La cocarde

Résumé	Découvrir que le périmètre du disque est proportionnel à son rayon (6P-7CO) et que l'aire du disque est fonction de son périmètre et de son rayon (8CO). Approcher la valeur de π. Cette activité n'a de sens que si elle intervient alors que les élèves ne connaissent pas encore les formules permettant de calculer le périmètre et l'aire du disque.
Degrés concernés	6P - 8CO
Enoncé destiné aux élèves	Voir les fiches ci-dessous
Matériel	6 rectangles de 5, 7 et 10 cm de large et de différentes longueurs, marqués tous les centimètres (en annexe ci-dessous)
Durée	1-2 périodes

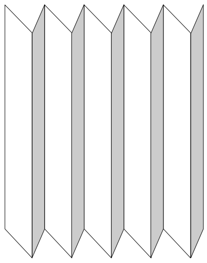
Propositions de déroulement	Travail en groupes de 2 élèves. Chaque groupe reçoit un rectangle et une fiche-énoncé. Les 6 rectangles différents sont donc répartis entre les groupes, deux groupes pouvant recevoir un même rectangle. Si nécessaire, l'enseignant montre comment marquer les plis avec une règle et des ciseaux pour qu'ils soient précis. En cours de recherche, l'enseignant propose si nécessaire une mise en commun intermédiaire pour que les élèves formulent des questions, proposent des pistes et débattent de leur validité. <u>Mise en commun</u> Lorsque tous les groupes ont une réponse à apporter, la mise en commun des solutions devrait permettre de faire apparaître un rapport constant entre la largeur d'un rectangle et sa longueur pour fermer la cocarde, rapport théoriquement égal à 2π mais qui ne sera pas aussi précis. L'enseignant relève les réponses des différents groupes. Celles-ci devraient être approximativement de : ● 31cm pour une largeur de 5cm ● 44cm pour une largeur de 7cm ● 63cm pour une largeur de 10cm Les différences significatives des longueurs nécessaires font apparaître que celles-ci sont fonction de la largeur des rectangles. L'enseignant regroupe les réponses correspondant à une même largeur. S'il y a des différences importantes entre les résultats pour une même largeur, les élèves explicitent leurs procédures afin de déterminer celles qui sont le plus fiables, puis les différents groupes reprennent leurs mesures pour les affiner. L'enseignant peut proposer de fixer une extrémité de l'accordéon avec du ruban adhésif pour améliorer la précision. L'observation des résultats montre que la longueur pour un rectangle de 10cm de large étant le double de celle pour un rectangle de 5cm de large, ces grandeurs sont donc proportionnelles. Le calcul de ce rapport pour chacun des résultats fournit des nombres se situant dans un intervalle plus ou moins important autour de 2π. Si nécessaire, tous les groupes reprennent la recherche avec une même largeur pour obtenir un résultat encore plus précis (les rectangles de 7cm de large permettent d'avoir un nombre entier de plis dans un angle droit ou plat) Au terme de cette recherche collective, l'enseignant présente π et sa valeur, égale à la moitié de la constante trouvée puisqu'il exprime le rapport entre le périmètre du cercle et son diamètre. En 8CO, la recherche de l'aire du disque se fait dans un 2ème temps, après accord sur le lien entre les côtés du rectangle. Elle fait l'objet ensuite d'une mise en commun

Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	<u>Démarches possibles</u> Recherche de la longueur du rectangle : - Rallonger le rectangle pour former un demi-disque, un disque complet - Dessiner l'angle formé, puis reporter celui-ci jusqu'à ce que le disque soit fermé - Mesurer l'angle formé, puis calculer par proportionnalité - Compter le nombre de plis contenus dans un angle droit, puis multiplier par 4 - ... Recherche de l'aire du disque : - Calculer l'aire d'un triangle ($\approx 1 \cdot \ell/2$) et multiplier par le nombre de triangles - Calculer l'aire du rectangle et diviser par 2 - …
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	π, rayon,
Développements possibles	Histoire de π

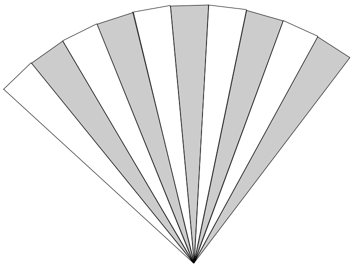
La cocarde 6P-7CO – Énoncé de l'élève

Découpez le rectangle.

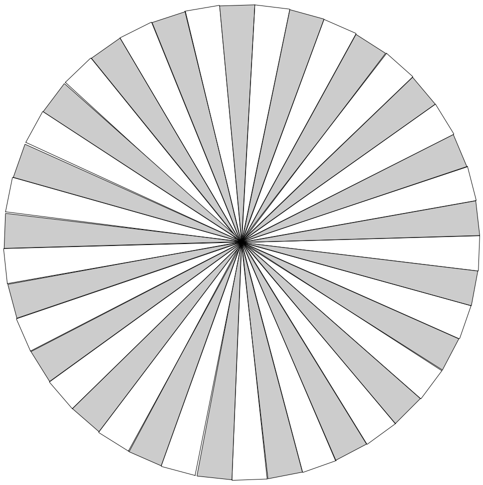
Pliez sur les lignes pointillées
pour faire un accordéon.



Pincez une extrémité de l'accordéon,
puis ouvrez-le pour former l'éventail
le plus grand possible.



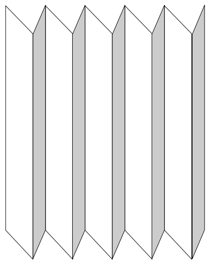
Quelle devrait être la longueur de votre
rectangle pour que vous puissiez faire
une cocarde fermée ?



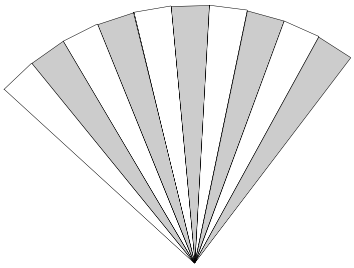
La cocarde 8CO – Énoncé de l'élève

Découpez le rectangle.

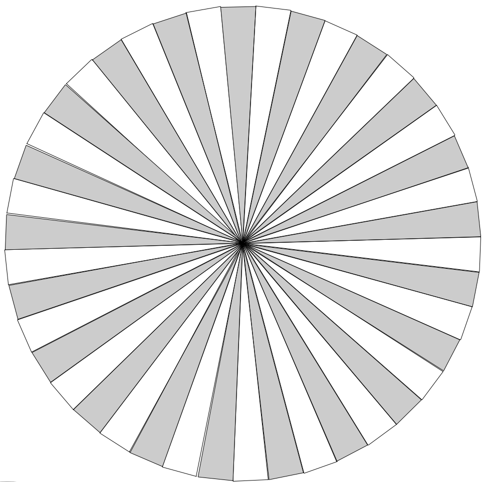
Pliez sur les lignes pointillées
pour faire un accordéon.



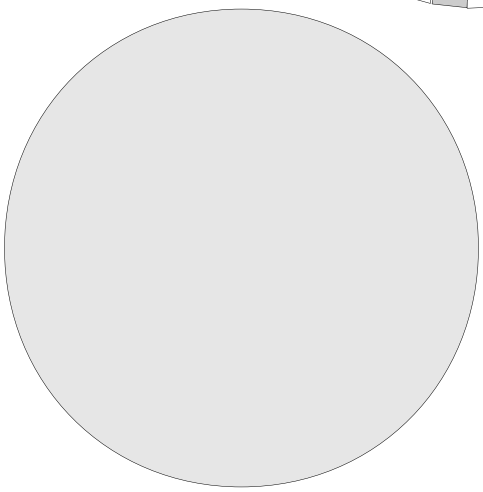
Pincez une extrémité de l'accordéon,
puis ouvrez-le pour former l'éventail
le plus grand possible.



Quelle devrait être la longueur de votre
rectangle pour que vous puissiez faire
une cocarde fermée ?



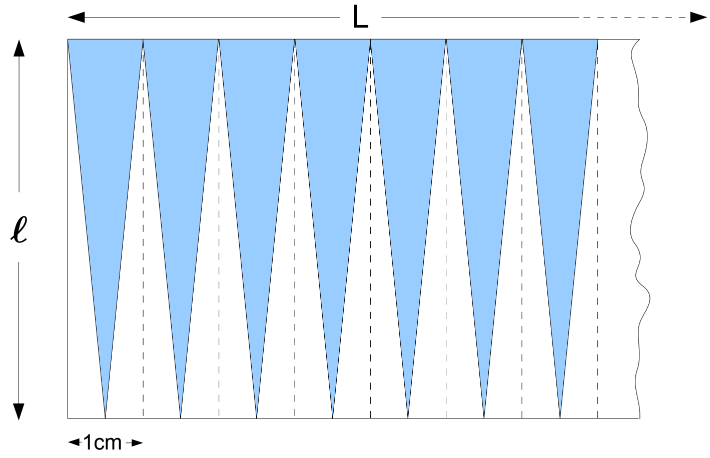
Quelle serait l'aire du disque
superposable à cette cocarde ?



Éléments pour la synthèse

Calcul de l'aire

Puisqu'une extrémité de l'accordéon est pincée et que l'autre est étirée en formant la cocarde, chaque rectangle de l'accordéon détermine un triangle isocèle.

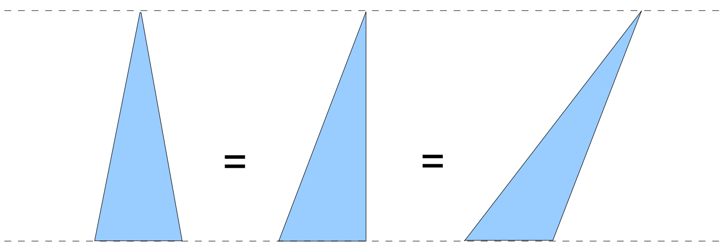


Il y a plusieurs façons de considérer l'aire du disque :

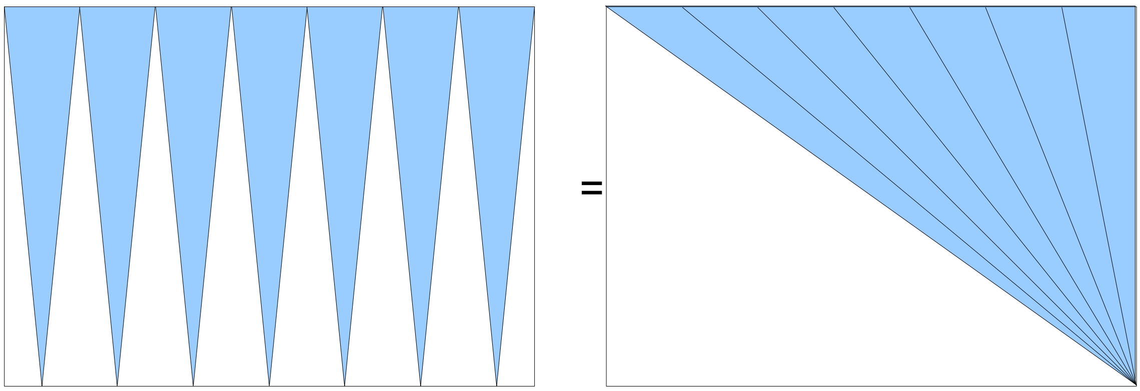
1. Calculer l'aire du triangle (ici $\ell/2$), puis multiplier par le nombre de plis effectués (= L)

2. L'aire du triangle étant ½ de l'aire de la bande qui le contient, l'aire du disque est ½ du rectangle nécessaire pour fermer la cocarde.

3. L'aire du triangle n'étant fonction que de sa base et de sa hauteur, elle ne change pas si l'on déplace le sommet sans modifier la hauteur.



Les triangles isocèles peuvent donc être regroupés en un triangle dont l'aire est la moitié du rectangle.



On aboutit dans tous les cas à une aire du disque égale à $\ell \cdot L/2$, et ceci reste vrai si on diminue la largeur des plis, et lorsque les plis deviendront si petits que le polygone tendra à être un disque.

Puisque $L = 2\pi \cdot \ell$, et que ℓ est égal au rayon du disque r lorsque la largeur des plis devient minime, l'aire du disque $\ell \cdot L/2 = \pi \cdot r^2$

<u>Valeur de π</u>

On a cherché depuis l'antiquité à calculer le périmètre d'un cercle – ou l'aire d'un disque – en fonction de son diamètre, et ces calculs ont très tôt utilisé un rapport constant :

- à Babylone (vers 2000 av.JC), ce rapport avait pour valeur 3 + 7/60 + 30/3600, soit 3,125
- en Egypte (vers 1650 av.JC), la méthode géométrique utilisée revenait à considérer ce rapport comme étant égal à $(16/9)^2$, soit environ 3,16
- Dans l'Ancien Testament, les mesures données suggèrent que ce rapport valait 3
  1,Rois 7.23 : « Il fit la mer en métal fondu, de dix coudées de bord à bord, à pourtour circulaire de cinq coudées de hauteur , un fil de trente coudées en faisait le tour »
- En Grèce (vers 250 av.JC), Archimède calcule la longueur du cercle en l'encadrant par 2 polygones réguliers, l'un inscrit et l'autre circonscrit. Avec des polygones à 96 côtés, il obtient un rapport compris entre 223/71 et 22/7, soit environ 3.1408 et 3,1428. La valeur de 22/7 va rester longtemps admise comme une approximation satisfaisante de π , simple à utiliser. Remarquons que c'est cette valeur qui apparaît lorsqu'on fait une cocarde avec une bande de 7 cm de large !

Par la suite, des valeurs toujours plus précises sont obtenues en Chine, en Inde et au Moyen-Orient, puis en Europe à partir du moyen âge.

Le développement des techniques de calculs permet, à partir du 17e siècle, d'approcher π avec plus de précision : 16 décimales en 1665 (Newton), 100 décimales en 1706 (Machin).

Les ordinateurs ont récemment permis de pulvériser ces records : 4 milliards de décimales en 1994, et … plus de 1000 milliards aujourd'hui.

<u>Pour en savoir plus</u> :

des sites web consacrés à π : http://www.pi314.net/fr/index.php

http://www.nombrepi.com/

un livre fondamental : Le fascinant nombre π (Jean-Paul Dalahaye)

Annexes