M1 ELASTICITE

I.- INTRODUCTION

Lorsqu'un corps est soumis à des contraintes externes, celui-ci subit des déformations qui dépendent de l'intensité de ces contraintes. Si ces dernières sont faibles, on observe expérimentalement que les déformations sont proportionnelles aux tensions appliquées. La constante de proportionnalité est une caractéristique du matériau et du type de déformation subi par celui-ci.

II.- THEORIE

La théorie de l'élasticité classique repose sur trois hypothèses :

la réversibilité des déformations en fonction des contraintes dans un domaine de contrainte: les corps sont supposés parfaitement élastiques;

l'isotropie du corps considéré: les propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace;

la linéarité: les corps sont supposés élastiques linéaires; les déformations sont proportionnelles aux forces appliquées; ces corps satisfont à la loi expérimentale de HOOKE.

Avec ces trois hypothèses, la déformation d'un élément de volume ΔV sous un état de tension quelconque, est la superposition de deux déformations fondamentales : **l'allongement et le cisaillement**.

ALLONGEMENT

Une tension normale unique produit deux effets (figure 1) :

un allongement spécifique:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \text{avec } \Delta L = L' - L$$

une contraction latérale :

$\Delta d = d' - d$

Dans la limite de proportionnalité, l'allongement spécifique et la contraction latérale sont proportionnels à la tension σ; c'est le premier aspect de la loi de HOOKE

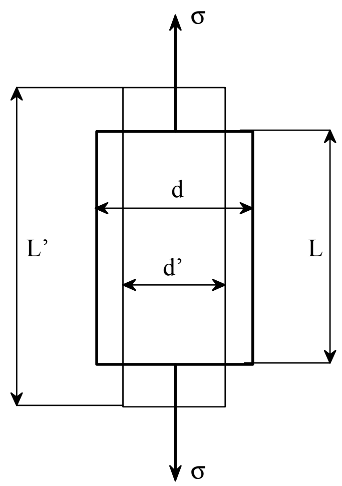


Figure 1

(1) $\sigma = E\,\varepsilon$ E est le module d'élasticité ou module de YOUNG $[E] = N\ m^{-2}$

(2) $\frac{\Delta d}{d} = \alpha\,\varepsilon$ α est le nombre de POISSON

CISAILLEMENT

La déformation produite par les tensions τ résultant d'un couple de forces tangentielles est le cisaillement pur. Elle se traduit par une déformation angulaire dont l'angle γ est proportionnel à τ ; c'est le second aspect de la loi de HOOKE :

(3) $\tau = G \cdot \gamma$

G est le module de cisaillement ou module de COULOMB. $[G] = N\ m^{-2}$

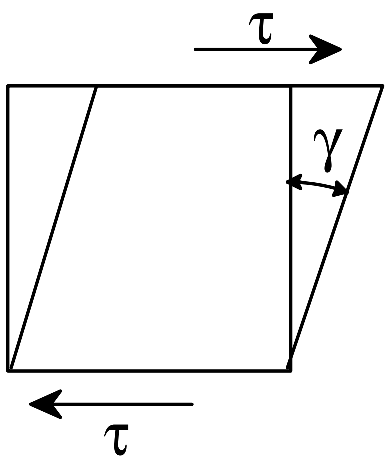


Figure 2

Les trois constante E,G, et α ne sont pas indépendantes, mais sont reliés par :

(4) $$G = \frac{E}{2(1+\alpha)}$$

Le nombre de POISSON α vaut approximativement 1/3 pour les métaux et est toujours inférieur à 1/2 pour tous les corps isotropes.

III.- EXPERIENCES

A) Allongement d'un fil

En admettant que la force F est répartie uniformément sur toute la surface S, chaque élément de surface est alors soumis à une tension normale:

(5) $$\sigma = \frac{F}{S}$$

L'allongement spécifique du fil est donné par :

(6) $$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{ES}$$

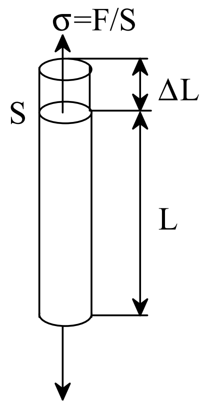


Figure 3

B) Torsion d'un fil cylindrique

Considérons un fil cylindrique de rayon R et de longueur L soumis à un moment de torsion M dont la direction est parallèle à l'axe du fil.

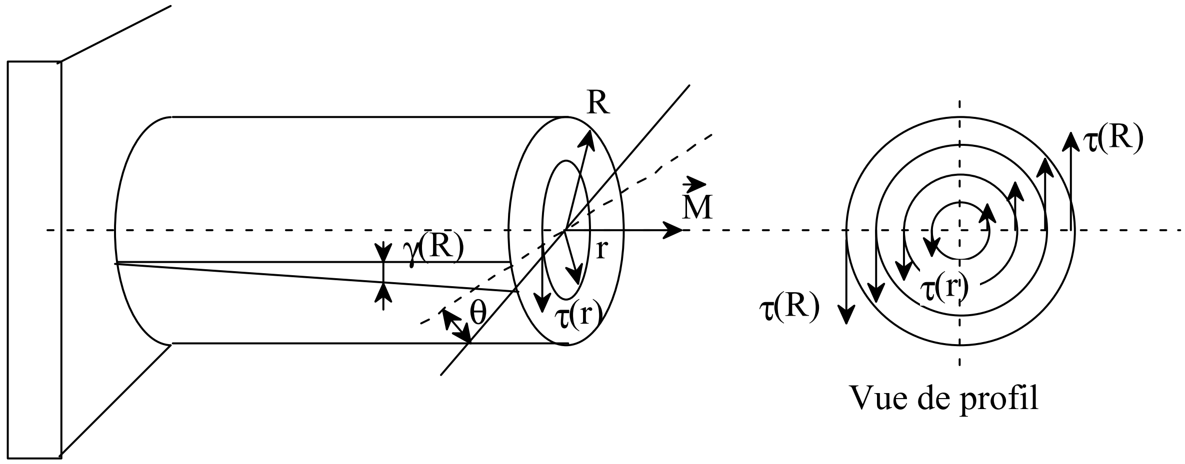


Figure 4

l'effet de torsion, résultant du moment M, est à l'origine d'un effet de cisaillement et la loi de Hooke s'écrit :

(7) $$\tau = G \cdot \gamma(r)$$

La déformation $\gamma(r)$ est relié à la torsion θ de l'extrémité par la relation

(8) $$\gamma(r) = \frac{r}{L}\theta$$

le moment appliqué M étant la somme de tous les moments élémentaires agissant sur la section S, M est donné par:

(9) $$M = \int_S r\ \tau(r)\ dS$$

une fois l'intégrale résolue, on trouve

(10) $$M = \frac{\pi G R^4}{2L}\theta$$

Il faut remarquer que la rigidité de torsion d'un fil cylindrique augmente avec la $4^{ème}$ puissance du rayon du fil et qu'elle ne dépend que du module de cisaillement, la déformation étant un cisaillement pur.

C) Flexion d'une barre

Considérons une barre de section S et de longueur L encastrée à une extrémité et soumise à l'autre extrémité à une force F. Dans ce calcul on néglige le poids de la barre. Cette force F provoquera un moment de force par rapport au point de fixation de la barre. Ce moment de force est responsable de la flexion de la barre. La figure 5 montre le comportement de la barre. La partie supérieure de celle-ci est allongée (effort de traction) tandis que la partie inférieure est comprimée. Il existe au centre de la barre, une ligne imaginaire (la fibre neutre) qui ne subit pas de déformation..

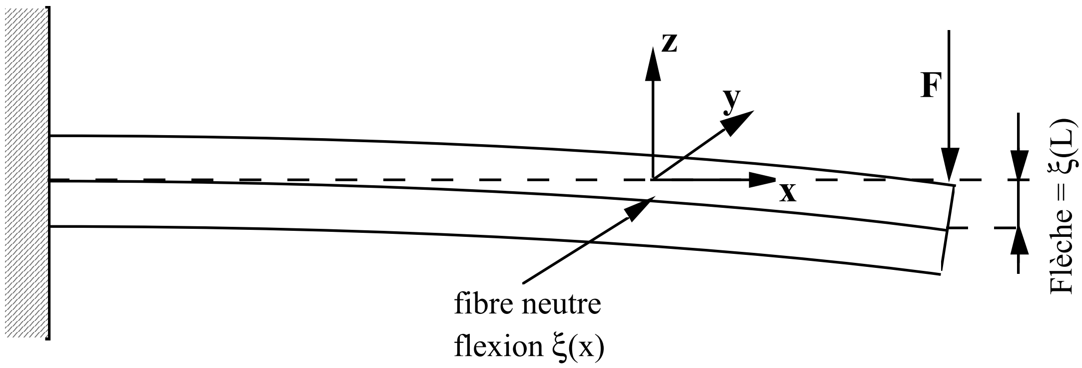


Figure 5

La flexion de la barre, qui s'exprime à l'aide du déplacement maximal ξ_{max}, vaut :

(11) $$\xi_{max} = \xi(L) = \frac{FL^3}{3EI}$$

où E est le module d'élasticité et I le moment d'inertie axial de la section.

Un calcul de moment d'inertie axial, pour une section rectangulaire, est montré ci-dessous :

$$I = \int_S z^2 dS = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2 dz = \frac{ab^3}{12}$$

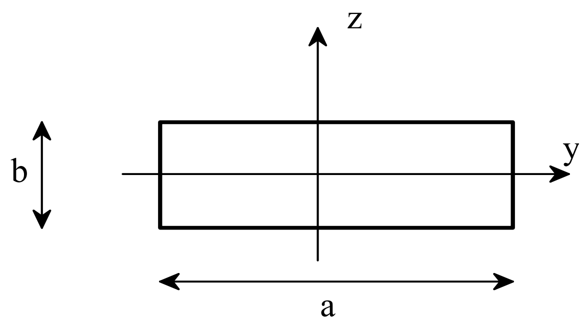


figure 6

IV.- MANIPULATIONS.

Module d'élasticité E déterminé avec l'allongement d'un fil de 32cm et de diamètre 0.2mm.

a) Suspendre au fil des masses m de 0.200 à 1.400 kg et mesurer l'allongement ΔL.

b) Tracer le graphique de l'allongement spécifique $\varepsilon=\Delta L/L$ en fonction de la tension appliquée $\sigma=F/S=mg/S$ où S est la section du fil.

c) A partir de ce graphique, déterminer le module d'élasticité de l'acier.

Module d'élasticité E du laiton déterminé avec la mesure de la flèche d'une barre en laiton de 410mm de longueur.

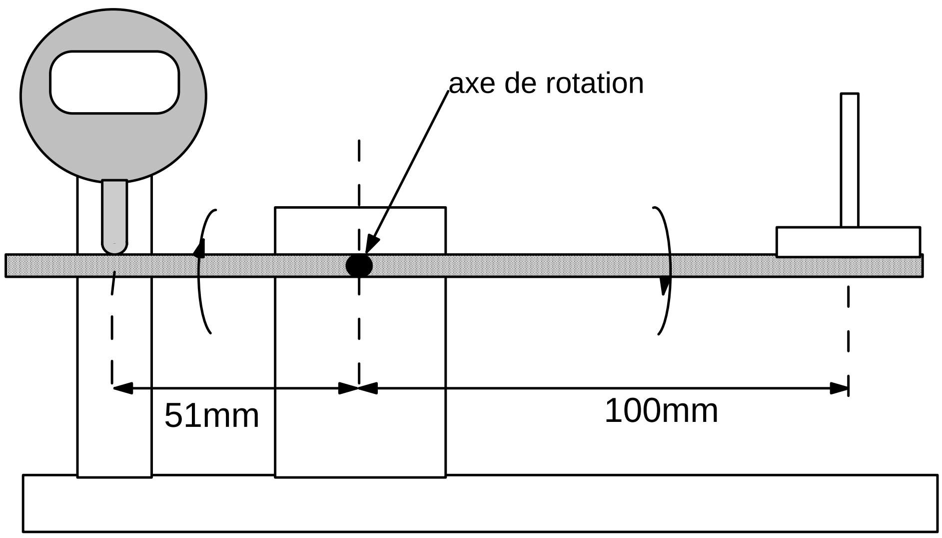
Mesurer les dimensions (largeur et épaisseur) de la barre en laiton

a) Mesurer la flèche d'une barre de laiton de section rectangulaire en fonction de la force appliquée.

b) Tracer le graphique de la flèche en fonction de la force.

c) A partir de ce graphique, déterminer le module d'élasticité du laiton.

Module de cisaillement de l'acier déterminé avec la mesure de la torsion d'une barre cylindrique d'acier d'une longueur de 200mm et d'un diamètre de 4mm.



a) Mesurer l'angle de torsion de la barre avec des masses de 0.050 à 0.400 kg. Calculer l'angle en radian à partir de la mesure de la déviation verticale, mesurée par le comparateur, provenant de la rotation de la barre.

b) Tracer le graphique de l'angle θ (θ en radians) en fonction du moment de force $M=Fd$ où F est la force appliquée ($F=mg$) et d la distance au point de rotation (100mm).

c) A partir de ce graphique, déterminer le module de cisaillement de l'acier.

d) Calculer le nombre de POISSON de l'acier.

Exemples de modules d'élasticité et de cisaillement

Matière	**Module d'élasticité (N/m^2)**	**Module de cisaillement (N/m^2)**
Acier	$2.0\ 10^{11}$	$8\ 10^{10}$
Laiton	$1.1\ 10^{11}$	$4.2\ 10^{10}$
Bronze	$1.1\ 10^{11}$	$4.2\ 10^{10}$
Aluminium	$6.3\ 10^{10}$	$2.5\ 10^{10}$