LES QUADRILATERES

Résumé	Le but de cette activité est de construire tous les quadrilatères réguliers par pliage à partir d'un carré, puis de démontrer que les figures obtenues sont correctes en utilisant diverses propriétés ou définitions ayant trait à la géométrie.
Degrés concernés	6 P à 8 CO
Enoncé destiné aux élèves	Lorsqu'on plie un carré en deux on peut obtenir un rectangle. Quels sont les autres quadrilatères que l'on peut obtenir en pliant plusieurs fois un carré ? (*oral*)
Matériel	1ère partie : Feuilles carrées (15 x 15 cm) 2ème partie : Les figures obtenues lors de la première partie Une feuille A 4 Crayon, gomme
Durée	3 x 45 minutes
Proposition de déroulement	**<u>1ère partie :</u>** Annoncer que l'on va travailler sur les quadrilatères. Lister les 7 quadrilatères (sans spécifier leurs propriétés qui seront rappelées et utilisées lors de la preuve) : carré, cerf volant, fer de lance, losange, parallélogramme, rectangle, trapèze. Distribuer la consigne et les feuilles carrées. Laisser les élèves prendre connaissance de la consigne et tenter de résoudre le problème proposé. A ce stade il n'est pas nécessaire de mettre les élèves en groupe : ils doivent tous essayer. Après 10 minutes environ, si nécessaire, proposer une première mise en commun intermédiaire pour faire l'inventaire des formes obtenues (cela permet d'enlever toutes les formes qui ne sont pas des quadrilatères). Mise en commun de la première partie de l'activité : répertorier les figures obtenues. (voir élément pour la synthèse : fin de la 1ère partie). Les élèves expliquent comment ils ont obtenu leurs figures et les élèves qui ne les ont pas obtenues les fabriquent après avoir choisi les figures qui ont le moins de plis. **<u>2ème partie :</u>** Annoncer aux élèves que l'on va essayer de prouver que les figures obtenues lors de la séance précédente sont correctes. Prendre le rectangle en collectif. (voir élément pour la synthèse : fin de la 2ème partie)

	Ensuite proposer aux élèves de travailler en groupe (le maitre établira des groupes homogènes de 2 ou 3 élèves afin qu'ils puissent confronter leurs idées. Le maitre « assistera » davantage les groupes comprenant des élèves en grande difficulté.) Chaque groupe travaillera sur le cerf volant. **Mise en commun** : discuter des diverses propositions des élèves afin d'arriver à une preuve. (voir élément pour la synthèse : fin de la 2ème partie) **Relance** : Demander ensuite de prouver que les figures restantes sont correctes (ne pas distribuer le losange qui pourra servir d'évaluation finale). Distribuer les figures de façon à ce que plusieurs groupes aient la même figure à expliquer pour qu'il puisse y avoir confrontation des explications. **Mise en commun** : chaque groupe soumet sa proposition et la classe discute de la validité des propositions. Enfin, individuellement, proposer de prouver que le losange est correct.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Résolution : On peut obtenir tous les quadrilatères réguliers (voir *élément pour la synthèse : fin de la 1ère partie*) Preuves (voir *élément pour la synthèse : fin de la 2ème partie*)
Référence aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Reconnaitre, décrire et nommer des surfaces selon leur forme (symétries internes, côtés, angles, diagonales) Reconnaitre et vérifier le parallélisme ou la perpendicularité de deux droites (règle et équerre) Tracer des droites parallèles ou perpendiculaires (règle et équerre) Repérer les axes de symétrie d'une figure Je n'ai pas les plans d'études, ni les moyens d'enseignements du CO. Il faudra donc **compléter**.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Quadrilatères Propriétés des quadrilatères Angles Triangles et leurs propriétés Triangles semblables
Développement possibles	- Ecrire le mode d'emploi pour faire la figure obtenue - Quelles autres figures géométriques peux-tu obtenir en pliant une feuille carrée ?

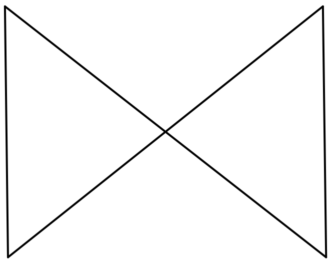
ENONCE DE L'ELEVE *(Il peut être noté au tableau noir plutôt que distribuer aux élèves)*

Lorsqu'on plie un carré en deux on peut obtenir un rectangle. Quels sont les autres quadrilatères que l'on peut obtenir en pliant plusieurs fois un carré ?

ELEMENTS THEORIQUES :

1) Rappel des définitions des quadrilatères

On décrit souvent un polygone par la suite ordonnée de ses sommets, ici ABCD. Nous ne considérerons que les polygones dont les arêtes ne se coupent qu'aux sommets donnés. Cela évite le papillon : cas où les arêtes s'intersectent.

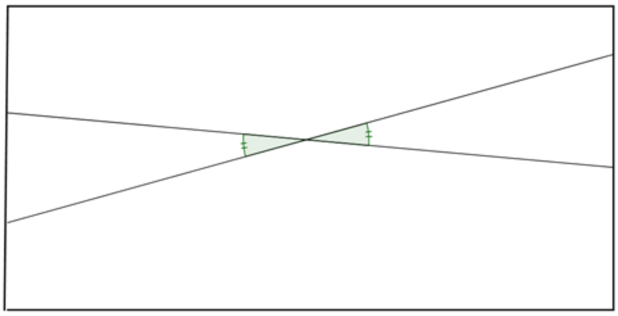


NOM	DEFINITION DES QUADRILATERES	PROPRIETES		
		Axes de symétrie	Diagonales	Angles
Carré	• 4 côtés isométriques • 4 angles droits	4	• Isométriques • perpendiculaires • Se coupent en leur milieu	4 angles de 90º
Cerf-volant	• 2 fois 2 côtés adjacents isométriques • Convexe	1	• Perpendiculaires • Une diagonale est coupée en son milieu	2 angles opposés isométriques
Fer de lance	• 2 fois 2 côtés isométriques adjacents • Non convexe	1	• Le prolongement d'une diagonale coupe l'autre à l'extérieur de la figure à angle droit en son milieu	1 angle de plus de 180º 2 angles opposés isométriques et aigus
Losange	• 4 côtés isométriques	2	• Perpendiculaires • Se coupent en leur milieu	2 fois 2 angles opposés isométriques
Parallélogramme	• 2 fois 2 côtés parallèles Ou • 2 fois 2 côtés opposés isométriques • Convexe	0	• Se coupent en leur milieu	2 fois 2 angles opposés isométriques
Rectangle	• 2 fois 2 côtés isométriques • 4 angles droits	2	• Isométriques • Se coupent en leur milieu	4 angles de 90º
Trapèze	• 1 paire de côtés parallèles	0		

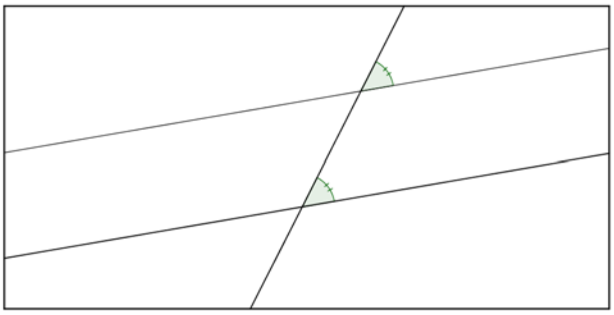
Trapèze isocèle	• 1 paire de côtés parallèles • 1 paire de côtés non parallèles isométriques	1	• Isométriques	2 fois 2 angles consécutifs isométriques
Trapèze rectangle	• 1 paire de côtés parallèles • 2 angles droits	0		2 angles droits

2) Définition ayant un rapport avec les angles

Deux angles sont opposés si :



Deux angles sont correspondants si :

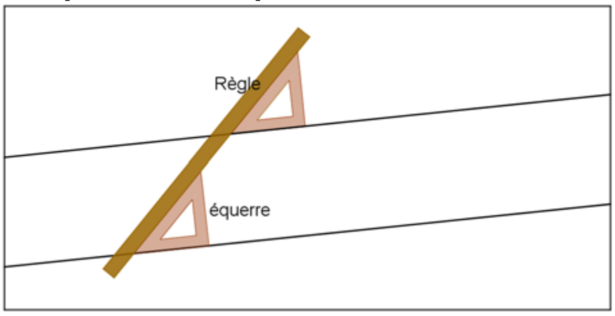


Deux angles sont complémentaires si leur somme vaut 90º.

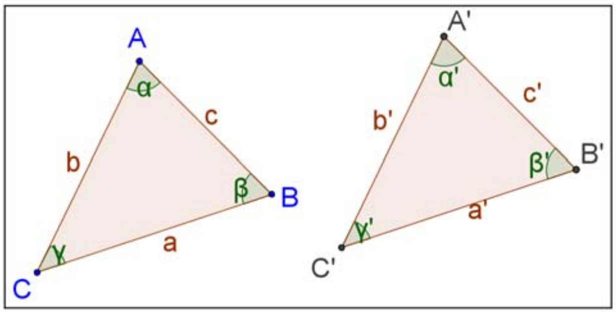
Deux angles sont supplémentaires si leur somme vaut 180º.

Une bissectrice est la moitié d'un angle.

3) Tracé des parallèles



4) Egalité des triangles



2 triangles sont identiques si on peut les superposer. Donc si :

1) AB = A'B'
2) AC = A'C'
3) BC = B'C'
4) $\alpha = \alpha'$
5) $\beta = \beta'$
6) $\gamma = \gamma'$

Il y a trois cas d'égalité :
<u>1^{er} cas</u> : si on a 1), 2) et 3) alors on a 4), 5) et 6)
Autrement dit : CCC : côté / côté / côté
<u>2ème cas</u> : si on 1), 2) et 4) alors on a 3), 5) et 6)
Autrement dit CAC : côté / angle / côté
<u>3ème cas</u> : si on a 1), 4) et 5) alors on a 2), 3) et 6)
Autrement dit : ACA : angle / côté / angle
Remarque : puisque $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, on a également AAC

ELEMENT POUR LA SYNTHESE : fin de la 1ère partie (obtention des figures)

Remarque : Le pliage est accepté si la construction peut être justifiée, c'est-à-dire que tout pliage aléatoire est considéré comme faux.
Ex. : deux plis sont parallèles car j'ai mesuré deux fois la distance et j'ai plié.

CARRE

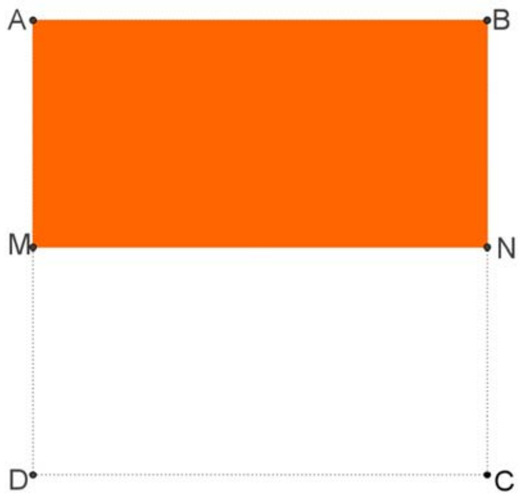
C'est donné au départ.

RECTANGLE

1) Le carré de départ est un rectangle.

OU

2)



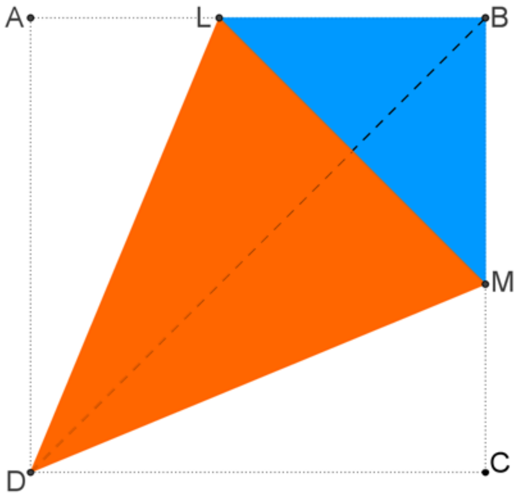
Plier bord à bord

CERF VOLANT

1) Le carré de départ est un cerf-volant.

OU

2)



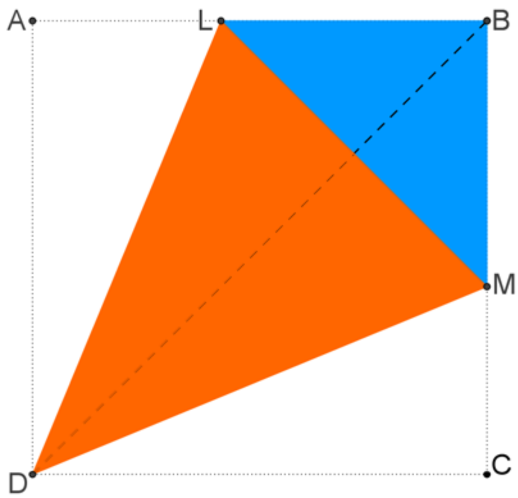
Marquer la diagonale BD.
Ouvrir pour obtenir le carré de départ.
Rabattre CD sur BD
Rabattre AD sur BD
On obtient le cerf volant LBMD

LOSANGE

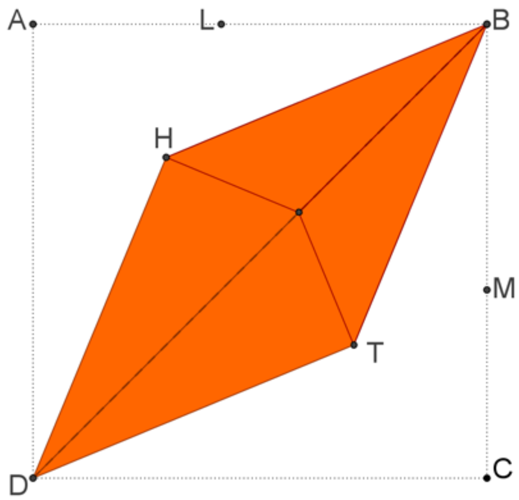
1) Le carré de départ est un losange.

OU

2)



Marquer la diagonale BD
Ouvrir pour obtenir le carré de départ
Rabattre CD sur BD
Rabattre AD sur BD
On obtient le cerf volant LBMD



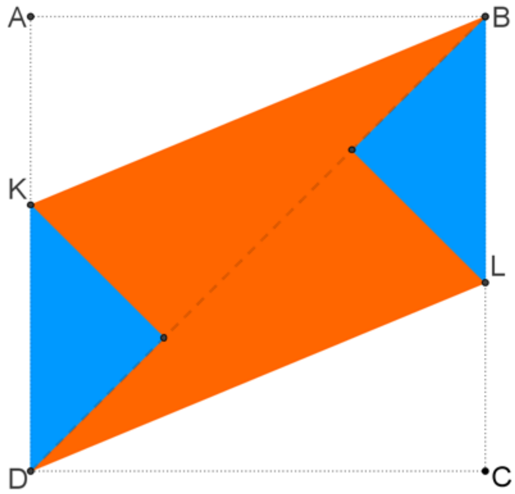
Rabattre BL sur BD
Rabattre BM sur BD
On obtient le losange HBTD

PARALLELOGRAMME

1) Le carré de départ est un parallélogramme.

OU

2)



Marquer la diagonale BD
Ouvrir pour obtenir le carré de départ.
Rabattre CD sur BD
Rabattre AB sur BD
On obtient le parallélogramme KBLD

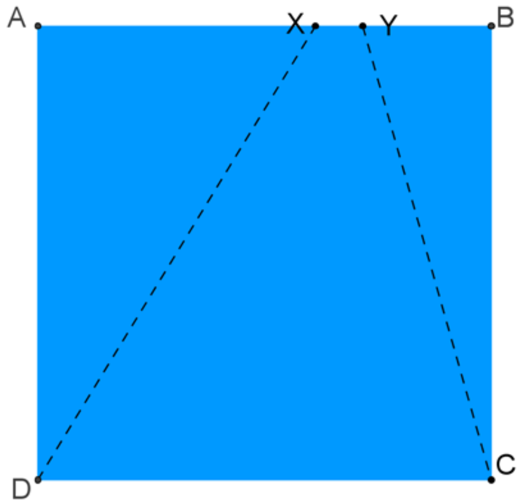
TRAPEZES QUELCONQUE, ISOCÈLE ET RECTANGLE A PARTIR DU CARRE

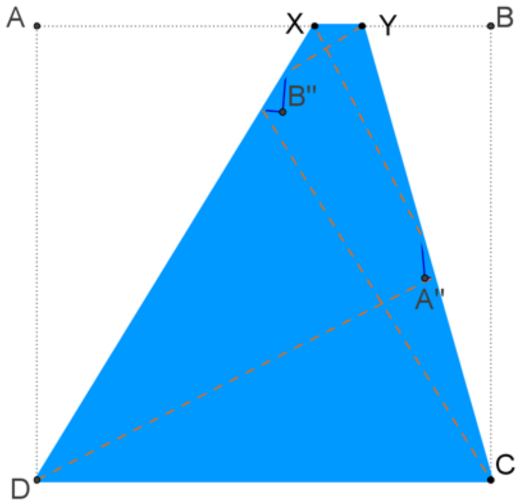
1) Le carré de départ est un trapèze. Il est à la fois quelconque, isocèle et rectangle.

OU

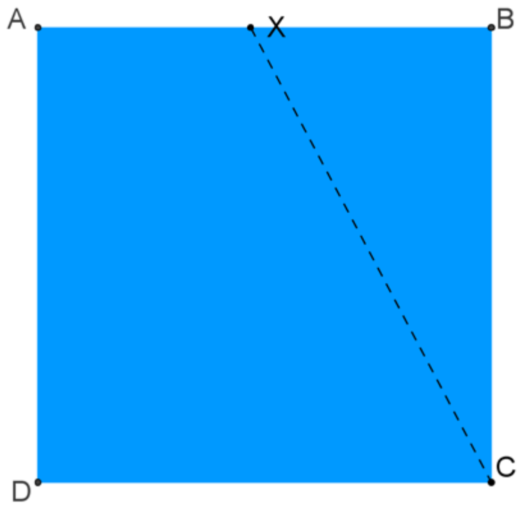
2) Trapèze quelconque :

On plie 2 côtés opposés de façon quelconque.
On rabat ce qui dépasse dans la figure.
On obtient XYCD



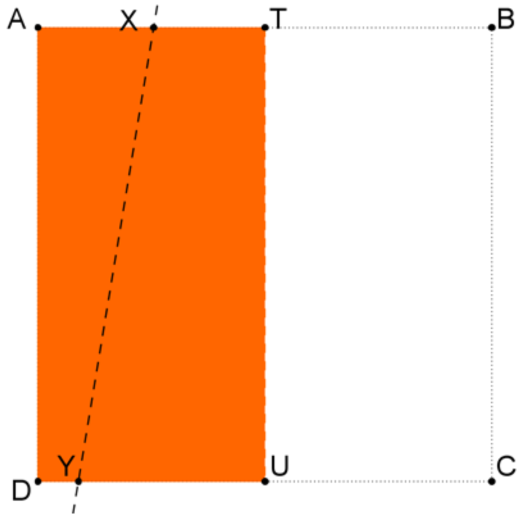


3) Trapèze rectangle :

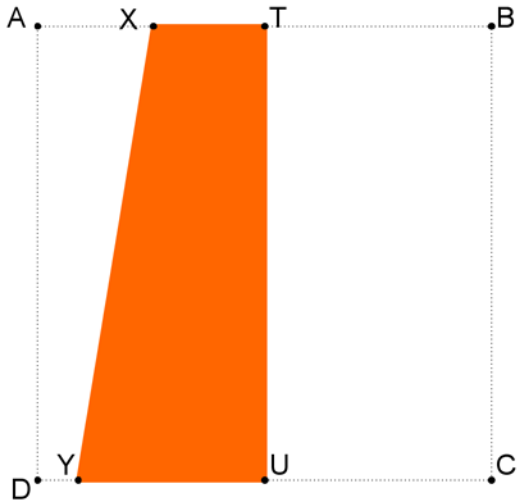


On plie un côté de façon quelconque.
On rabat ce qui dépasse dans la figure.
On obtient AXCD

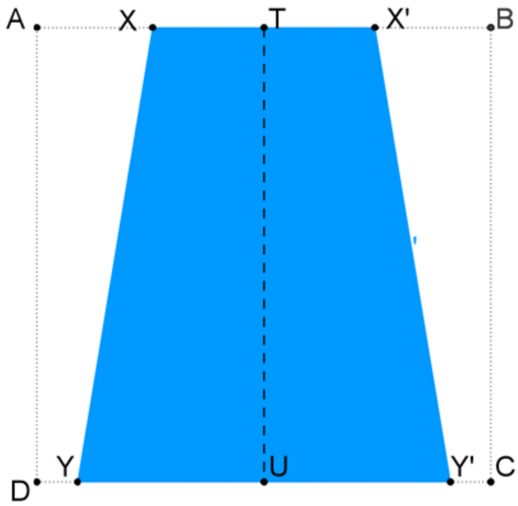
4) Trapèze isocèle :



On rabat BC sur AD.
On obtient ATUD.



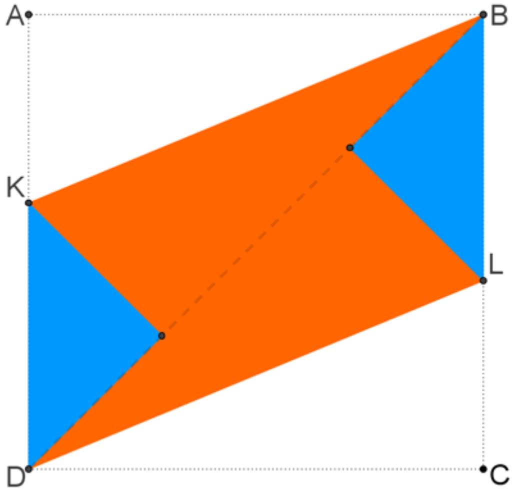
On plie de façon quelconque AD.



On ouvre et on replie le long de X et Y de chaque côté.
On obtient X' XY'Y.

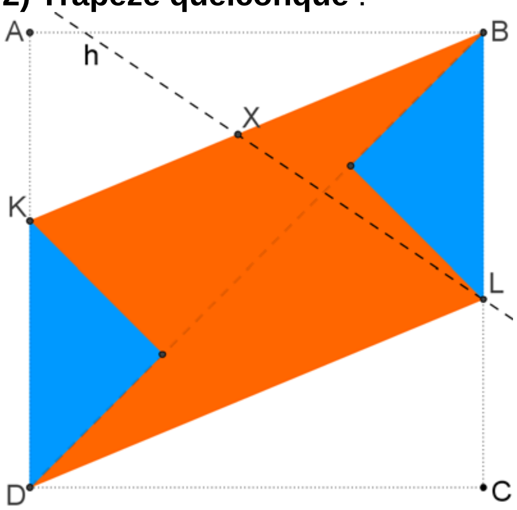
TRAPEZES QUELCONQUE, ISOCÈLE ET RECTANGLE A PARTIR DU PARALLELOGRAMME

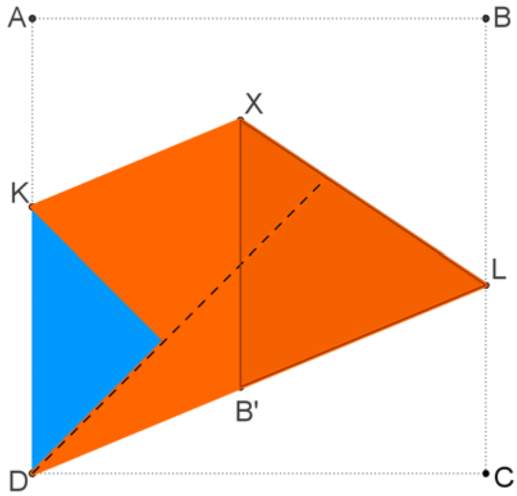
1) Le parallélogramme est un trapèze quelconque, ni isocèle ni rectangle.



OU

2) Trapèze quelconque :

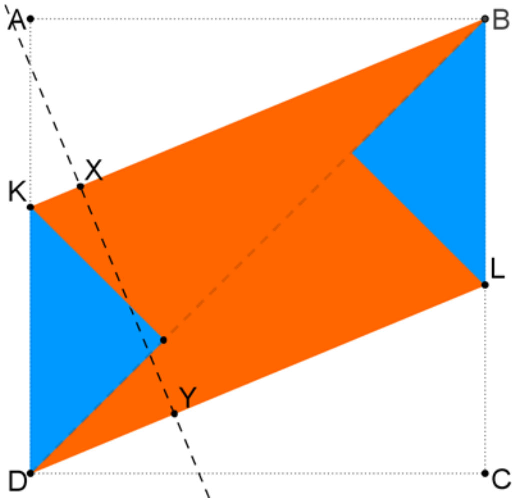


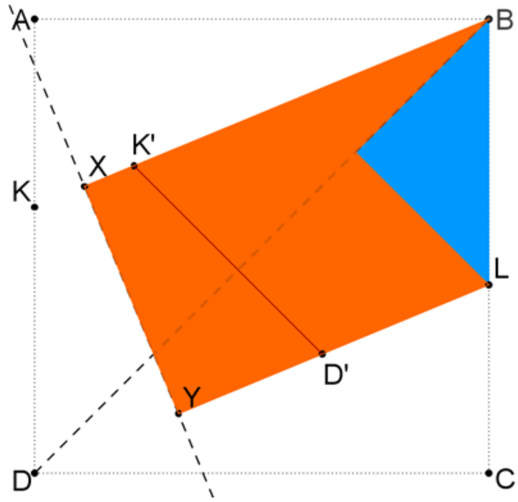


Construire le parallélogramme
Plier B sur le côté DL

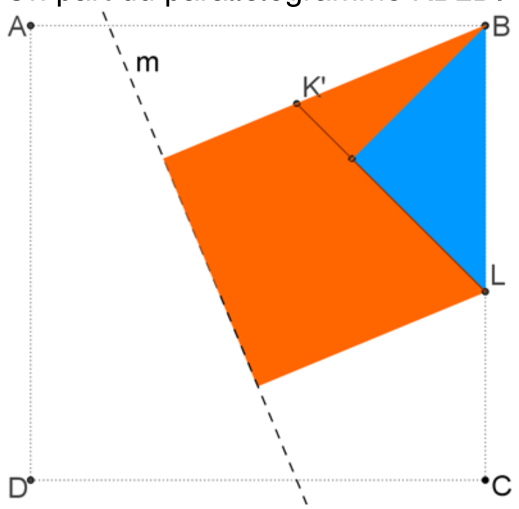
On a le trapèze KXLD

3) Trapèze rectangle :
On part du parallélogramme KBLD.
On rabat D sur le segment DL.
On obtient XBLY.

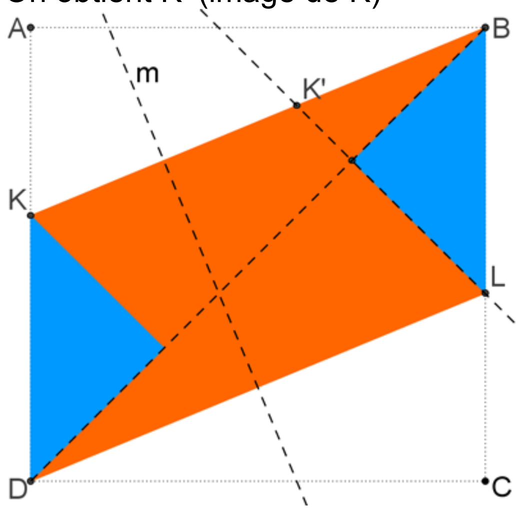




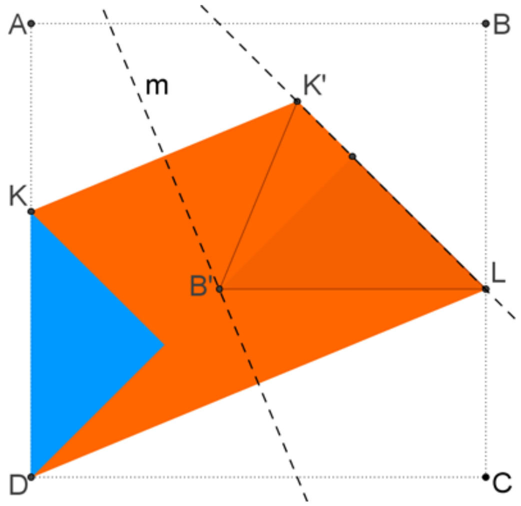
4) Trapèze isocèle :
On part du parallélogramme KBLD.



On rabat D sur L.
On obtient K’ (image de K)



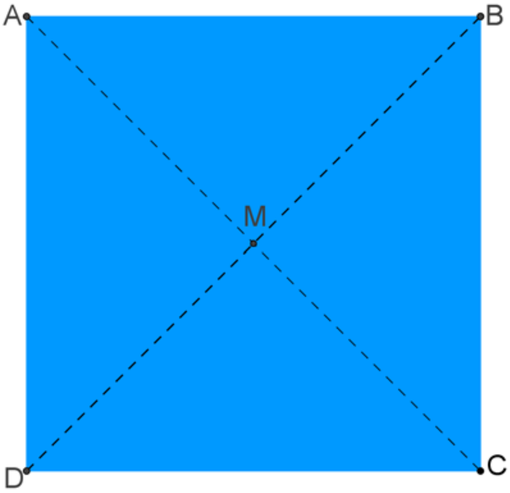
On plie le long de K’L



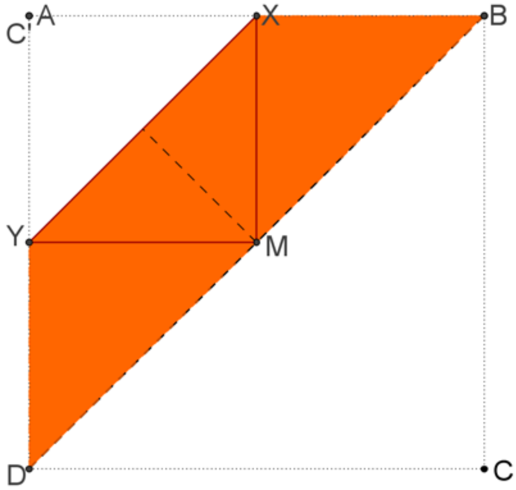
On obtient KK’LD.

TRAPEZES ISOCÈLE ET RECTANGLE A PARTIR DU TRIANGLE

1) Trapèze isocèle :

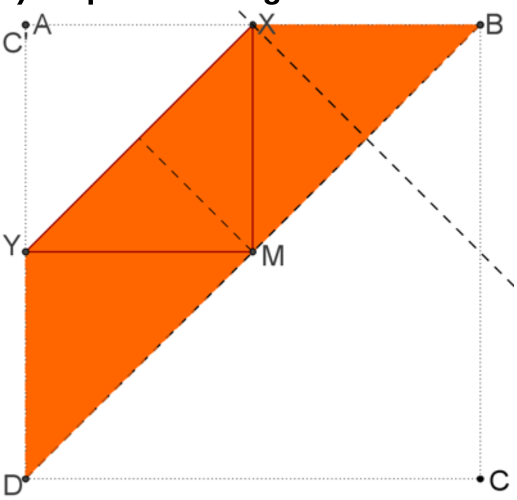


Marquer les diagonales AC et BD
Ouvrir pour obtenir le carré de départ
Noter BD ∩ AC = M

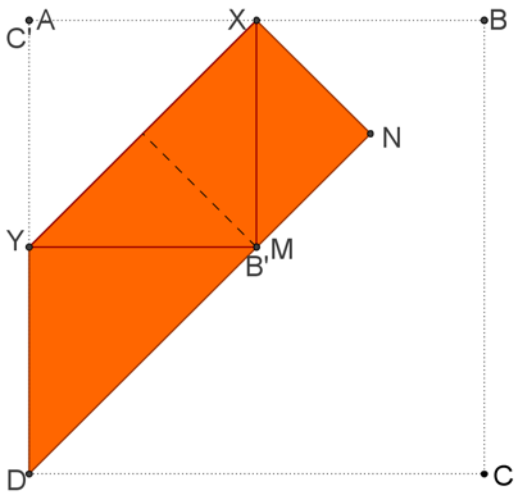


Plier la diagonale BD
Rabattre A sur AM
On a le trapèze YXBD

2) Trapèze rectangle :

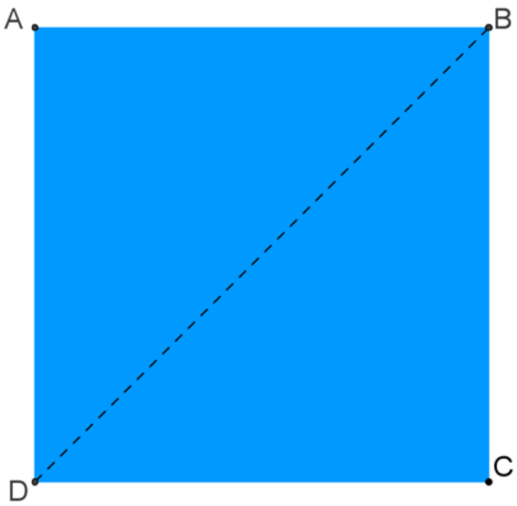


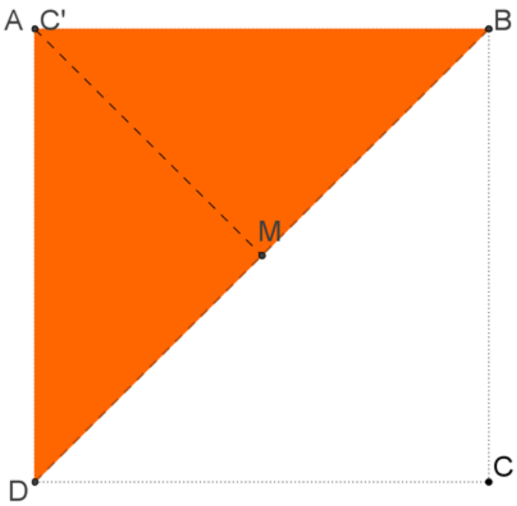
Construire le trapèze isocèle
Plier B sur BD sur un pli
perpendiculaire au segment XY



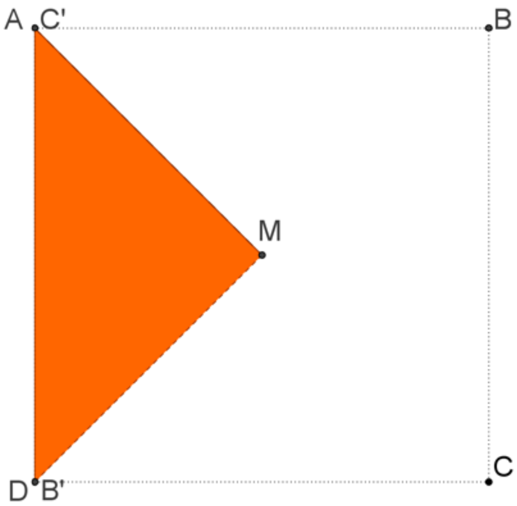
On a le trapèze YXND

FER DE LANCE

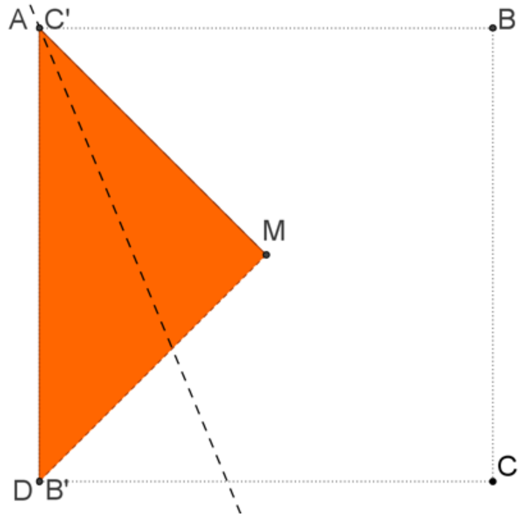




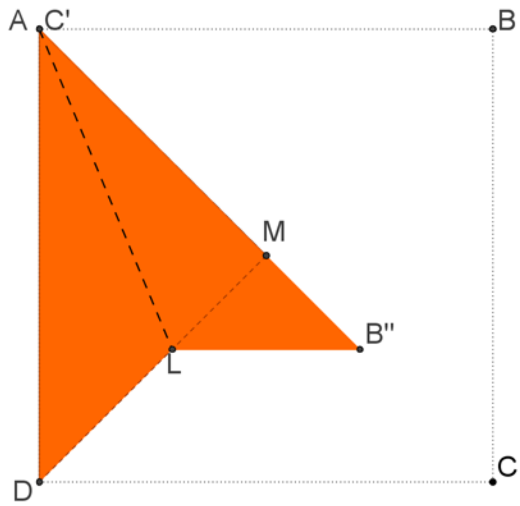
Plier la diagonale BD



Rabattre B sur D



Rabattre AB’ sur AM



On a le fer de lance AB’’LD

Remarque : à la quatrième étape, n'importe quel pli passant par le sommet A produit un fer de lance, en rabattant éventuellement ce qui dépasse.

ELEMENT POUR LA SYNTHESE : fin de la 2ème partie (preuve)

Remarque : implicitement on utilise le résultat suivant : plier bord à bord définit la bissectrice de l'angle défini par les deux côtés. Ce résultat est la conséquence de la propriété de la bissectrice qui est le lieu des points équidistants des demi-droites définissant l'angle.

CARRE

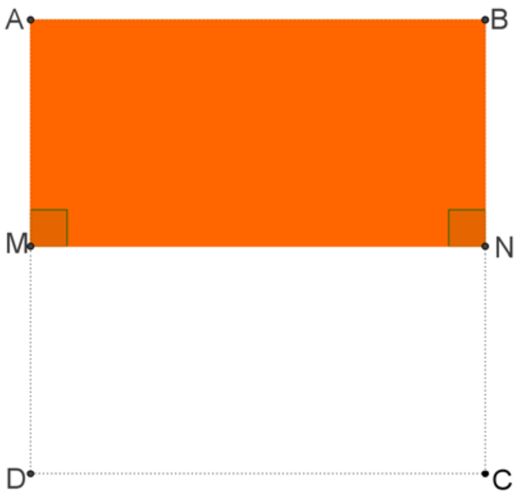
Supposé au départ.

RECANGLE

1) Le carré de départ.
Le carré est un rectangle car il a 2 paires de côtés isométriques et 4 angles droits.

2)
Voici les propriétés du rectangle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un rectangle :

- *4 angles droits*



On plie bord à bord.
La moitié d'un angle plat vaut 90º, donc les angles de sommets M et N valent 90º.
L'angle DAB = l'angle ABC = 90º
On a 4 angles droits, on a donc un rectangle.

CERF VOLANT

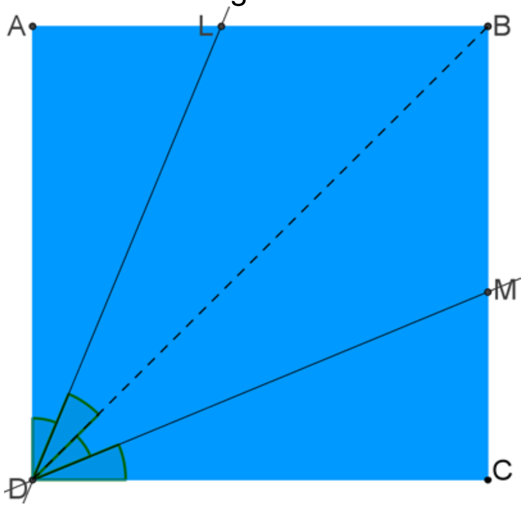
1) Un carré a 2 fois 2 côtés isométriques et il est convexe. C'est donc un cerf volant.

2)
Voici les propriétés du cerf volant que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un cerf volant :

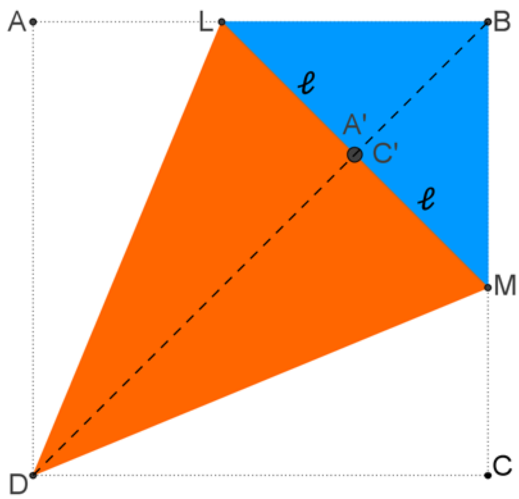
- *2 x 2 côtés isométriques*

+ cas 2) de l'égalité des triangles (CAC (=CÔTÉ/ANGLE/CÔTÉ))
+ définition de la bissectrice

Il faut ouvrir la figure. On obtient :



DB est la bissectrice de ADC donc CDB = ADB
DL et BM sont les bissectrices de ADB et BDC respectivement, donc ADL = LDB = BDM = MDC.
Par l'égalité des triangles ACA (=ANGLE/CÔTÉ/ANGLE), les triangles sont égaux.



On sait que les triangles ADL = LDA' et CDM = DMC' par construction.
Il faut prouver que ces 4 triangles sont identiques.
DC' =DA' car ce sont les côtés du carré de départ.
L'angle LDA = l'angle MDC car se sont les bissectrices de l'angle BDC
Les angles MCD = LAD sont droits, car ce sont les angles du carré de base.
DA = DC car ce sont les côtés du carré, donc par l'égalité des triangles ACA (=ANGLE/CÔTÉ/ANGLE) on obtient que les 2 triangles ALD = ACM
Par pliage MC'D = LA'D
MC = LA car les triangles sont identiques
BA = BC (côtés du carré)
BM = BL

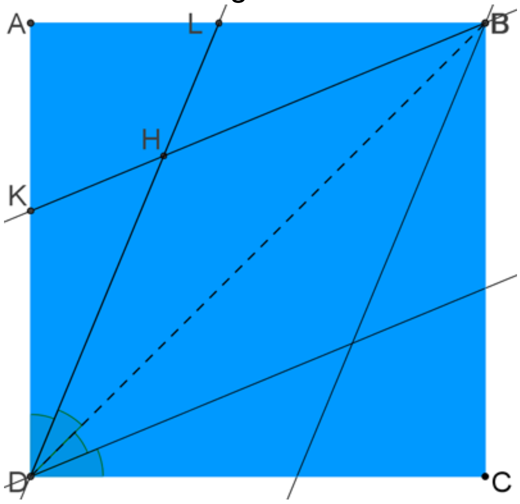
LOSANGE

1) Le carré de départ.
Le carré de base est un losange, car il a 4 côtés isométriques.

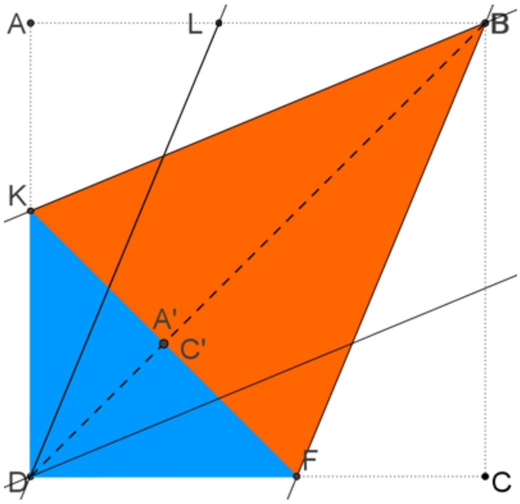
2)
<u>Preuve 1</u>
Voici les propriétés du losange que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un losange :
- *4 côtés isométriques*

+ angles complémentaires

Il faut ouvrir la figure. On obtient :

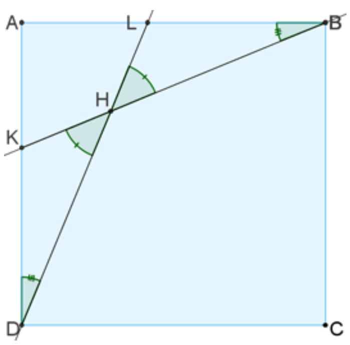


On a 4 angles identiques : ce sont 2 fois les bissectrices
Reprendre la démonstration proposée pour le cerf volant



De la même manière on démontre que :

Le triangle BA'K = le triangle BC'F
Il reste à montrer que les 4 côtés sont isométriques.
H est l'intersection de DL et KB, par le théorème des angles opposés on a KHD = LHB



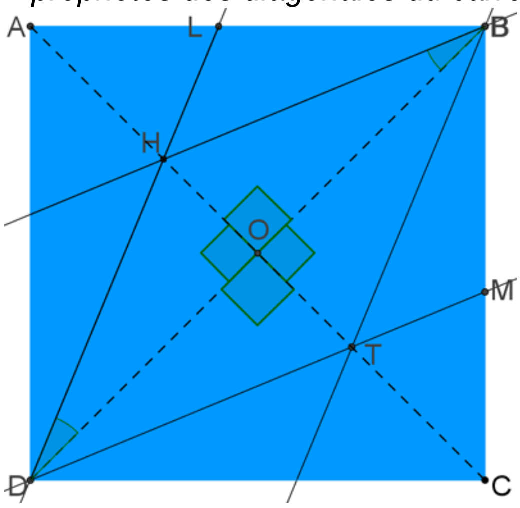
On sait que l'angle LBH = l'angle HDK, car se sont les bissectrices prises deux fois de l'angle de 90° du carré de base.
On sait que DK = LB
Avec le cas 3) bis (AAC) de l'égalité des triangles on peut dire que les triangles HKD = LHB et que donc BH = DH
On a donc bien 4 côtés isométriques et c'est la définition du losange.

Preuve 2

Voici les propriétés du losange que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un losange :

- *4 côtés isométriques*

+ propriétés des diagonales du carré



On sait que les 2 diagonales d'un carré sont isométriques et se coupent en leur milieu à angle droit (point O).
Donc BO = OD
L'angle HDO = angle HBO (bissectrices)
Angle HOB = angle HOD = 90º
Par ACA (=ANGLE/CÔTÉ/ANGLE), le triangle BHO = le triangle DOH
Donc HB = DH
On a donc bien un losange.

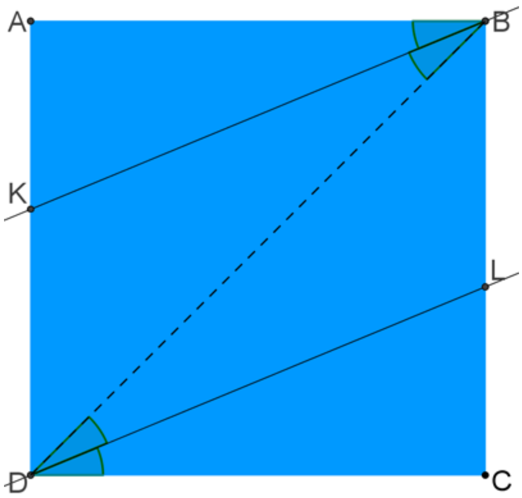
PARALLELOGRAMME

1) Le carré de départ a 2 fois 2 côtés parallèles.

2)
Voici les propriétés du parallélogramme que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un parallélogramme :

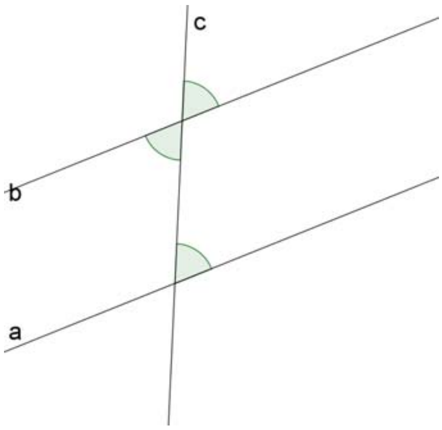
- *2 fois 2 côtés parallèles*

+ définition des bissectrices
+ tracé des parallèles

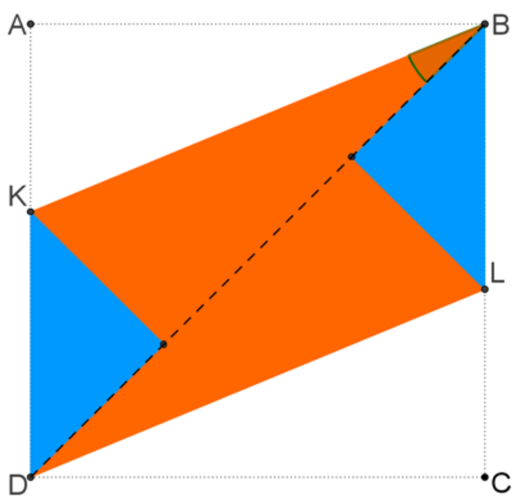


On sait que BL est parallèle à KD car ce sont les côtés du carré de base.
Angle KBD = angle BDL car ce sont les bissectrices de la diagonale du carré.

Si on utilise le tracé des parallèles on voit que :



2 droites sont parallèles si les angles alternes internes sont égaux.



L'angle BDL = l'angle KBD, car il est l'angle opposé à l'angle correspondant à BDL.
KB est donc parallèle à DL

TRAPEZES QUELCONQUE, ISOCÈLE ET RECTANGLE A PARTIR DU CARRE

1) Le **carré** de base est un trapèze car il a une paire de côtés parallèles.

2) **Trapèze quelconque** :
Voici les propriétés du trapèze que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze :
- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*

En pliant 2 côtés opposés de façon quelconque, on obtient un trapèze car il suffit que 2 côtés soient parallèles pour qu'il y ait un trapèze et on a 2 côtés du carré qui sont parallèles par définition.

3) **Trapèze rectangle** :
Voici les propriétés du trapèze rectangle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze rectangle :
- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*
- *un trapèze rectangle a 2 angles droits*

Si on plie de façon quelconque un côté on obtient un trapèze rectangle car il suffit qu'il a ait une paire de côté parallèles et 2 angles droits selon la définition du trapèze or ces propriétés sont contenues dans le carré. De base.

4) **Trapèze isocèle** :
Voici les propriétés du trapèze isocèle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze isocèle :
- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*
- *un trapèze isocèle a deux côtés isométriques*

XX' est parallèle à YY' car ce sont les côtés du carré de départ.
TX = TX' et UY = UY' par construction.

TRAPEZES QUELCONQUE, ISOCÈLE ET RECTANGLE A PARTIR DU PARALLELOGRAMME

1) Le **parallélogramme** a une paire de côtés parallèle.

2) **Trapèze quelconque** :
Voici les propriétés du trapèze que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze :

- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*

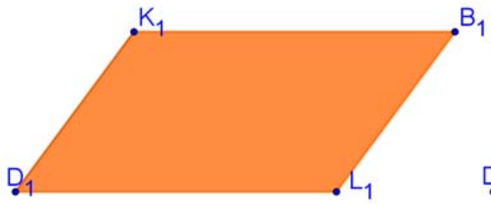
Les côtés KB et DL du parallélogramme sont parallèles, alors les côtés KX et DL du trapèze le sont également.
On a donc bien un trapèze.

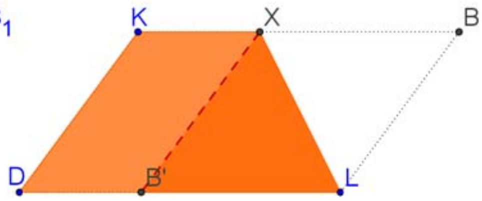
OU

2)
Voici les propriétés du trapèze que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze :

- *un trapèze à 2 côtés parallèles*

Voir démonstration du parallélogramme



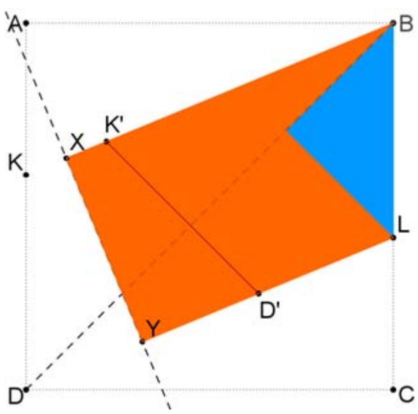


KX et DL sont parallèles selon la définition du parallélogramme.
DB est parallèle à DL par construction.
On a donc un trapèze.

On fait n’importe quel pli passant par L tel que l’angle XLB est compris entre 45 et 90 degrés.

3) Trapèze rectangle :
Voici les propriétés du trapèze rectangle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze rectangle :

- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*
- *un trapèze rectangle a deux angles droits*

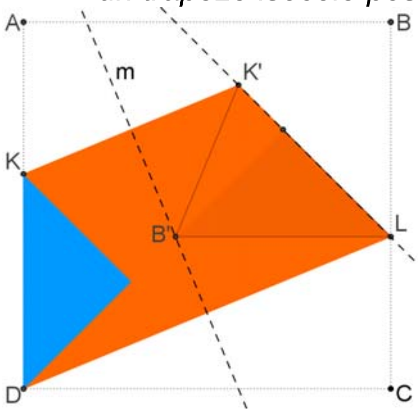


Les côtés XB et YL sont parallèles car ce sont les côtés du parallélogramme de départ.
Il reste à montrer que XY est perpendiculaire à YL.
C’est le cas par construction : on rabat une droite sur elle-même on a donc une perpendiculaire aux 2 côtés parallèles.
On a donc bien un trapèze rectangle.

4) Trapèze isocèle :

Voici les propriétés du trapèze isocèle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze isocèle :

- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*
- *un trapèze isocèle possède un axe de symétrie*



Les côtés DL et KK' sont parallèles car ce sont les côtés du parallélogramme de départ.

En rabattant D sur L, on construit la médiatrice m du segment Dl, qui est également la médiatrice su segment KK' (car DL et KK' sont parallèles). Ceci implique que DKK'L possède m comme axe de symétrie et c'est donc un trapèze isocèle

TRAPEZES ISOCÈLE ET RECTANGLE A PARTIR DU TRIANGLE

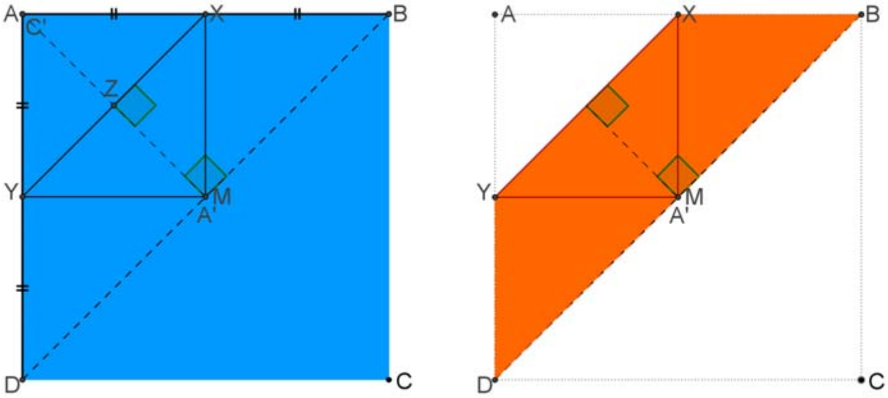
1) Trapèze isocèle :

Voici les propriétés du trapèze isocèle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze isocèle :

- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*
- *un trapèze isocèle a deux côtés isométriques*

+ propriétés des diagonales d'un carré

Il faut ouvrir la figure. On obtient :



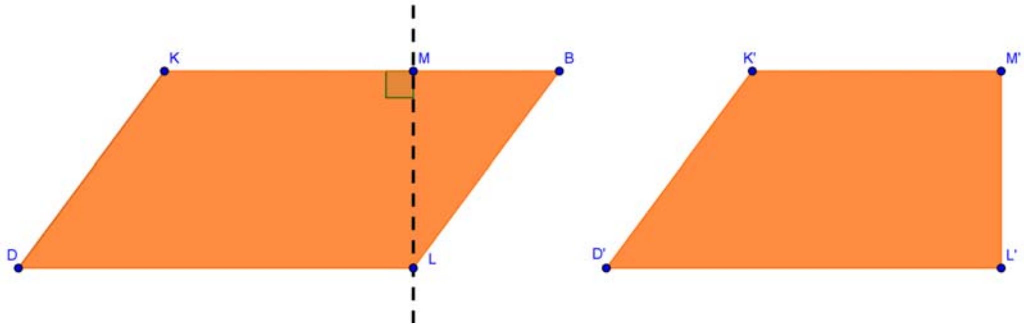
On sait que les diagonales d'un carré se coupent à angle droit
On a XY // BD car AM est perpendiculaire à BD par les angles alternes internes.
Reste à montrer que XB = YD
Si on montre que les 4 triangles (AZY, AZX, XZM, YZM) sont isométriques alors XB = YD
AX + XB = AY + YD
X et Y se trouvent au milieu de AB, respectivement de AD car si les diagonales XY et AM se coupent à angle droit alors on a un rectangle.
On sait que la somme des angles d'un triangle vaut 180º
ZXM = 180 – (90 + 45) = 45
Idem pour ZYM
Alors l'angle MYC = l'angle ZXM = 45
Alors ZM = ZX.
On a donc un carré AXMY
Idem pour XB et YD
On a donc bien un trapèze isocèle

2) Trapèze rectangle :

Voici les propriétés du trapèze rectangle que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un trapèze rectangle :

- *un trapèze a une paire de côtés parallèles*
- *un trapèze rectangle a un angle droit*

Voir démonstration du parallélogramme



Si on plie perpendiculairement à KB par L, on a un angle droit.

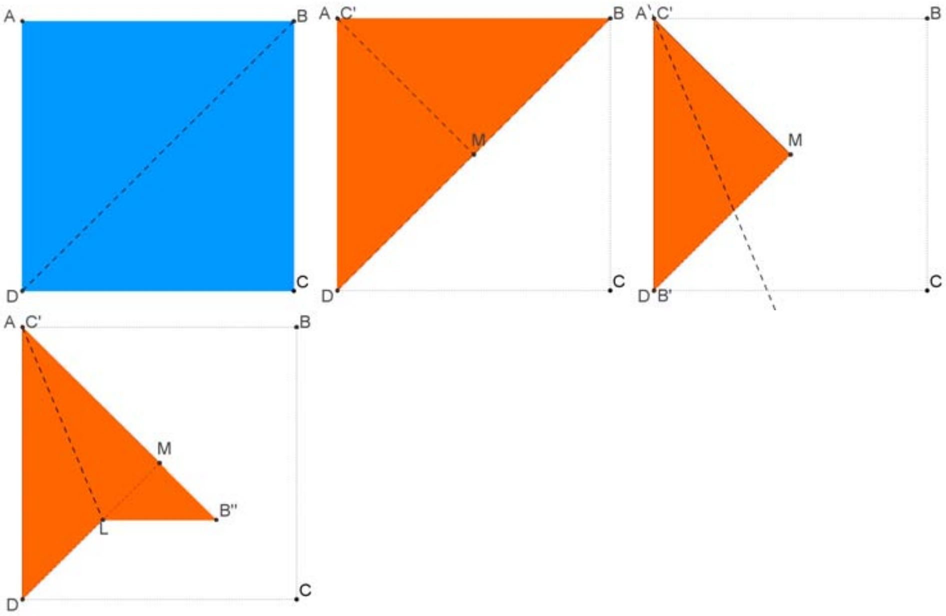
FER DE LANCE

<u>Preuve 1</u> :

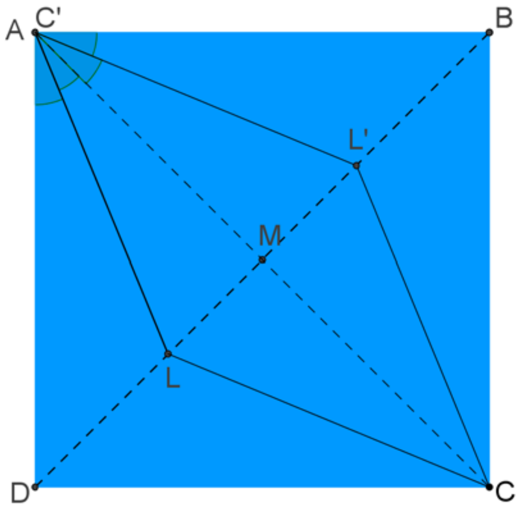
Voici les propriétés du fer de lance que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un fer de lance :

- *2 fois 2 côtés isométriques*

+ définition des bissectrices
+ propriétés des diagonales d'un carré



On sait que AD = AB, car on part d'un carré.
Il reste à prouver que DL = LB pour montrer qu'on a un fer de lance.
Il faut ouvrir la figure. On obtient :



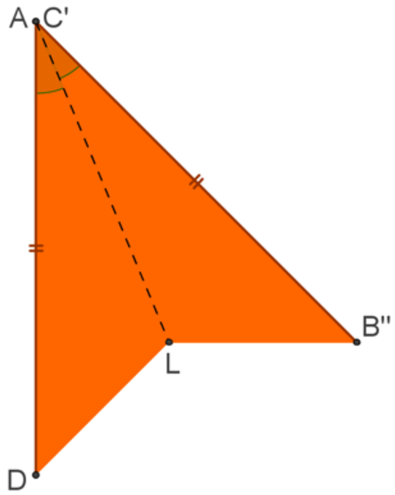
Les 4 angles sont isométriques car on a les bissectrices des diagonales du carré de base.
On sait que le triangle ALM = le triangle ABM
Donc LM = BL'
On a donc un fer de lance

<u>Preuve 2</u> :

Voici les propriétés du fer de lance que nous allons utiliser pour démontrer que le quadrilatère obtenu par pliage est bien un fer de lance :

- *2 fois deux côtés isométriques*

+ définition des bissectrices
+ cas 2) de l’égalité des triangles



On sait que AD = AB, car ce sont les côtés du carré de départ.
Il faut montrer que le triangle ADL = le triangle ABL
On sait que les angles DAL et LAB sont isométriques car on a plié sur les bissectrices
On sait que DL = LB si on utilise le cas 2) de l’égalité des triangles

Remarque : Si le dernier pli n'est pas sur la bissectrice de l'angle en A, la preuve que la figure est bien un fer de lance fait appel à la trigonométrie et n'est donc pas abordée dans les degrés concernés par cette activité.