n'est pas du tout indépendant, puisque l'on utilise les mêmes  $i$  et  $u$  pour toute configuration initiale  $\omega$ . En observant que

$$\left(1 + \exp(-2\beta \sum_{j \sim i} \omega_j - 2h)\right)^{-1}$$

est une fonction croissante de  $\omega$ , on constate que ce couplage possède la propriété suivante : si  $\omega_1 \leq \omega_2$ , alors  $f_0(\omega_1) \leq f_0(\omega_2)$ . Un tel couplage est dit **monotone**.

L'intérêt de ce couplage est qu'il suffit de comparer *deux* trajectoires : celles partant des configurations  $\omega \equiv 1$  et  $\omega \equiv -1$  dans  $\Lambda$ . En effet, comme toute trajectoire partant d'une autre configuration va toujours être prise en sandwich entre ces deux trajectoires-ci, ce seront les dernières à coalescer.

En outre, ce couplage est plus efficace que le couplage indépendant, dans le sens qu'il couple plus rapidement des trajectoires distinctes.

### 9.3 Algorithmes par amas

Dans le cas du modèle d'Ising, la dynamique de bain thermique converge très lentement dans le régime de coexistence des phases,  $\beta > \beta_c$ . En effet, la dynamique va rapidement converger vers un état où la boîte se retrouve partagée en régions occupées soit par la phase  $+$ , soit par la phase  $-$ , séparées par des interfaces. La relaxation de ces interfaces est très lente, car il n'y a pas de biais en faveur d'une des deux phases (sauf éventuellement au bord du système). Ceci donne lieu à des temps de convergence explosant comme une exponentielle étirée avec la taille du système.

Nous allons présenter dans cette section une dynamique alternative, moins locale, qui ne souffre pas de ces défauts (du moins sur  $\mathbb{Z}^d$  et pour des conditions au bord appropriées ; en réalité, il y a très peu de résultats rigoureux sur la vitesse de convergence de cet algorithme, bien que d'un point de vue pratique il fonctionne si bien qu'il est, avec d'autres algorithmes analogues, presque toujours utilisé aujourd'hui). Cette dynamique repose sur la représentation FK.

Soit  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$  la mesure de Gibbs en volume fini du modèle d'Ising dans la boîte  $\Lambda$ , avec condition au bord  $+$ , et paramètres  $\beta$  et  $h = 0$ , et soit  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w$  la mesure FK associée.

Considérons les algorithmes suivants :

**Entrées** : une configuration  $\omega \in \Omega_\Lambda^+$  tirée selon la mesure  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$

**pour chaque arête  $e = \{i, j\}$  de  $\mathcal{E}_\Lambda^+$  faire**

**si**  $\omega_i \neq \omega_j$  **alors**

$\eta_e \leftarrow 0$

**sinon**

$u \leftarrow \text{Uniforme}([0, 1])$

**si**  $u < p_\beta$  **alors**

$\eta_e \leftarrow 1$

**sinon**

$\eta_e \leftarrow 0$

**fin**

**fin**

**retourner** la configuration  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}_\Lambda^+, w}^{\text{FK}}$

**Entrées** : une configuration  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}_\Lambda^+, w}^{\text{FK}}$  tirée selon la mesure  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w$

**pour chaque amas fini de la configuration  $\eta$  faire**

$s \leftarrow \text{Bernoulli}(\{-1, 1\}, 1/2)$

**pour chaque sommet  $i$  de l'amas faire**  $\omega_i \leftarrow s$

**fin**

**pour chaque sommet  $i$  de l'amas infini faire**  $\omega_i \leftarrow 1$

**retourner** la configuration  $\omega \in \Omega_\Lambda^+$

**Lemme 9.3.1.** *La configuration  $\eta$  retournée par le premier algorithme est distribuée selon  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}_\Lambda^+; p_\beta, 2}^w$ , et la configuration  $\omega$  retournée par le second algorithme est distribuée selon  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$ .*

*Démonstration.* Il s'agit d'une simple reformulation du Théorème 6.2.2. □

### 9.3.1 Dynamique de Swendsen-Wang

Il est à présent très facile de construire une nouvelle chaîne de Markov dont la mesure stationnaire est  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$  : on passe d'une configuration  $\omega \in \Omega_\Lambda^+$  à une configuration  $\omega' \in \Omega_\Lambda^+$  en appliquant successivement (et dans l'ordre) chacun des deux algorithmes présentés avant le lemme 9.3.1. La première application génère (aléatoirement) une configuration d'arêtes  $\eta \in \Omega_{\mathcal{E}_\Lambda^+, w}^{\text{FK}}$ , compatible avec la configuration de spins  $\omega$  ; la seconde application retourne une nouvelle configuration (aléatoire) de spins  $\omega' \in \Omega_\Lambda^+$ , compatible avec la configuration d'arêtes intermédiaire  $\eta$ .

**Lemme 9.3.2.** *La chaîne de Markov introduite ci-dessus converge vers  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$ .*

*Démonstration.* Le lemme 9.3.1 montre que si la configuration  $\omega$  est distribuée selon  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$ , alors c'est encore le cas pour la configuration  $\omega'$ , donc  $\mu_{\Lambda; \beta, 0}^+$  est bien une mesure stationnaire de la chaîne. Puisque n'importe quelle configuration  $\omega'$  (compatible avec la condition au bord) peut être atteinte en une étape (ceci est possible, par exemple, si toutes les arêtes de la configuration intermédiaire  $\eta$  sont fermées), la chaîne est irréductible et apériodique, et donc ergodique. □

Les grands avantages de cette dynamique par rapport à celle du bain thermique sont sa nature non-locale, qui lui permet de se déplacer plus rapidement dans l'espace des configurations, et le fait

qu'elle ne distingue pas les différentes phases d'équilibre et fonctionne ainsi très efficacement même dans le régime de coexistence des phases,  $\beta > \beta_c$ .

*Remarque 9.3.1.* Une limitation de cette approche est liée à la condition au bord. S'il est bien entendu possible de traiter également les conditions au bord –, libre et périodique, il n'en est pas de même pour des conditions au bord générales  $\bar{\omega}$ , car celles-ci induisent en général des contraintes sur les connections autorisées à l'intérieur de  $\Lambda$  (si  $\bar{\omega}_i \neq \bar{\omega}_j$ , alors il ne peut pas y avoir d'amas connectant  $i$  à  $j$ ).

*Remarque 9.3.2.* Malgré le caractère non-monotone de cette dynamique, il est tout de même possible de l'utiliser dans une approche “couplage depuis le passé”, en utilisant une technique dite de **chaîne dominante** (*bounding chain*, en anglais) afin de détecter le moment de la coalescence [26]. Nous ne discuterons pas de cette technique ici. C'est cette méthode qui a été utilisée pour obtenir les configurations de la Fig. 1.4.



Annexe **A**

## Appendices techniques

### A.1 Preuve des inégalités de corrélation

Dans cette section, nous démontrons les inégalités de corrélation utilisées dans les chapitres précédents.

#### A.1.1 Inégalités GKS

Il est plus naturel de les énoncer dans un cadre un peu plus général que celui introduit précédemment.

Soit  $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$ , et  $\mathbf{J} = (J_A)_{A \subseteq \Lambda}$ , une famille de nombres réels. On considère la mesure de probabilité suivante sur  $(\Omega_\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)$  :

$$\nu_{\Lambda; \mathbf{J}}(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{Z_{\Lambda; \mathbf{J}}} \exp\left\{\sum_{C \subseteq \Lambda} J_C \omega_C\right\},$$

où l'on a utilisé la notation  $\omega_C = \prod_{i \in C} \omega_i$ .

*Remarque A.1.1.* Les mesures  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^+$ ,  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^\varnothing$  et  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\text{per}}$  peuvent être mises sous la forme ci-dessus, avec  $J_C \geq 0$ ,  $\forall C \subseteq \Lambda$ , si  $h \geq 0$ . Par exemple, pour la condition au bord +, il suffit de prendre

$$J_C = \begin{cases} h + \beta \cdot \#\{j \notin \Lambda : j \sim i\} & \text{si } C = \{i\} \subseteq \Lambda, \\ \beta & \text{si } C = \{i, j\} \subseteq \Lambda, i \sim j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Théorème A.1.1.** Soient  $\mathbf{J} = (J_C)_{C \subseteq \Lambda}$  et  $\mathbf{J}' = (J'_C)_{C \subseteq \Lambda}$  tels que  $J_C \geq |J'_C|$  (en particulier  $J_C \geq 0$ ), pour tout  $C \subseteq \Lambda$ . Alors, pour tout  $A, B \subseteq \Lambda$ ,

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} \geq 0, \tag{A.1}$$

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}}, \tag{A.2}$$

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}'}, \tag{A.3}$$

*Démonstration.* Manifestement la fonction de partition  $Z_{\Lambda; \mathbf{J}}$  est strictement positive. Il suffit donc de

démontrer les résultats correspondants pour les numérateurs.

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_{\Lambda; \mathbf{J}} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} &= \sum_{\omega} \omega_A \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{J_C \omega_C} \\
&= \sum_{\omega} \omega_A \prod_{C \subseteq \Lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{J_C^n}{n!} \omega_C^n \\
&= \sum_{\omega} \omega_A \sum_{\substack{(n_C)_{C \subseteq \Lambda} \\ n_C \geq 0}} \prod_{C \subseteq \Lambda} \frac{J_C^{n_C}}{n_C!} \omega_C^{n_C} \\
&= \sum_{\substack{(n_C)_{C \subseteq \Lambda} \\ n_C \geq 0}} \prod_{C \subseteq \Lambda} \frac{J_C^{n_C}}{n_C!} \sum_{\omega} \omega_A \prod_{C \subseteq \Lambda} \omega_C^{n_C}.
\end{aligned}$$

La sommation sur  $\omega$  dans la dernière expression est de la forme

$$\sum_{\omega} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{m_i},$$

où les  $m_i$  dépendent des  $n_C$  et de  $A$ . On voit alors aisément que

$$\sum_{\omega} \prod_{i \in \Lambda} \omega_i^{m_i} = \prod_{i \in \Lambda} \sum_{\omega_i = \pm 1} \omega_i^{m_i} \geq 0,$$

puisque  $\sum_{\omega_i = \pm 1} \omega_i^{m_i}$  vaut 2 lorsque  $m_i$  est pair, et 0 lorsque  $m_i$  est impair. Ceci prouve l'affirmation (A.1).

Afin de démontrer (A.2), il est utile de dupliquer le système, c'est-à-dire d'écrire la covariance de la façon suivante :

$$\langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} - \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} \langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \mathbf{J}} = \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}} \otimes \nu_{\Lambda; \mathbf{J}}},$$

la première mesure agissant sur  $\omega$ , et la seconde sur  $\omega'$ , et où l'on a introduit  $\sigma_i(\omega, \omega') = \omega_i$  et  $\sigma'_i(\omega, \omega') = \omega'_i$ . On peut donc écrire

$$(\mathbf{Z}_{\Lambda; \mathbf{J}})^2 \langle \sigma_A (\sigma_B - \sigma'_B) \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}} \otimes \nu_{\Lambda; \mathbf{J}}} = \sum_{\omega, \omega'} \omega_A (\omega_B - \omega'_B) \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{J_C (\omega_C + \omega'_C)}.$$

En introduisant les variables  $\omega''_i \stackrel{\text{déf}}{=} \omega_i \omega'_i = \omega'_i / \omega_i$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega, \omega'} \omega_A (\omega_B - \omega'_B) \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{J_C (\omega_C + \omega'_C)} &= \sum_{\omega, \omega''} \omega_A \omega_B (1 - \omega''_B) \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{J_C (1 + \omega''_C) \omega_C} \\
&= \sum_{\omega''} (1 - \omega''_B) \sum_{\omega} \omega_A \omega_B \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{J_C (1 + \omega''_C) \omega_C}.
\end{aligned}$$

Puisque  $1 - \omega''_B \geq 0$ , il suffit d'appliquer (A.1) à la somme sur  $\omega$  (avec constantes de couplages  $J_C (1 + \omega''_C) \geq 0$ ) pour obtenir (A.2).

La preuve de (A.3) est essentiellement identique. On écrit

$$\begin{aligned}
(\mathbf{Z}_{\Lambda; \mathbf{J}} \mathbf{Z}_{\Lambda; \mathbf{J}'}) \langle \sigma_A - \sigma'_A \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}} \otimes \nu_{\Lambda; \mathbf{J}'}} &= \sum_{\omega, \omega'} (\omega_A - \omega'_A) \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{J_C \omega_C + J'_C \omega'_C} \\
&= \sum_{\omega''} (1 - \omega''_A) \sum_{\omega} \omega_A \prod_{C \subseteq \Lambda} e^{(J_C + J'_C \omega''_C) \omega_C},
\end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment puisque  $J_C + J'_C \omega''_C \geq 0$ . □

### A.1.2 Inégalités FKG

À nouveau, il est utile de considérer une situation substantiellement plus générale.

Soit  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \Xi^n$ ,  $\Xi \subseteq \mathbb{R}$ ,  $n \geq 1$ . On définit<sup>1</sup>  $x \vee y = (x_1 \vee y_1, \dots, x_n \vee y_n)$  et  $x \wedge y = (x_1 \wedge y_1, \dots, x_n \wedge y_n)$ . On écrit  $x \leq y$  lorsque  $x \vee y = y$ , et on dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante si  $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ .

On a alors le résultat suivant :

**Théorème A.1.2.** *Soit  $\mu = \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$  une mesure produit sur  $\mathcal{B}(\Xi^n)$ . Soient  $f_1, \dots, f_4$  des fonctions  $\mu$ -intégrables, positives, sur  $\Xi^n$ , telles que*

$$f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \wedge y)f_4(x \vee y), \quad \forall x, y \in \Xi^n.$$

Alors,

$$\langle f_1 \rangle_\mu \langle f_2 \rangle_\mu \leq \langle f_3 \rangle_\mu \langle f_4 \rangle_\mu.$$

Pour le modèle d'Ising,  $\Xi = \{-1, 1\}$ . En choisissant  $\mu_i(\sigma_i = s) = e^{hs + \beta \sum_{j \notin \Lambda, j \sim i} \bar{\omega}_j s}$ ,  $s = \pm 1$ , pour tout  $i \in \Lambda$ , et notant  $p$  la densité de  $\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}$  par rapport à  $\mu = \bigotimes_{i \in \Lambda} \mu_i$ , on voit que le théorème précédent appliqué aux fonctions

$$f_1(\omega) = p(\omega)f(\omega), \quad f_2(\omega) = p(\omega)g(\omega), \quad f_3(\omega) = p(\omega), \quad f_4(\omega) = p(\omega)f(\omega)g(\omega),$$

( $f$  et  $g$  peuvent être supposées positives sans perte de généralité, sinon il suffit de leur ajouter une constante, ce qui ne change pas leur covariance) implique (2.4) pourvu que

$$p(\omega)p(\omega') \leq p(\omega \vee \omega')p(\omega \wedge \omega').$$

Or, puisque

$$p(\omega) \propto \exp\left(\beta \sum_{\substack{i, j \in \Lambda \\ i \sim j}} \omega_i \omega_j\right),$$

il suffit de vérifier que

$$\omega_i \omega_j + \omega'_i \omega'_j \leq (\omega_i \vee \omega'_i)(\omega_j \vee \omega'_j) + (\omega_i \wedge \omega'_i)(\omega_j \wedge \omega'_j),$$

ce qui se voit immédiatement sur les 16 cas possibles (en fait, moins en utilisant les symétries présentes).

Il reste donc à démontrer le Théorème A.1.2.

*Démonstration du Théorème A.1.2.* L'idée est la suivante. Écrivons  $x = (X, u)$  et  $y = (Y, v)$ , où  $X = (x_1, \dots, x_{n-1})$  et  $Y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ . On va montrer que l'inégalité

$$f_1(x)f_2(y) \leq f_3(x \wedge y)f_4(x \vee y). \quad (\text{A.4})$$

implique l'inégalité

$$\tilde{f}_1(X)\tilde{f}_2(Y) \leq \tilde{f}_3(X \wedge Y)\tilde{f}_4(X \vee Y), \quad (\text{A.5})$$

où  $\tilde{f}_i = \langle f_i(X, \cdot) \rangle_{\mu_n}$ , la moyenne étant prise sur la dernière coordonnée. Par conséquent, en appliquant cet argument  $n$  fois, on obtient l'inégalité recherchée.

Le membre de gauche de (A.5) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \langle f_1(X, u)f_2(Y, v) \rangle_{\mu_n \otimes \mu_n} &= \langle \mathbf{1}_{\{u=v\}} f_1(X, u)f_2(Y, v) \rangle_{\mu_n \otimes \mu_n} \\ &\quad + \langle \mathbf{1}_{\{u < v\}} (f_1(X, u)f_2(Y, v) + f_1(X, v)f_2(Y, u)) \rangle_{\mu_n \otimes \mu_n}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>On utilise les notations standards  $a \vee b \stackrel{\text{déf}}{=} \max(a, b)$  et  $a \wedge b \stackrel{\text{déf}}{=} \min(a, b)$ .

De même, le membre de droite de (A.5) s'écrit

$$\begin{aligned}\langle f_3(X \wedge Y, u) f_4(X \vee Y, v) \rangle_{\mu_n \otimes \mu_n} &= \langle \mathbf{1}_{\{u=v\}} f_3(X \wedge Y, u) f_4(X \vee Y, v) \rangle_{\mu_n \otimes \mu_n} \\ &\quad + \langle \mathbf{1}_{\{u < v\}} (f_3(X \wedge Y, u) f_4(X \vee Y, v) + f_3(X \wedge Y, v) f_4(X \vee Y, u)) \rangle_{\mu_n \otimes \mu_n}.\end{aligned}$$

On voit donc que lorsque  $u = v$ , l'inégalité (A.4) donne immédiatement le résultat désiré. Lorsque  $u < v$ , on pose  $A \stackrel{\text{déf}}{=} f_1(X, u) f_2(Y, v)$ ,  $B \stackrel{\text{déf}}{=} f_1(X, v) f_2(Y, u)$ ,  $C \stackrel{\text{déf}}{=} f_3(X \wedge Y, u) f_4(X \vee Y, v)$  et  $D \stackrel{\text{déf}}{=} f_3(X \wedge Y, v) f_4(X \vee Y, u)$ . Il suffit alors d'observer que (A.4) implique que  $A \leq C$ ,  $B \leq C$  et

$$AB = f_1(X, u) f_2(Y, u) f_1(X, v) f_2(Y, v) \leq f_3(X \wedge Y, u) f_4(X \vee Y, u) f_3(X \wedge Y, v) f_4(X \vee Y, v) = CD.$$

(A.5) sera donc établie si l'on peut montrer que  $A + B \leq C + D$ . Mais ceci est évident puisque

$$(C + D - A - B)/C \geq 1 - (A + B)/C + AB/C^2 = (1 - A/C)(1 - B/C) \geq 0.$$

(Observer que l'inégalité désirée est trivialement satisfaite si  $C = 0$ .)  $\square$

## A.2 Résultats élémentaires sur les fonctions convexes

Dans cette section sont regroupés quelques résultats élémentaires sur les fonctions convexes d'une variable réelle.

**Théorème A.2.1.** *Soit  $I \subseteq \mathbb{R}$  un ouvert, et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe. Alors*

1. *Les dérivées à droite et à gauche,  $\partial^+ f(x)$  et  $\partial^- f(x)$  existent en tout point  $x \in I$ .*
2.  *$\partial^+ f(x) \geq \partial^- f(x)$ , pour tout  $x \in I$ .*
3.  *$\partial^+ f$  et  $\partial^- f$  sont croissantes.*
4.  *$\partial^+ f$  est continue à droite,  $\partial^- f$  est continue à gauche.*
5. *L'ensemble  $\{x : \partial^+ f(x) \neq \partial^- f(x)\}$  est au plus dénombrable.*
6. *Si  $(g_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions convexes de  $I \rightarrow \mathbb{R}$  convergeant ponctuellement vers une fonction  $g$ , alors  $g$  est également convexe. De plus, si  $g$  est dérivable en  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \partial^+ g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial^- g_n(x) = g'(x)$ .*

*Démonstration.* Laissée en exercice.  $\square$

## A.3 Un résultat élémentaire sur les doubles suites

Dans cette section, nous prouvons un résultat élémentaire, mais souvent utile, sur les doubles suites de nombres réels. Nous dirons qu'une double suite  $(a_{m,n})_{m,n \geq 1}$  est croissante si

$$m \leq m', n \leq n' \implies a_{m,n} \leq a_{m',n'},$$

et décroissante si  $(-a_{m,n})_{m,n \geq 1}$  est croissante. La double suite est dite bornée supérieurement (resp. inférieurement) s'il existe  $C < \infty$  telle que  $a_{m,n} \leq C$  (resp.  $a_{m,n} \geq -C$ ), pour tout  $m, n \geq 1$ .

**Lemme A.3.1.** *Soit  $a_{m,n}$  une double suite croissante et bornée supérieurement. Alors*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \sup \{a_{m,n} : m, n \geq 1\}.$$

*Le même résultat est vrai lorsque la double suite est décroissante et bornée inférieurement.*

*Démonstration.*  $a_{m,n}$  étant bornée, le supremum  $s = \sup_{m,n} a_{m,n}$  existe. Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe  $m_0, n_0$  tels que  $a_{m_0, n_0} \geq s - \epsilon$ .  $(a_{m,n})$  étant croissante, on en déduit que

$$s \geq a_{m,n} \geq s - \epsilon, \quad \forall m \geq m_0, n \geq n_0.$$

Par conséquent,  $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{m,n} = s$ .

Pour tout  $m \geq 1$  fixé, la suite  $(a_{m,n})_{n \geq 1}$  est croissante et bornée, et donc convergente ; on note sa limite  $s_m$ .

On fixe  $\epsilon > 0$ . Il existe  $m_1, n_1$  tels que

$$|a_{m,n} - s| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall m \geq m_1, n \geq n_1.$$

Pour  $m$  fixé, on peut également trouver  $n_2(m)$  tel que

$$|a_{m,n} - s_m| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_2(m).$$

Par conséquent,

$$|s_m - s| \leq \epsilon, \quad \forall m \geq m_1,$$

ce qui implique que  $\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s$ . On a donc montré que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{m,n} = \sup \{a_{m,n} : m, n \geq 1\}.$$

Les autres affirmations suivent immédiatement.  $\square$

## A.4 Lemme de Fekete

Dans cette section, nous prouvons le Lemme de Fekete.

**Lemme A.4.1.** Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite de réels positifs satisfaisant la condition suivante de sous-additivité :

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m, \quad \forall m, n \geq 1.$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n \geq 1} \frac{a_n}{n}.$$

*Démonstration.* Soit  $\ell = \inf_{n \geq 1} \{ \frac{a_n}{n} \} \geq 0$ . On fixe  $\epsilon > 0$ , et on choisit  $K$  tel que  $|\frac{a_K}{K} - \ell| \leq \frac{1}{2}\epsilon$ .

En posant  $R = \max \{ \frac{a_n}{K} : n < K \}$ , et on choisissant  $M$  suffisamment grand pour que  $R/M \leq \frac{1}{2}\epsilon$ , on garantit que  $\frac{a_n}{MK} \leq \frac{1}{2}\epsilon$ , pour tout  $n < K$ .

On pose  $N = MK$ , et on considère un  $n \geq N$  arbitraire. On décompose  $n = sK + r$ , avec  $0 \leq r < K$ . Alors

$$\ell \leq \frac{a_n}{n} \leq \frac{sa_K}{sK+r} + \frac{a_r}{sK+r} \leq \frac{a_K}{K} + \frac{a_r}{MK} \leq (\ell + \frac{1}{2}\epsilon) + \frac{1}{2}\epsilon.$$

Par conséquent,  $|\frac{a_n}{n} - \ell| \leq \epsilon$ , pour tout  $n \geq N$ , et l'affirmation suit.  $\square$

*Remarque A.4.1.* Il existe de nombreuses extensions de ce résultat (autorisant, par exemple, à avoir un terme supplémentaire dans le membre de droite de la condition de sous-additivité, dépendant de  $m$  ou de  $m+n$ , pourvu qu'il ne croisse pas trop rapidement).



## Exercices

Dans ce chapitre sont regroupés divers exercices complétant et (espérons-le) clarifiant les notions données au cours.

◊ ◊ ◊

**Exercice 1.** On considère le modèle d'Ising en dimension 2 sur le graphe  $(V_N, E_N^{\text{per}})$ , où  $V_N = \{1, \dots, N\}^2$ . Calculez

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle N^{-2} \sum_{i \in V_N} \sigma_i \rangle_{N; \beta=0, h}, \text{ et } \lim_{N \rightarrow \infty} \langle N^{-2} \sum_{i \in V_N} \sigma_i \rangle_{N; \beta=\infty, h}.$$

◊ ◊ ◊

**Exercice 2.** On considère le modèle d'Ising en dimension 2 sur le graphe  $(V_2, E_2^{\text{per}})$ , où  $V_2 = \{1, 2\}^2$ . Calculez explicitement

$$\langle \left| \frac{1}{4} \sum_{i \in V_2} \sigma_i \right| \rangle_{2; \beta, h}.$$

Esquissez les graphe de  $\langle \left| \frac{1}{4} \sum_{i \in V_2} \sigma_i \right| \rangle_{2; \beta, h=0}$  (comme fonction de  $\beta$ ) et  $\langle \left| \frac{1}{4} \sum_{i \in V_2} \sigma_i \right| \rangle_{2; \beta=1, h}$  (comme fonction de  $h$ ).

◊ ◊ ◊

**Exercice 3.** i) On considère le modèle d'Ising sur le graphe  $(V_N, E_N^{\text{per}})$ , où  $V_N = \{1, \dots, N\}^d$ . Montrez que la propriété de Markov est satisfaite, c'est-à-dire que, pour tout  $s \in \Omega_N$ ,

$$\mu_{N; \beta}(\sigma_i = s_i \mid \sigma_j = s_j, \forall j \neq i) = \frac{\exp(s_i(h + \beta \sum_{j \sim i} s_j))}{\exp(h + \beta \sum_{j \sim i} s_j) + \exp(-h - \beta \sum_{j \sim i} s_j)}.$$

ii) Soient  $\Delta \subseteq \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ . Vérifier que pour toutes configurations  $\bar{\omega} \in \Omega$  et  $\omega' \in \Omega_\Lambda$ , on a

$$\mu_{\Lambda; \beta, h}^{\bar{\omega}}(\cdot \mid \sigma_{|\Lambda \setminus \Delta} = \omega'_{|\Lambda \setminus \Delta}) = \mu_{\Delta; \beta, h}^{\omega' \bar{\omega}}(\cdot).$$

◊ ◊ ◊

**Exercice 4.** Montrer que les fonctions suivantes sont croissantes :  $n_i$ ,  $n_A$ ,  $\sum_{i \in A} n_i - n_A$  ( $i \in \mathbb{Z}^d$ ,  $A \Subset \mathbb{Z}^d$ ).

◇ ◇ ◇

**Exercice 5.** On considère le modèle d'Ising en dimension 1, avec Hamiltonien

$$\mathcal{H}_{N;\beta,h}^{\text{per}}(\omega) = - \sum_{1 \leq i \leq N} (\beta \sigma_i(\omega) \sigma_{i+1}(\omega) + h \sigma_i(\omega)),$$

où  $\sigma_{N+1} \equiv \sigma_1$  (condition au bord périodique).

i) En introduisant la matrice de transfert

$$T = \begin{pmatrix} e^{\beta+h} & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^{\beta-h} \end{pmatrix},$$

montrer que la fonction de partition peut être réécrite sous la forme

$$Z_{N;\beta,h}^{\text{per}} = \sum_{\omega \in \Omega_N} e^{-\mathcal{H}_{N;\beta,h}^{\text{per}}(\omega)} = \text{Tr}(T^N),$$

où  $\text{Tr}(A)$  est la trace de la matrice  $A$ .

ii) Calculer l'énergie libre,  $f(\beta, h) = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N^{\text{per}}(\beta, h)$ , où

$$f_N^{\text{per}}(\beta, h) = \frac{1}{N} \log Z_{N;\beta,h}^{\text{per}}.$$

iii) Montrer que

$$\langle \sigma_1 \rangle_{N;\beta,h}^{\text{per}} = \langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \rangle_{N;\beta,h}^{\text{per}} = \frac{\partial}{\partial h} f_N^{\text{per}}(\beta, h).$$

iv) Calculer  $\langle \sigma_1 \rangle_{\beta,h} = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_1 \rangle_{N;\beta,h}^{\text{per}}$ .

◇ ◇ ◇

**Exercice 6.** Le but de cet exercice est d'étudier le modèle d'Ising sur le graphe complet. Soit  $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ , et  $\sigma_i : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}$ ,  $\sigma_i(\omega) = \omega_i$  l'ensemble des spins associés. L'Hamiltonien  $\mathcal{H}_n : \Omega_n \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par

$$\mathcal{H}_{n;\beta,h} = -\frac{\beta}{2n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i \sigma_j - h \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

On considère la mesure de Gibbs sur  $\Omega_n$  associée à cet Hamiltonien,

$$\mu_{n;\beta,h}(\omega) = \frac{1}{Z_{n;\beta,h}} e^{-\mathcal{H}_{n;\beta,h}(\omega)}.$$

- i) Déterminer la distribution de l'aimantation  $m_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i$ .
- ii) Soient  $s : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions définies par

$$s(x) = -\frac{1+x}{2} \log \frac{1+x}{2} - \frac{1-x}{2} \log \frac{1-x}{2}, \quad f(x) = s(x) + \frac{\beta x^2}{2} + hx.$$

Faire une étude détaillée de la fonction  $f$  en fonction des paramètres  $\beta$  et  $h$ . (Le but de cette partie étant d'obtenir des résultats qui seront nécessaires pour faire les parties iv) et vi), il est peut-être préférable de faire la partie ii) en même temps que les parties iv) et vi).)

- iii) Utiliser la formule de Stirling :  $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1 + O(\frac{1}{n}))$ , pour montrer qu'il existe  $0 < c_1, c_2 < \infty$  telles que

$$c_1 n^{-1/2} e^{ns(x_k)} \leq \binom{n}{k} \leq c_2 n^{1/2} e^{ns(x_k)}, \quad (\text{B.1})$$

uniformément en  $x_k = -1 + \frac{2k}{n} \in [-1, 1]$ . En déduire que

$$c_1 n^{-1/2} e^{nf(x_k)} \leq \sum_{\omega: m_n(\omega) = x_k} e^{\frac{n\beta}{2} m_n(\omega)^2 + nhm_n(\omega)} \leq c_2 n^{1/2} e^{nf(x_k)}. \quad (\text{B.2})$$

- iv) En utilisant les propriétés de  $f$  établies précédemment, montrer que

$$n \left| \max_{x \in [-1, 1]} f(x) - \max_{0 \leq k \leq n} f(x_k) \right| \leq \text{const.}$$

En utilisant (B.2), en déduire qu'il existe  $0 < c_3 < \infty$  telle que

$$c_3 n^{-1/2} e^{n \max_{x \in [-1, 1]} f(x)} \leq Z_n \leq (n+1) c_2 n^{1/2} e^{n \max_{x \in [-1, 1]} f(x)}. \quad (\text{B.3})$$

- v) Soit  $-1 \leq a < b \leq 1$ . Montrer que

$$\left| \frac{1}{n} \log \mu_n(m_n \in [a, b]) - \left( \max_{x \in [a, b]} f(x) - \max_{x' \in [-1, 1]} f(x') \right) \right| = O\left(\frac{\log n}{n}\right). \quad (\text{B.4})$$

- vi) Soit  $\mathcal{M}(\beta, h)$  l'ensemble des maxima globaux de  $f$ , et soit

$$\mathcal{M}_\epsilon = \left\{ x \in [-1, 1] : \min_{y \in \mathcal{M}(\beta, h)} |x - y| \leq \epsilon \right\}.$$

Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(m_n \notin \mathcal{M}_\epsilon(\beta, h)) < 0. \quad (\text{B.5})$$

En déduire que la loi des grands nombres pour l'aimantation est vérifiée lorsque  $h \neq 0$ , et lorsque  $h = 0$  et  $\beta \leq 1$ , mais qu'elle est violée lorsque  $h = 0$  et  $\beta > 1$ .

- vii) Esquissez le graphe de l'aimantation du système infini comme fonction de  $h$  lorsque  $\beta \leq 1$  et lorsque  $\beta > 1$ .

◊    ◊    ◊

**Exercice 7.** Compléter la partie de la preuve du Théorème 3.3.1 concernant l'existence de la limite thermodynamique de l'énergie libre avec condition au bord libre le long d'une suite de boîtes  $\Lambda_n \uparrow \mathbb{Z}^d$  arbitraire.

◊    ◊    ◊

**Exercice 8.** Soit  $\Lambda$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}^d$ , et  $\mathbf{J} = (J_A)_{A \subseteq \Lambda}$ , une famille de nombres réels **positifs**. On considère la mesure de probabilité suivante sur  $(\Omega_\Lambda, \mathcal{F}_\Lambda)$  :

$$\nu_{\Lambda; \mathbf{J}}(\omega) = \frac{1}{Z_{\Lambda; \mathbf{J}}} \exp \left\{ \sum_{C \subseteq \Lambda} J_C \omega_C \right\},$$

où l'on a utilisé la notation  $\omega_C = \prod_{i \in C} \omega_i$ . Une version générale des inégalités GKS est valable pour cette classe de mesures (*cf.* Théorème A.1.1). En particulier,

$$\langle \sigma_A \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}}} \geq 0, \quad \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}}} \geq \langle \sigma_A \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}}} \langle \sigma_B \rangle_{\nu_{\Lambda; \mathbf{J}}},$$

pour tout  $A, B \subseteq \Lambda$ .

- 
- i) En déduire que  $\langle \sigma_A \rangle_{\nu_{\Lambda}, \mathbf{J}}$  est croissante en  $J_B$ , pour tout  $A, B \subseteq \Lambda$ .
- ii) Montrer que la mesure de Gibbs du modèle d'Ising avec conditions au bord + ou libre, et paramètres  $\beta \geq 0$  et  $h \geq 0$ , peut s'écrire sous cette forme pour des choix appropriés de  $\mathbf{J}$ .
- iii) Montrer que la suite de mesures  $\mu_{\Lambda}^{\emptyset}$  converge lorsque  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$ , et que la mesure limite est invariante sous les translations.
- iv) Soit  $h \geq 0$ . Montrer que  $\langle \sigma_A \rangle_{\beta, h}^+$  est une fonction croissante de la dimension du réseau.
- v) Soit  $h \geq 0$ . Montrer que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^+$  est continue à droite comme fonction de  $\beta$ , et que  $\langle \sigma_0 \rangle_{\beta, h}^{\emptyset}$  est continue à gauche comme fonction de  $\beta$ . (Indication : utiliser le Lemme A.3.1.)

◊ ◊ ◊

**Exercice 9.** Adapter l'argument de Peierls au cas du modèle de Potts. On se contentera de vérifier qu'il existe  $\beta_0(q) < \infty$  tel que  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\Lambda_n; \beta, q}^{\text{Potts}; 1}(\sigma_0 = 1) > \frac{1}{q}$ , pour tout  $\beta > \beta_0(q)$ , où  $\mathbb{P}_{\Lambda_n; \beta, q}^{\text{Potts}; 1}$  est la mesure du modèle de Potts à  $q$  états, dans la boîte  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^2$  avec condition au bord 1, à température inverse  $\beta$ . Observez que cela implique que la symétrie sous permutation des  $q$  états est brisée à basse température.

◊ ◊ ◊

**Exercice 10.** Étendre la représentation haute température à  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+$  et  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^{\emptyset}$ .

En déduire qu'il existe  $c = c(\beta) > 0$  tel que  $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\beta, 0} \leq \frac{1}{c} e^{-c\|j-i\|_2}$ , pour tout  $i, j \in \mathbb{Z}^d$ , pour tout  $\beta$  suffisamment petit.

◊ ◊ ◊

**Exercice 11.** Vérifier que les valeurs (complexes) du champ magnétique  $h$  pour lesquelles l'énergie libre du modèle d'Ising unidimensionnel (calculée dans l'Exercice 5) est singulière sont toutes purement imaginaires, et qu'elles tendent de 0 lorsque  $\beta \rightarrow +\infty$ .

◊ ◊ ◊

**Exercice 12.** Montrer que les mesures limites  $\mathbb{P}_{p, q}^{\emptyset} \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_{\Lambda; p, q}^{\emptyset}$  et  $\mathbb{P}_{p, q}^w \stackrel{\text{déf}}{=} \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}_{\Lambda; p, q}^w$  existent, sont indépendantes de la suite  $\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d$  choisie, et sont invariantes sous l'action du groupe des translations de  $\mathbb{Z}^d$ .

◊ ◊ ◊

**Exercice 13.** Soient  $\beta \in [0, \infty]$  et  $p_{\beta} \stackrel{\text{déf}}{=} 1 - e^{-2\beta}$ . Montrer que, pour tout  $i, j \in \Lambda$ ,

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \mathbb{P}_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+; p_{\beta}, 2}^w(i \leftrightarrow j).$$

Montrer que, pour tout  $B \subseteq \Lambda$ ,

$$\langle \sigma_B \rangle_{\Lambda; \beta, 0}^+ = \mathbb{P}_{\mathcal{E}_{\Lambda}^+; p_{\beta}, 2}^w(|B \cap C| \text{ est pair pour tout amas fini } C).$$

◊ ◊ ◊

**Exercice 14.** Démontrer le Corollaire 6.4.1.

◊ ◊ ◊

**Exercice 15.** Adapter la représentation en courants aléatoires au cas de la condition au bord +.

◊ ◊ ◊

**Exercice 16.** Démontrer la seconde partie du Lemme 7.2.1 (Switching Lemma).

◊ ◊ ◊

**Exercice 17.** Montrer qu'en dimension 2, pour tout  $\beta > \beta_c$ , il existe  $K = K(\beta)$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{\Lambda_n, \beta, 0}^+ (\text{il existe un contour de diamètre supérieur à } K \log n) = 0,$$

où,  $\Lambda_n = \{-n, \dots, n\}^2$ . On admettra la validité de l'hypothèse  $H_{p_\beta, q}$  (cf. p. 51) pour le modèle d'Ising avec  $\beta < \beta_c$ . (Idée : passer à la représentation FK et utiliser la dualité ; que peut-on dire de l'état des arêtes d'un contour dans la configuration FK duale associée?).

◊ ◊ ◊

**Exercice 18.** Donner une preuve alternative de l'unicité de la mesure de Gibbs du modèle d'Ising en volume infini lorsque  $h \neq 0$ , en utilisant la concavité de l'aimantation pour  $h \geq 0$  qui suit de l'inégalité GHS. (Idée : la concavité implique la continuité ; on conclut en utilisant les résultats établis au chapitre 3.)

◊ ◊ ◊

**Exercice 19.** Démontrer que la masse  $\xi_\beta$  du modèle d'Ising est une fonction convexe sur  $\mathbb{R}^d$ . En déduire qu'il s'agit d'une norme sur  $\mathbb{R}^d$  lorsque  $\beta < \beta_c$ .



# Bibliographie

- [1] M. Aizenman. Translation invariance and instability of phase coexistence in the two-dimensional Ising system. *Comm. Math. Phys.*, 73(1) :83–94, 1980.
- [2] M. Aizenman. Geometric analysis of  $\varphi^4$  fields and Ising models. I, II. *Comm. Math. Phys.*, 86(1) :1–48, 1982.
- [3] M. Aizenman and D. J. Barsky. Sharpness of the phase transition in percolation models. *Comm. Math. Phys.*, 108(3) :489–526, 1987.
- [4] M. Aizenman, D. J. Barsky, and R. Fernández. The phase transition in a general class of Ising-type models is sharp. *J. Statist. Phys.*, 47(3-4) :343–374, 1987.
- [5] M. Aizenman and R. Fernández. On the critical behavior of the magnetization in high-dimensional Ising models. *J. Statist. Phys.*, 44(3-4) :393–454, 1986.
- [6] A. Bakchich, A. Benyoussef, and L. Laanait. Phase diagram of the Potts model in an external magnetic field. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 50(1) :17–35, 1989.
- [7] T. Bodineau. Translation invariant Gibbs states for the Ising model. *Probab. Theory Related Fields*, 135(2) :153–168, 2006.
- [8] B. Bollobás. *Modern graph theory*, volume 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [9] M. Campanino, D. Ioffe, and Y. Velenik. Ornstein-zernike theory for finite-range ising models above  $t_c$ . *Probab. Theory Relat. Fields*, 125(3) :305–349, 2003.
- [10] J. B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.
- [11] R. L. Dobrushin. Gibbs states describing a coexistence of phases for the three-dimensional ising model. *Th. Prob. and its Appl.*, 17(3) :582–600, 1972.
- [12] R. L. Dobrushin and S. B. Shlosman. Absence of breakdown of continuous symmetry in two-dimensional models of statistical physics. *Comm. Math. Phys.*, 42 :31–40, 1975.
- [13] F. Dunlop. Zeros of partition functions via correlation inequalities. *J. Statist. Phys.*, 17(4) :215–228, 1977.
- [14] R. G. Edwards and A. D. Sokal. Generalization of the Fortuin-Kasteleyn-Swendsen-Wang representation and Monte Carlo algorithm. *Phys. Rev. D* (3), 38(6) :2009–2012, 1988.
- [15] M. E. Fisher. On the dimer solution of planar ising models. *J. Math. Phys.*, 7 :1776–1781, 1966.
- [16] C. M. Fortuin and P. W. Kasteleyn. On the random-cluster model. I. Introduction and relation to other models. *Physica*, 57 :536–564, 1972.
- [17] C. M. Fortuin, P. W. Kasteleyn, and J. Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.*, 22 :89–103, 1971.

- [18] S. Friedli and C.-É. Pfister. On the singularity of the free energy at a first order phase transition. *Comm. Math. Phys.*, 245(1) :69–103, 2004.
- [19] H.-O. Georgii. *Gibbs measures and phase transitions*, volume 9 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.
- [20] H.-O. Georgii, O. Häggström, and C. Maes. The random geometry of equilibrium phases. In *Phase transitions and critical phenomena, Vol. 18*, volume 18 of *Phase Transit. Crit. Phenom.*, pages 1–142. Academic Press, San Diego, CA, 2001.
- [21] R. B. Griffiths. Correlation in Ising ferromagnets I, II. *J. Math. Phys.*, 8 :478–489, 1967.
- [22] R. B. Griffiths, C. A. Hurst, and S. Sherman. Concavity of magnetization of an Ising ferromagnet in a positive external field. *J. Mathematical Phys.*, 11 :790–795, 1970.
- [23] G. Grimmett. *Percolation*, volume 321 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1999.
- [24] G. Grimmett. *The random-cluster model*, volume 333 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [25] Y. Higuchi. On the absence of non-translation invariant Gibbs states for the two-dimensional Ising model. In *Random fields, Vol. I, II (Esztergom, 1979)*, volume 27 of *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 517–534. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [26] M. Huber. A bounding chain for Swendsen-Wang. *Random Structures Algorithms*, 22(1) :43–59, 2003.
- [27] D. Ioffe, S. Shlosman, and Y. Velenik. 2d models of statistical physics with continuous symmetry : The case of singular interactions. *Comm. Math. Phys.*, 226(2) :433–454, 2002.
- [28] S. N. Isakov. Nonanalytic features of the first order phase transition in the Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 95(4) :427–443, 1984.
- [29] E. Ising. Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. *Zeit. für Physik*, 31 :253–258, 1925.
- [30] R. B. Israel. *Convexity in the theory of lattice gases*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979. Princeton Series in Physics, With an introduction by Arthur S. Wightman.
- [31] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice : I. the number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27 :1209–1225, 1961.
- [32] D. G. Kelly and S. Sherman. General Griffiths’s inequality on correlation in Ising ferromagnets. *J. Math. Phys.*, 9 :466–484, 1968.
- [33] R. Kindermann and J. L. Snell. *Markov random fields and their applications*, volume 1 of *Contemporary Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [34] R. Kotecký and S. B. Shlosman. First-order phase transitions in large entropy lattice models. *Comm. Math. Phys.*, 83(4) :493–515, 1982.
- [35] L. Laanait, A. Messager, S. Miracle-Solé, J. Ruiz, and S. Shlosman. Interfaces in the Potts model. I. Pirogov-Sinai theory of the Fortuin-Kasteleyn representation. *Comm. Math. Phys.*, 140(1) :81–91, 1991.
- [36] T. D. Lee and C. N. Yang. Statistical theory of equations of state and phase transitions. ii. lattice gas and ising model. *Phys. Rev.*, 87(3) :410–419, 1952.
- [37] Elliott H. Lieb. A refinement of Simon’s correlation inequality. *Comm. Math. Phys.*, 77(2) :127–135, 1980.
- [38] Oliver A. McBryan and Jay Rosen. Existence of the critical point in  $\phi^4$  field theory. *Comm. Math. Phys.*, 51(2) :97–105, 1976.
- [39] B. McCoy and T. T. Wu. *The Two-Dimensional Ising Model*. Harvard University Press, 1973.

- [40] L. Onsager. Crystal statistics, i. a two-dimensional model with an order-disorder transition. *Phys. Rev.*, 65 :117–149, 1944.
- [41] R. E. Peierls. On Ising’s ferromagnet model. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 32 :477–481, 1936.
- [42] C.-E. Pfister. Large deviations and phase separation in the two-dimensional Ising model. *Helv. Phys. Acta*, 64(7) :953–1054, 1991.
- [43] C.-E. Pfister and Y. Velenik. Large deviations and continuum limit in the 2D Ising model. *Probab. Theory Related Fields*, 109(4) :435–506, 1997.
- [44] C.-E. Pfister and Y. Velenik. Interface, surface tension and reentrant pinning transition in the 2D Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 204(2) :269–312, 1999.
- [45] C. É. Pfister. On the symmetry of the Gibbs states in two-dimensional lattice systems. *Comm. Math. Phys.*, 79(2) :181–188, 1981.
- [46] S. A. Pirogov and Y. G. Sinai. Phase diagrams of classical lattice systems. *Teoret. Mat. Fiz.*, 25(3) :358–369, 1975.
- [47] J. G. Propp and D. B. Wilson. Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Random Structures and Algorithms (Atlanta, GA, 1995)*, volume 9, pages 223–252, 1996.
- [48] B. Prum. *Processus sur un réseau et mesures de Gibbs*. Techniques Stochastiques. [Stochastic Techniques]. Masson, Paris, 1986. Applications.
- [49] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.
- [50] D. Ruelle. *Statistical mechanics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999. Rigorous results, Reprint of the 1989 edition.
- [51] B. Simon. Correlation inequalities and the decay of correlations in ferromagnets. *Comm. Math. Phys.*, 77(2) :111–126, 1980.
- [52] B. Simon. *The statistical mechanics of lattice gases. Vol. I*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [53] Y. G. Sinai. *Theory of phase transitions : rigorous results*, volume 108 of *International Series in Natural Philosophy*. Pergamon Press, Oxford, 1982. Translated from the Russian by J. Fritz, A. Krámli, P. Major and D. Szász.
- [54] C. N. Yang. The spontaneous magnetization of the two-dimensional Ising model. *Phys. Rev.*, 85 :808–816, 1952.
- [55] M. Zahradník. An alternate version of Pirogov-Sinai theory. *Comm. Math. Phys.*, 93(4) :559–581, 1984.