



En un coup de ciseau

(sur un article d'Erik D. Demaine)

Shaula Fiorelli Vilmart

UniGe

19 novembre 2009



On dessine un polygone sur une feuille.

Problème

Peut-on plier la feuille pour pouvoir ensuite découper le polygone en un seul coup de ciseau rectiligne ?

Nous nous restreindrons ici aux polygones convexes.



On dessine un polygone sur une feuille.

Problème

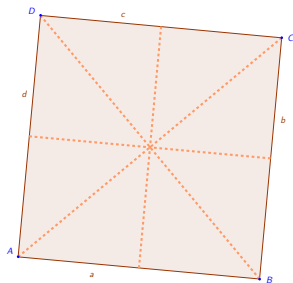
Peut-on plier la feuille pour pouvoir ensuite découper le polygone en un seul coup de ciseau rectiligne ?

Problème équivalent

Peut-on plier la feuille de telle manière à ramener tous les côtés du polygone sur un seul côté ?

Nous nous restreindrons ici aux polygones convexes.

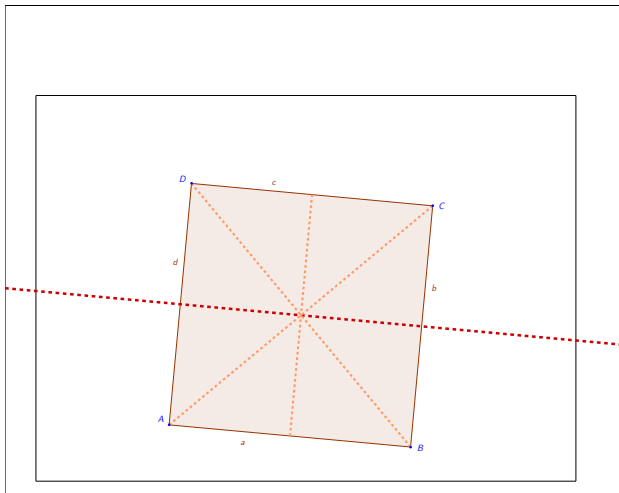
Polygones réguliers - le carré



Comment ramener tous les côtés du carré sur un seul ?

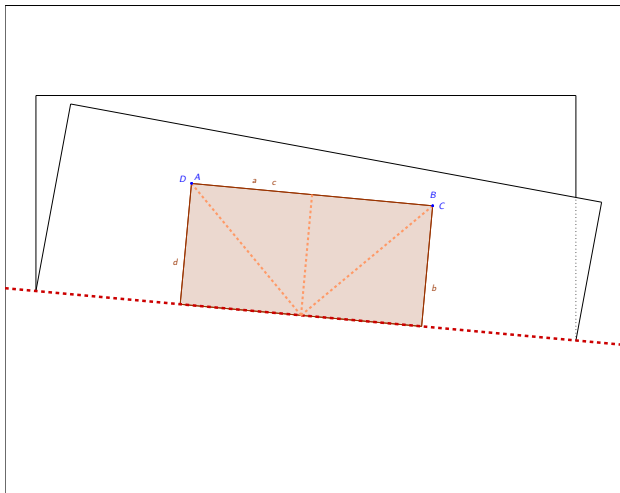
Le carré possède 4 axes de symétrie

Polygones réguliers - le carré

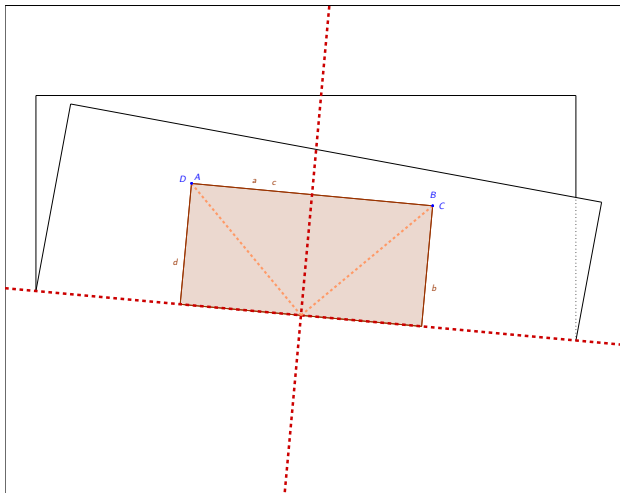


- **Idée** : on plie sur un axe de symétrie, p.ex. sur la médiatrice de deux côtés

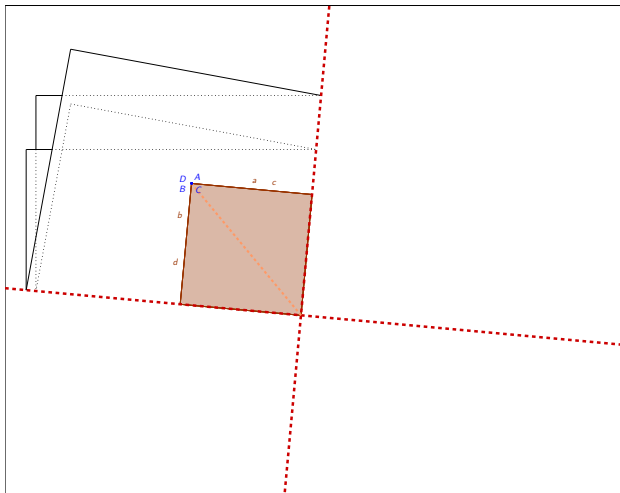
Polygones réguliers - le carré



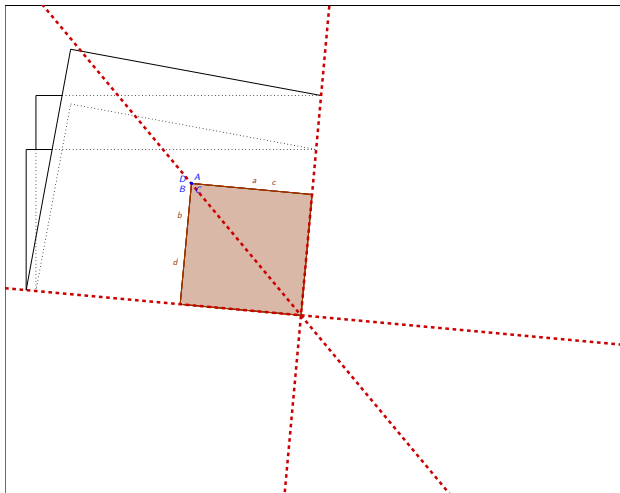
- **Idée** : on plie sur un axe de symétrie, p.ex. sur la médiatrice de deux côtés
⇒ on obtient un rectangle



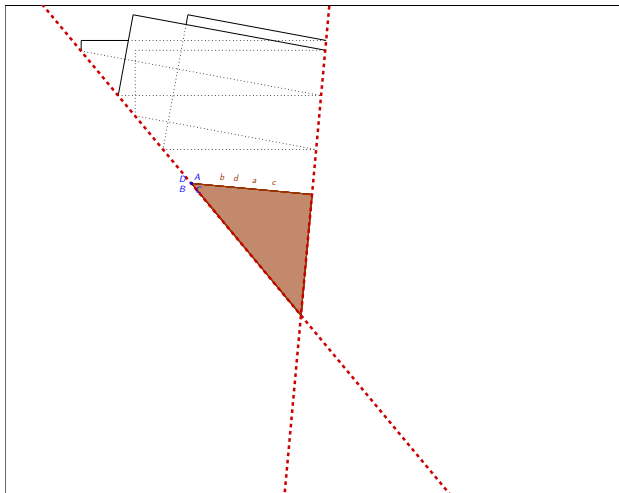
- **Idée** : on plie sur un axe de symétrie, p.ex. sur la médiatrice de deux côtés
⇒ on obtient un rectangle
- On plie sur l'axe de symétrie commun au carré et au rectangle



- **Idée** : on plie sur un axe de symétrie, p.ex. sur la médiatrice de deux côtés
⇒ on obtient un rectangle
- On plie sur l'axe de symétrie commun au carré et au rectangle
⇒ on obtient un carré

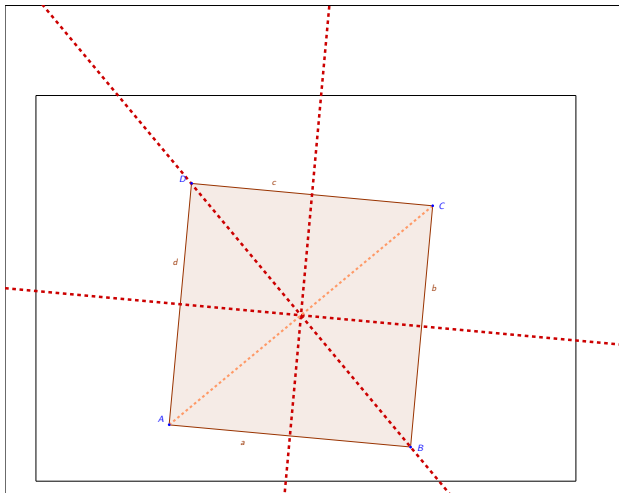


- **Idée** : on plie sur un axe de symétrie, p.ex. sur la médiatrice de deux côtés
⇒ on obtient un rectangle
- On plie sur l'axe de symétrie commun au carré et au rectangle
⇒ on obtient un carré
- On plie sur l'axe de symétrie commun aux deux carrés



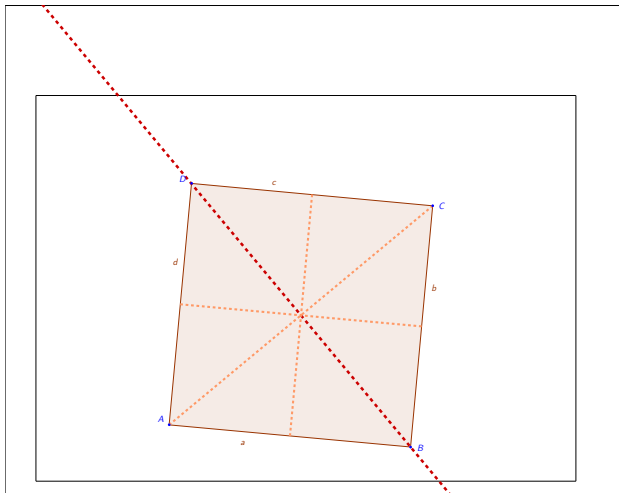
- **Idée** : on plie sur un axe de symétrie, p.ex. sur la médiatrice de deux côtés
⇒ on obtient un rectangle
- On plie sur l'axe de symétrie commun au carré et au rectangle
⇒ on obtient un carré
- On plie sur l'axe de symétrie commun aux deux carrés
⇒ on peut couper

Polygones réguliers - le carré



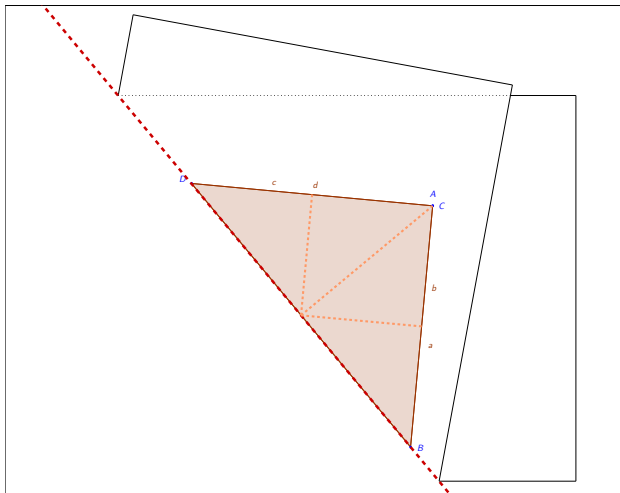
Nous avons commencé par plier sur une médiatrice.

Polygones réguliers - le carré



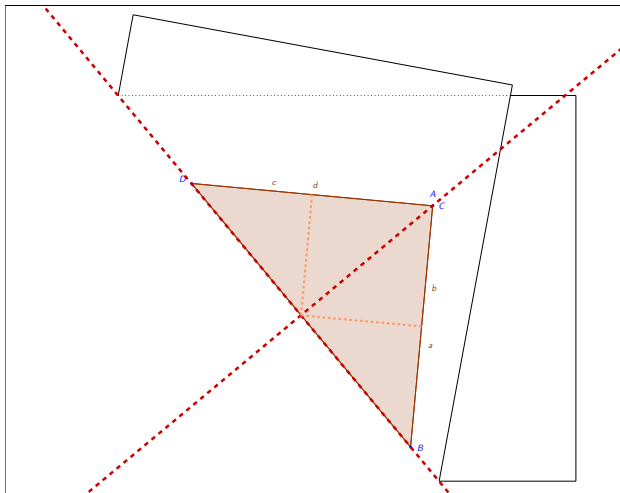
- Commençons maintenant par plier sur une diagonale.

Polygones réguliers - le carré



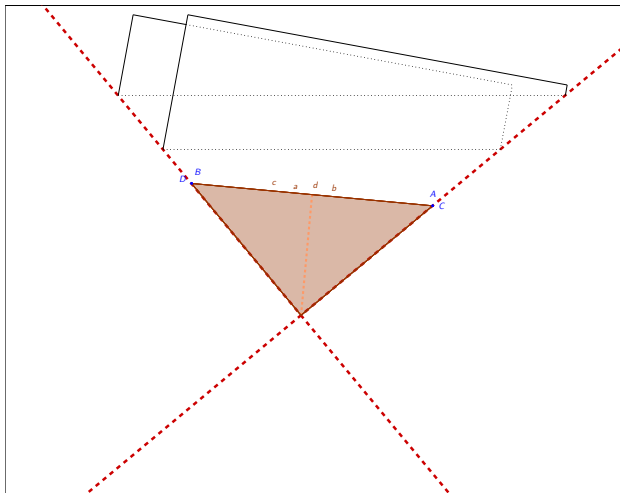
- Commençons maintenant par plier sur une diagonale.
⇒ on obtient un triangle (isocèle)

Polygones réguliers - le carré



- Commençons maintenant par plier sur une diagonale.
⇒ on obtient un triangle (isocèle)
- on plie sur l'axe de symétrie commun au carré et au triangle isocèle

Polygones réguliers - le carré



- Commençons maintenant par plier sur une diagonale.
⇒ on obtient un triangle (isocèle)
- on plie sur l'axe de symétrie commun au carré et au triangle isocèle
⇒ on obtient une nouvelle façon de découper le carré.

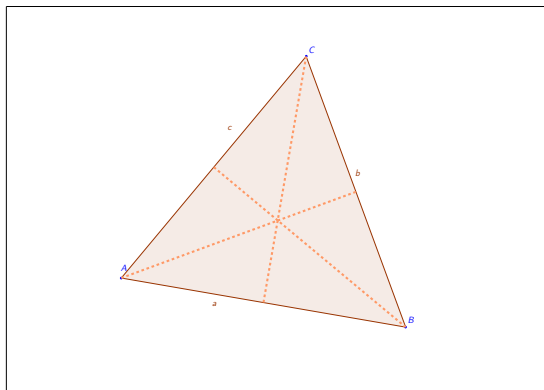


- La résolution du problème fournit une introduction aux axes de symétrie.
- Il existe une troisième méthode en trois plis qui utilise uniquement les axes de symétrie.
- Dans le cas particulier du carré, les axes de symétrie du carré sont aussi les axes de symétrie de la forme pliée.
- Quelle est la façon de plier qui minimise le nombre de plis ?

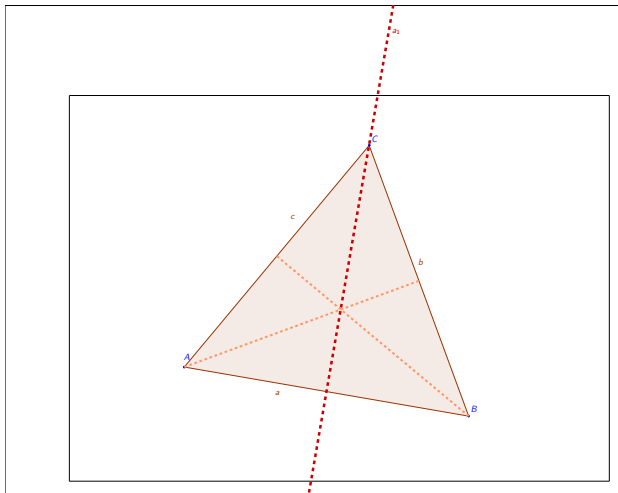
Polygones réguliers - le triangle équilatéral



Le triangle équilatéral a
3 axes de symétrie



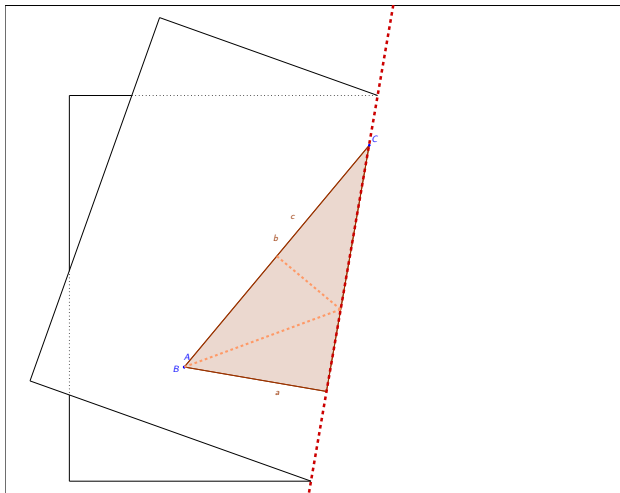
Polygones réguliers - le triangle équilatéral



Le triangle équilatéral a
3 axes de symétrie

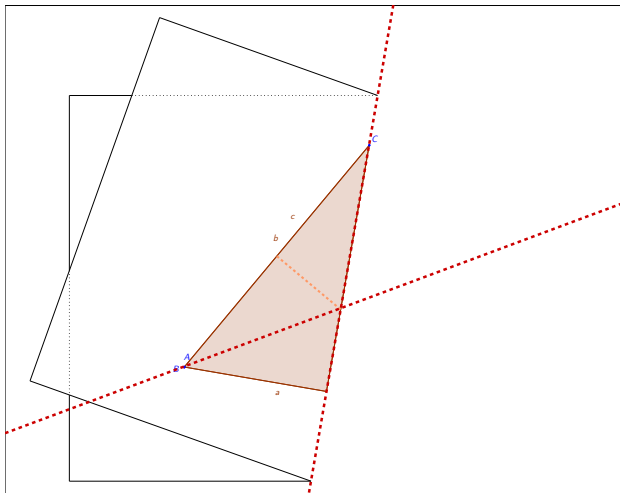
- on plie sur un axe de symétrie

Polygones réguliers - le triangle équilatéral



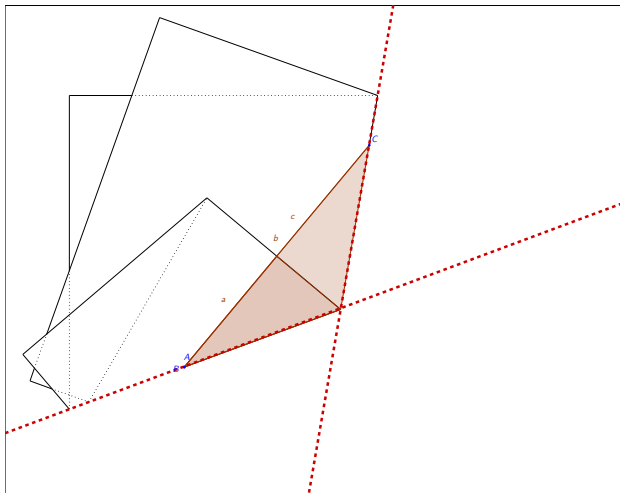
Le triangle équilatéral a
3 axes de symétrie

- on plie sur un axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)



Le triangle équilatéral a
3 axes de symétrie

- on plie sur un axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)
- on plie sur un axe de symétrie du triangle équilatéral

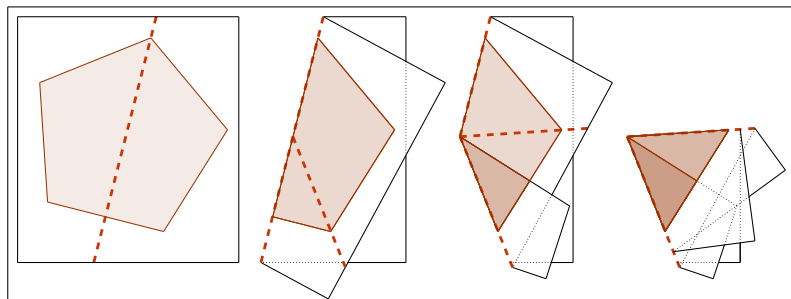


Le triangle équilatéral a
3 axes de symétrie

- on plie sur un axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)
- on plie sur un axe de symétrie du triangle équilatéral
⇒ on peut couper

Remarquons que si l'on plie sur l'autre axe de symétrie, on ne gagne rien

Polygones réguliers - le pentagone



Pour le pentagone, on plie toujours sur les axes de symétrie.

On récapitule



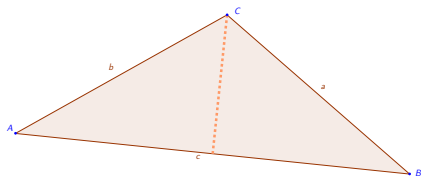
Dans le cas d'un polygone convexe, on plie sur :

- 1 les axes de symétrie (s'ils existent)

Triangle isocèle



Le triangle isocèle a un axe de symétrie

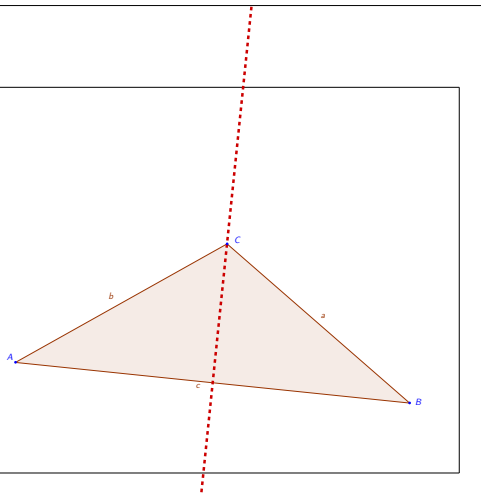


Triangle isocèle

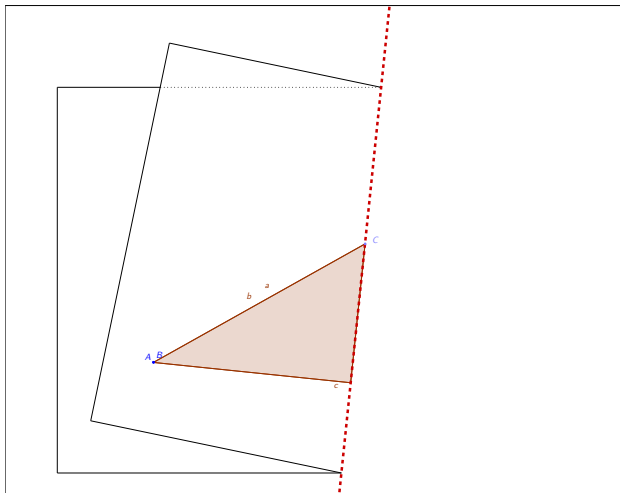


Le triangle isocèle a un axe de symétrie

- on plie sur l'axe de symétrie



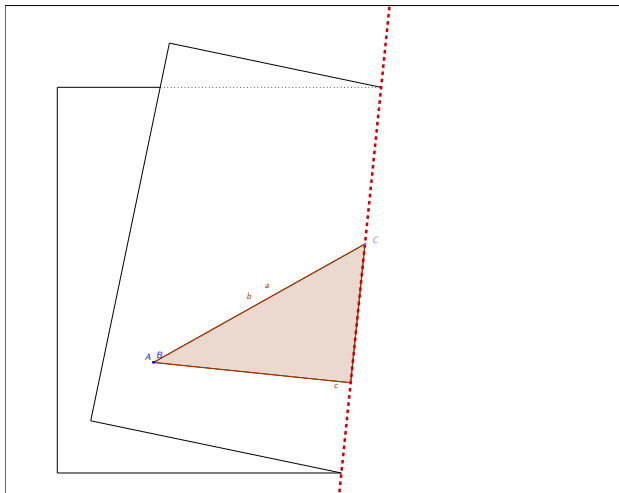
Triangle isocèle



Le triangle isocèle a un axe de symétrie

- on plie sur l'axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)

Triangle isocèle

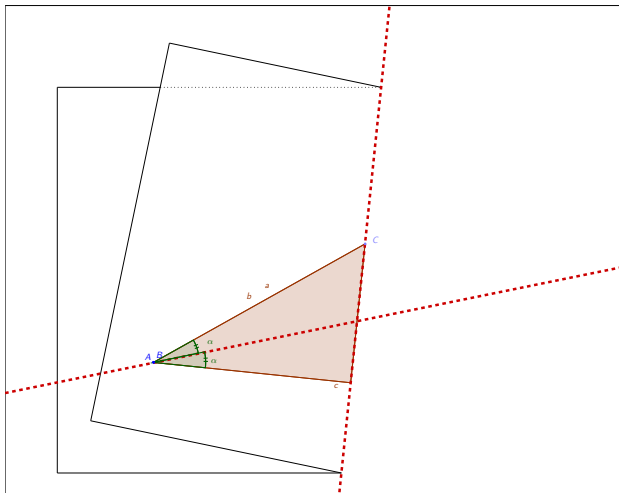


Le triangle isocèle a un axe de symétrie

- on plie sur l'axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)

On veut ramener le côté c sur le côté a

Triangle isocèle



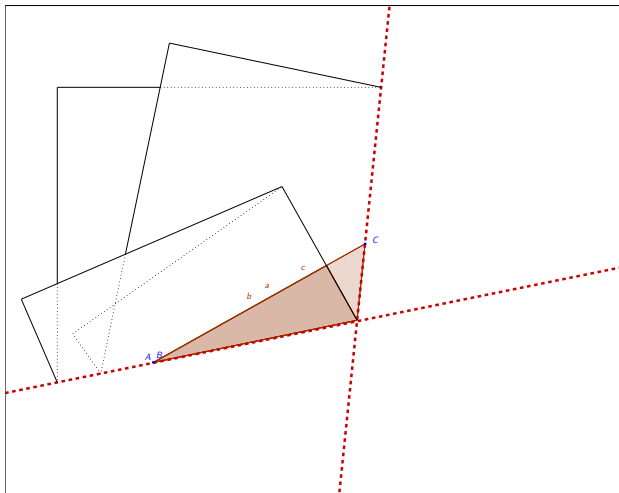
Le triangle isocèle a un axe de symétrie

- on plie sur l'axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)

On veut ramener le côté c sur le côté a

- **Idée** : on plie sur la **bissectrice** de l'angle

Triangle isocèle



Le triangle isocèle a un axe de symétrie

- on plie sur l'axe de symétrie
⇒ on obtient un triangle (rectangle)

On veut ramener le côté c sur le côté a

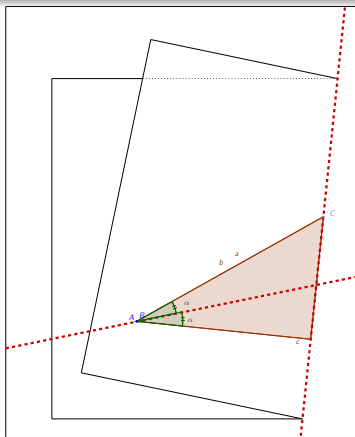
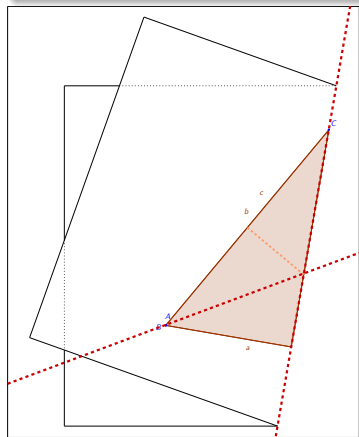
- **Idée** : on plie sur la **bissectrice** de l'angle
⇒ on peut couper



Comparaison avec le triangle équilatéral

Remarque

Dans le cas des polygones réguliers, après un certain nombre de plis, la figure pliée ne possède plus d'axes de symétrie ; nous plions alors sur les axes de symétrie du polygone original. Nous utilisons le fait que ces axes de symétrie sont confondus avec les bissectrices.

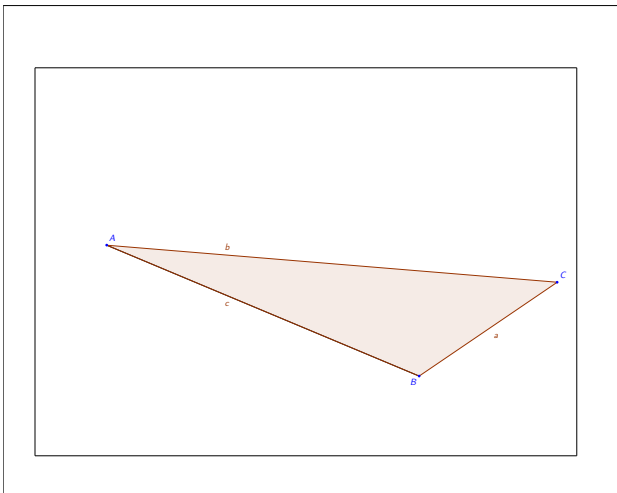




Dans le cas d'un polygone convexe, on plie sur :

- 1 les axes de symétrie (s'ils existent)
- 2 les bissectrices
(pli montagne)

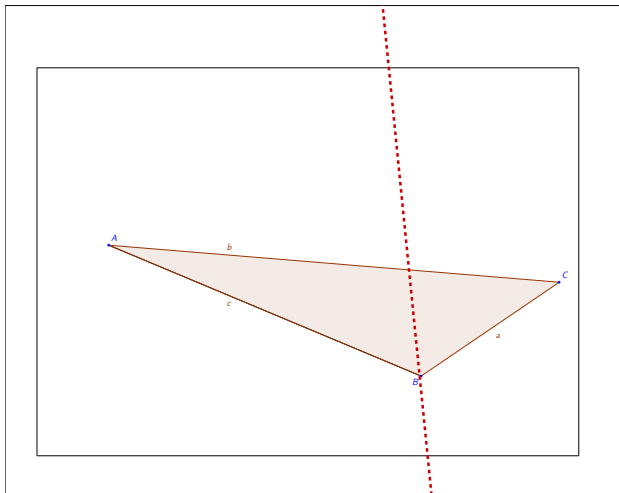
Triangle quelconque



On plie sur :

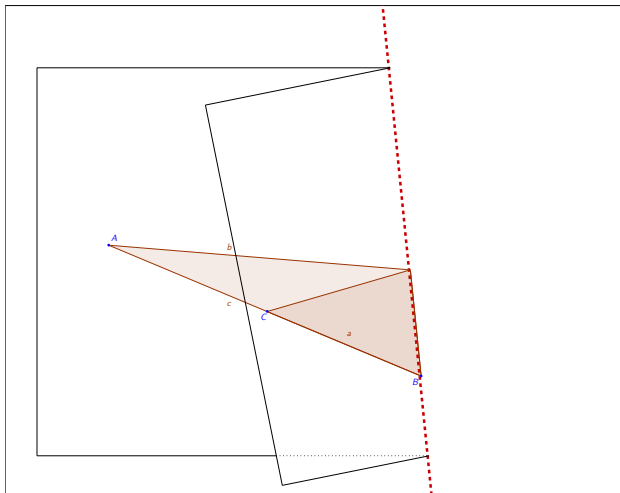
- 1 les axes de symétrie :
pas d'axe de symétrie

Triangle quelconque



On plie sur :

- ② les bissectrices :
On plie sur la
bissectrice de l'angle
en B



On plie sur :

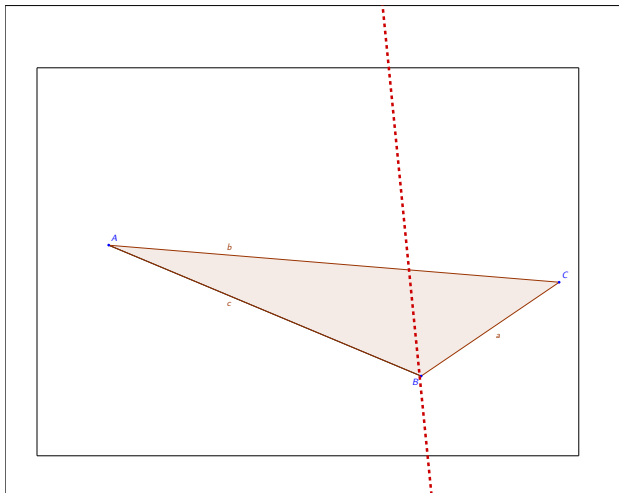
② les bissectrices :

On plie sur la bissectrice de l'angle en B

- ▶ a se rabat sur c .
- ▶ Une partie de b ne se rabat sur aucun autre côté.

⇒ Faux

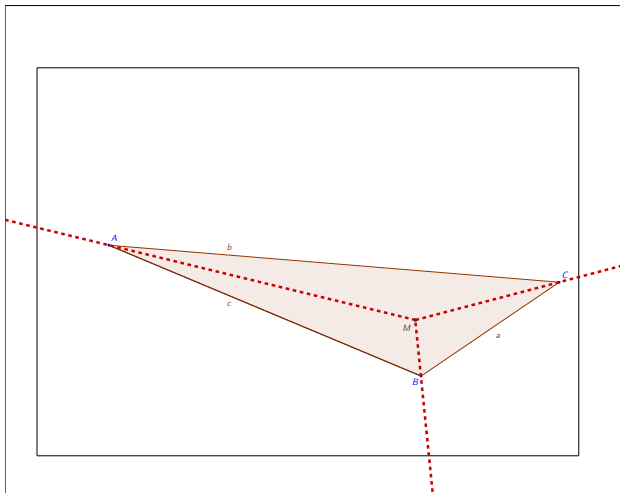
Triangle quelconque



On plie sur :

- ② les bissectrices :

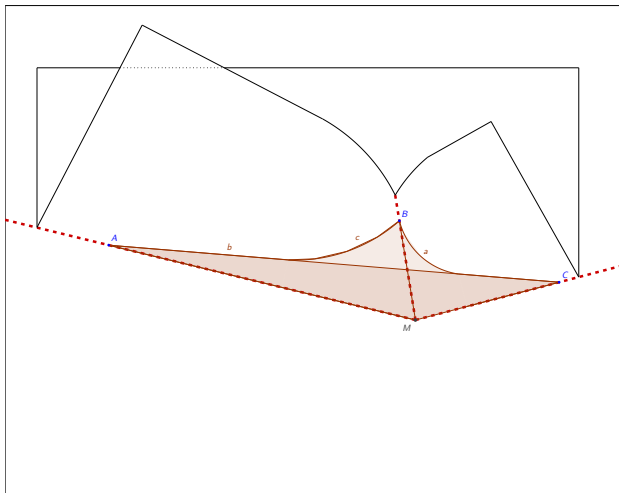
Triangle quelconque



On plie sur :

- ② les bissectrices :
On plie sur les trois bissectrices jusqu'à leur point d'intersection M

Triangle quelconque



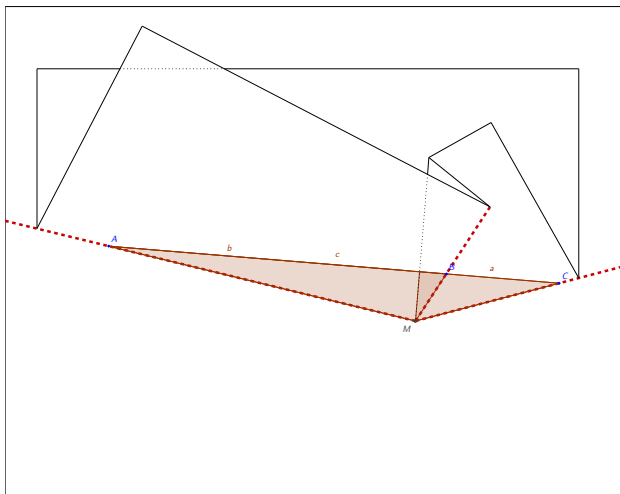
On plie sur :

② les bissectrices :

On plie sur les trois bissectrices jusqu'à leur point d'intersection M

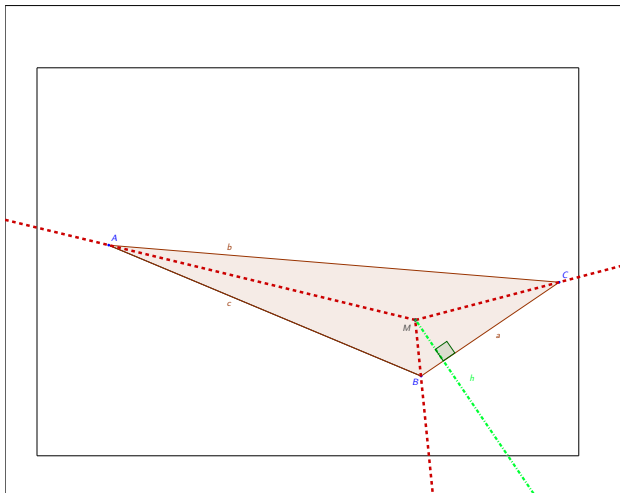
On obtient un objet qui n'est pas plat.

Triangle quelconque



En rabattant
simultanément c et a sur
 b , on forme un nouveau pli
qui permet de découper.

Triangle quelconque



On déplie :
le nouveau pli (vallée) est
la **perpendiculaire** à l'un
des côtés du triangle
 $\triangle ABC$ passant par M .



Remarque

On aurait pu utiliser cette même méthode pour tous les triangles. Cependant, en pratique, on cherche à minimiser le nombre de plis, car plier plus de huit fois une feuille en un point est physiquement impossible. Il faut donc essayer de ramener simultanément plusieurs côtés sur d'autres.

Puisque plier sur un axe de symétrie de la figure identifie deux côtés à un seul, cette procédure est optimale.



Dans le cas d'un polygone convexe, on plie sur :

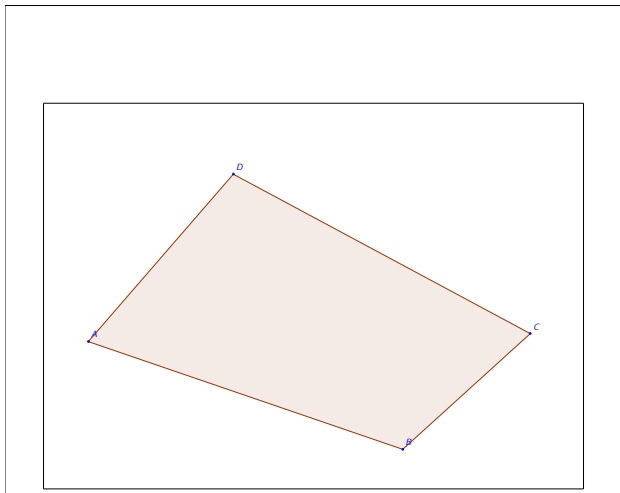
- 1 les axes de symétrie (s'ils existent)
- 2 les bissectrices **jusqu'à l'intersection d'au moins deux bissectrices**
(pli montagne)



Dans le cas d'un polygone convexe, on plie sur :

- 1 les axes de symétrie (s'ils existent)
- 2 les bissectrices jusqu'à l'intersection d'au moins deux bissectrices (pli montagne)
- 3 les perpendiculaires à l'un des côtés du polygone qui passent par le point d'intersection de deux bissectrices adjacentes (pli vallée)

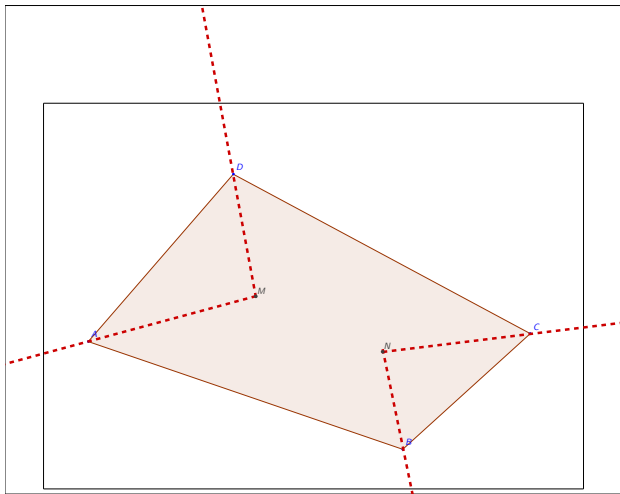
Quadrilatère quelconque



On plie sur :

- les axes de symétrie :
pas d'axe de symétrie

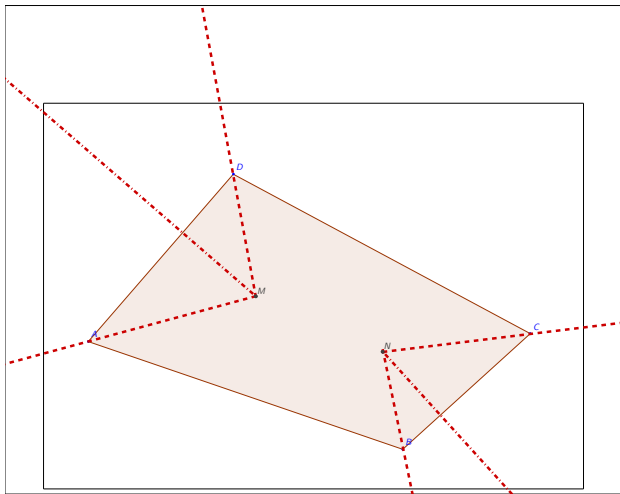
Quadrilatère quelconque



On plie sur :

- 1 les axes de symétrie :
pas d'axe de symétrie
- 2 les bissectrices
jusqu'au points
d'intersection M et N

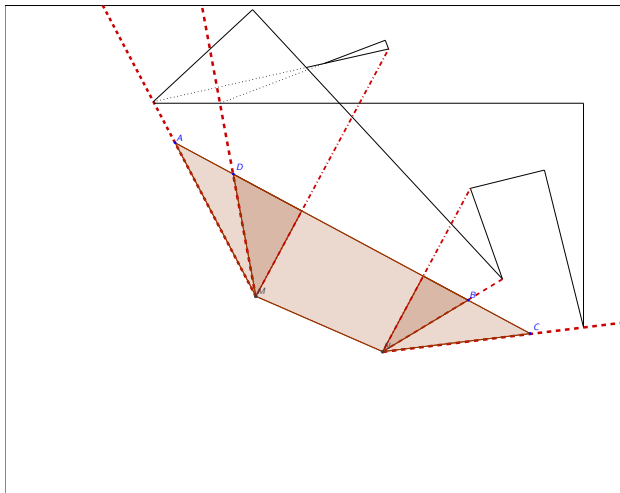
Quadrilatère quelconque



On plie sur :

- 1 les axes de symétrie : pas d'axe de symétrie
- 2 les bissectrices jusqu'au points d'intersection M et N
- 3 les perpendiculaires à AD et BC passant par M et N resp.

Quadrilatère quelconque



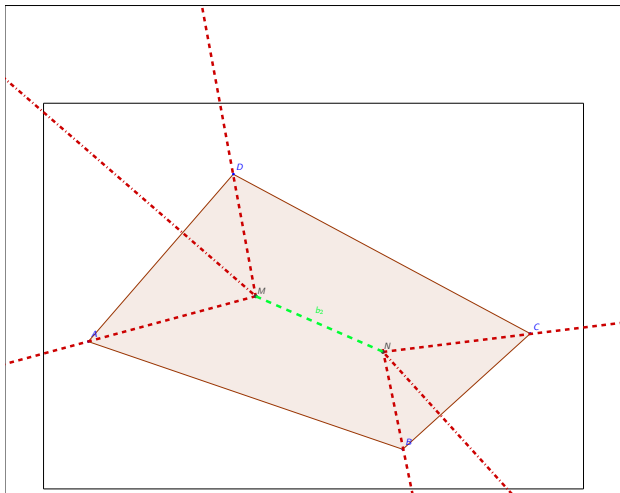
On plie sur :

- 1 les axes de symétrie : pas d'axe de symétrie
- 2 les bissectrices jusqu'au points d'intersection M et N
- 3 les perpendiculaires à AD et BC passant par M et N resp.

On obtient un objet qui est presque plat.

En rabattant AB sur DC , on forme un nouveau pli qui permet de découper.

Quadrilatère quelconque



On déplie :
le nouveau pli (montagne)
est la bissectrice de l'angle
formé par les côtés
opposés AB et DC .
Ce nouveau pli passe par
les points M et N (à
démontrer).

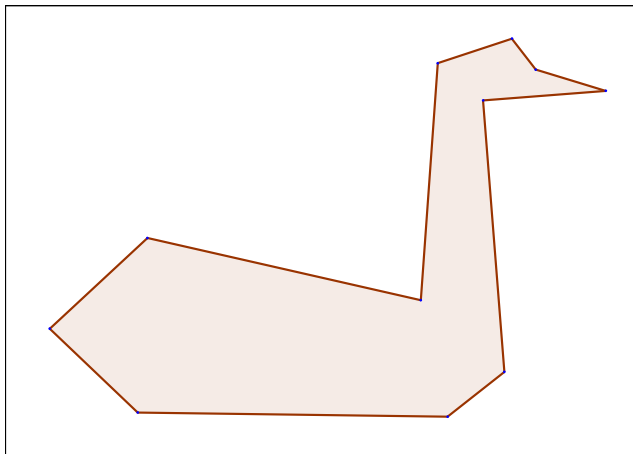


Dans le cas d'un polygone convexe, on plie sur :

- 1 les axes de symétrie (s'ils existent)
- 2 les bissectrices jusqu'à l'intersection d'au moins deux bissectrices (pli montagne)
- 3 les perpendiculaires à l'un des côtés du polygone qui passent par le point d'intersection de deux bissectrices adjacentes (pli vallée)
- 4 les bissectrices de l'angle formé par deux côtés opposés (pli montagne)

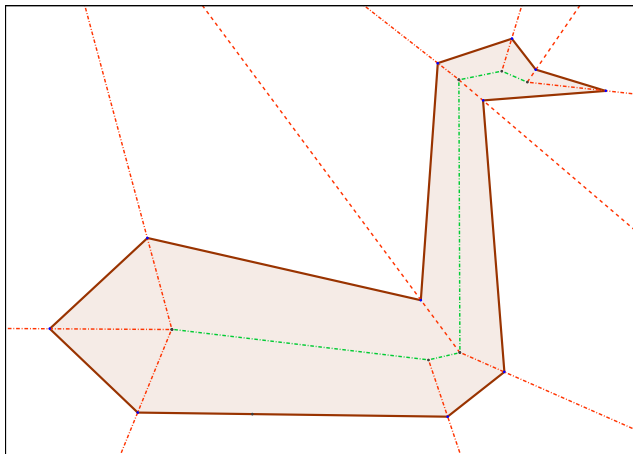


Pli	Rôle
les axes de symétrie de la forme pliée	permettent de diviser par deux le nombre de plis
les bissectrices des angles du polygone (parfois confondues avec les axes de symétrie) et les bissectrices des angles formés par deux côtés opposés	permettent de ramener tous les côtés du polygone sur un seul côté mais l'objet obtenu n'est pas plat (voir ▶ Triangle quelconque)
les perpendiculaires à l'un des côtés du polygone passant par le point d'intersection de deux bissectrices	permettent d'aplatir l'objet obtenu à l'aide des seuls plis sur les bissectrices

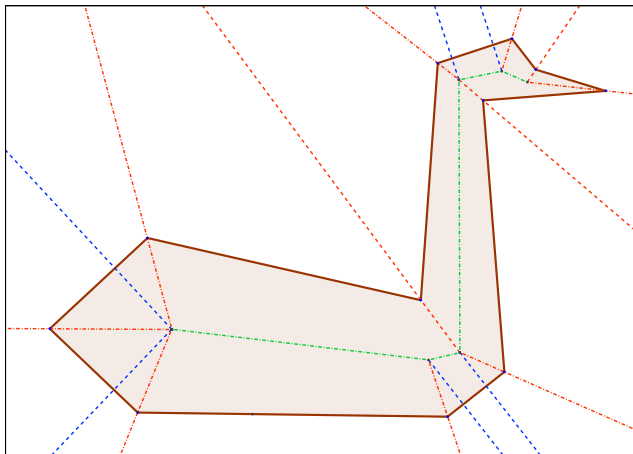


- bissectrices
angles $< 180^\circ$
pli montagne
angles $> 180^\circ$
pli vallée

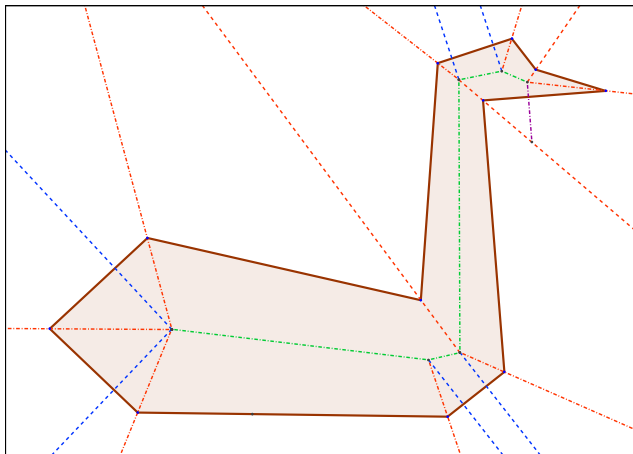
Le cygne



- bissectrices
angles $< 180^\circ$
pli montagne
- angles $> 180^\circ$
pli vallée

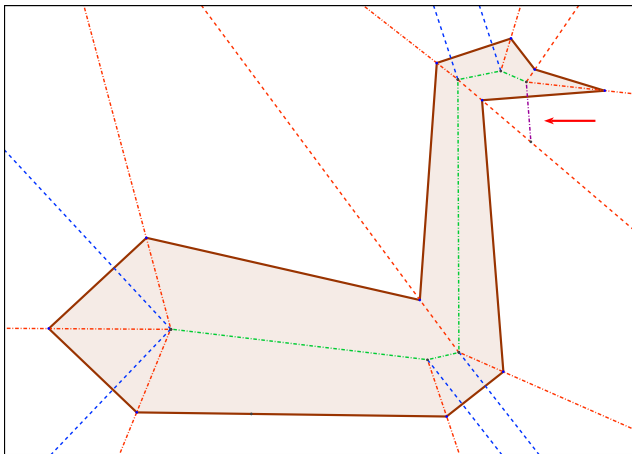


- bissectrices
angles $< 180^\circ$
pli montagne
angles $> 180^\circ$
pli vallée
- par chaque
intersection entre
deux bissectrices on
trace une
perpendiculaire à l'un
des côtés (pli vallée)



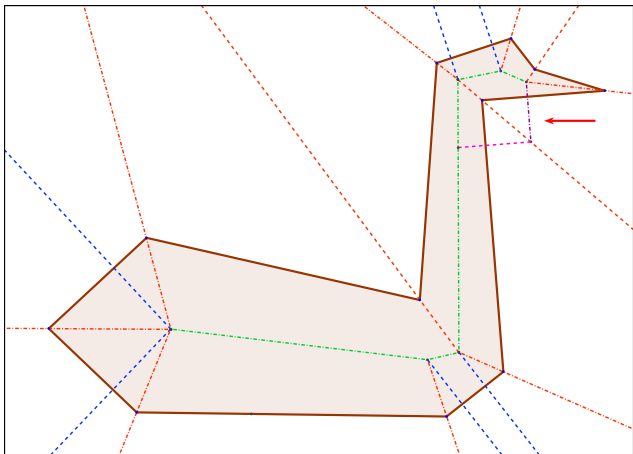
- bissectrices
angles $< 180^\circ$
pli montagne
angles $> 180^\circ$
pli vallée
- par chaque intersection entre deux bissectrices on trace une perpendiculaire à l'un des côtés (pli vallée)
- angles $> 180^\circ$, la perpendiculaire et un pli montagne

Le cygne



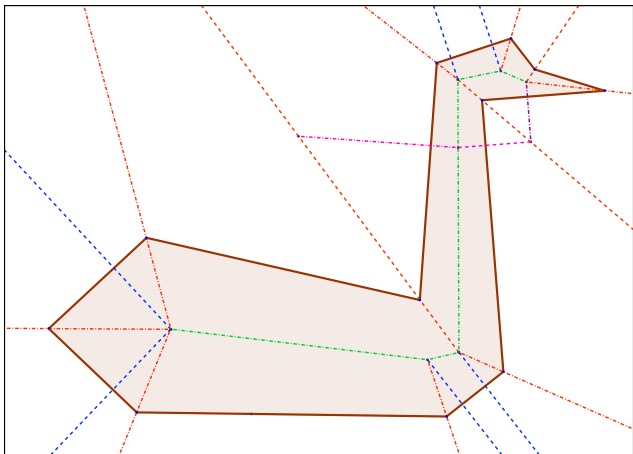
- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice,

Le cygne

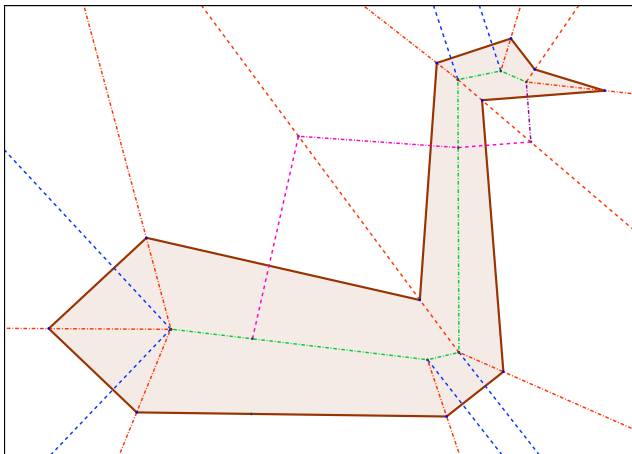


- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et on inverse le sens du pli

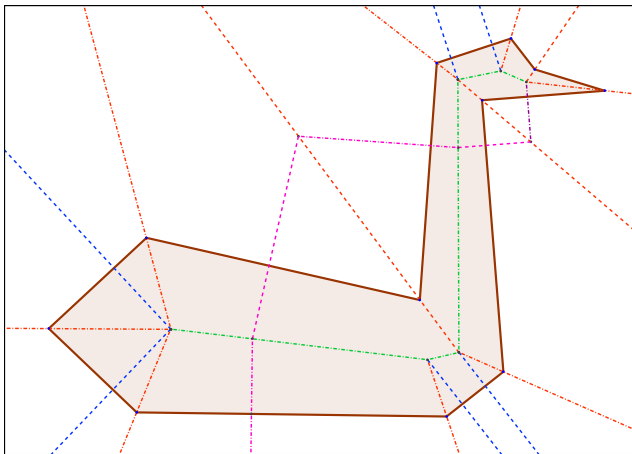
Le cygne



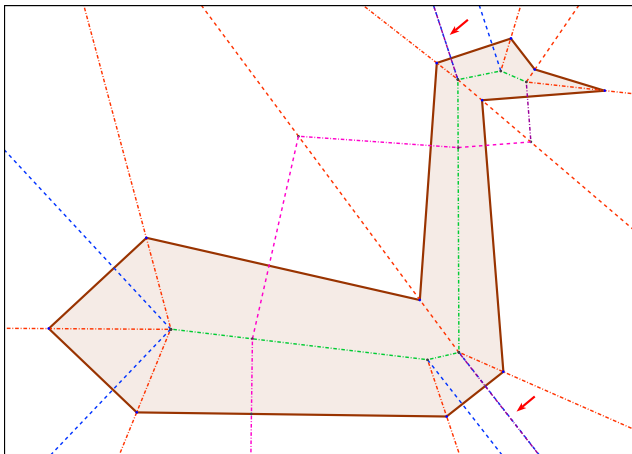
- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et on inverse le sens du pli
- on répète en alternant pli montagne/pli vallée



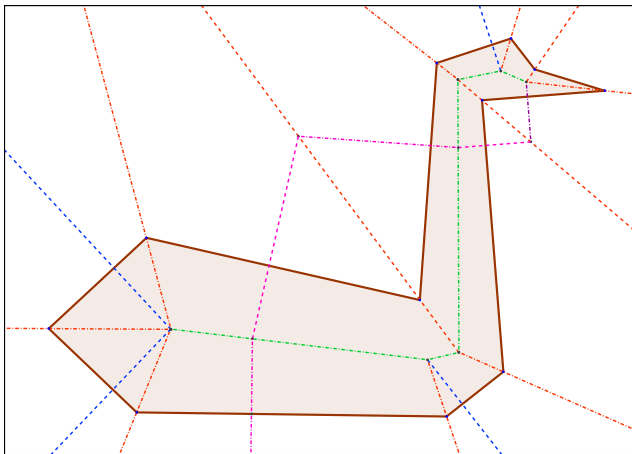
- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et on inverse le sens du pli
- on répète en alternant pli montagne/pli vallée



- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et on inverse le sens du pli
- on répète en alternant pli montagne/pli vallée



- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et on inverse le sens du pli
- on répète en alternant pli montagne/pli vallée
- dans le cas particulier du cygne, deux perpendiculaires montagne se superposent à deux perpendiculaires vallée



- si une perpendiculaire intersecte une bissectrice, on prend le symétrique par rapport à la bissectrice et on inverse le sens du pli
- on répète en alternant pli montagne/pli vallée
- dans le cas particulier du cygne, deux perpendiculaires montagne se superposent à deux perpendiculaires vallée \Rightarrow ces plis s'annulent