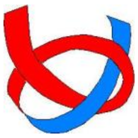
Un simple nœud

Résumé	En faisant un nœud simple dans une bande de papier, en le serrant et en l'aplatissant, on remarque que la figure obtenue est un pentagone qui semble être régulier. Est-ce vrai ? Est-il possible d'expliquer pourquoi ?
Degrés concernés	9CO-12PO
Enoncé destiné aux élèves	Voir la fiche ci-dessous
Matériel	Des bandes de papier de 2 à 3 cm de large et de 20 à 30 cm de long (découpe de feuille A4 parallèlement au côté le plus long)
Durée	1 à 2 périodes
Propositions de déroulement	Les laisser essayer de faire le nœud et découvrir le pentagone. Relance : si personne n'arrive au pentagone, leur suggérer d'aplatir et de le serrer le nœud au fur et à mesure. En groupe : les laisser discuter des conséquences mathématiques induites par le processus, en particulier essayer de décrire géométriquement les actions faites. Relance : les faire réfléchir sur les conséquences d'un pli, et les faire défaire un nœud. Si personne n'arrive à mathématiser le problème, suggérer de défaire le nœud pour voir le pliage obtenu, si personne n'y a pensé.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Dans la partie pliage, il faut essayer plusieurs fois avant d'arriver à l'équilibre entre un nœud trop lâche (qui ne se referme par bien quand on l'aplatit et un nœud trop serré qui écrase la bande dans le sens de la longueur. Avec des classes do PO en dernier degrés, il est possible que certains élèves suggèrent que le fait de serrer le nœud revient à minimiser la longueur de la bande utilisée, cette approche est techniquement difficile. Pour essayer d'induire la modélisation par plis, il est utile de

	dénouer un tel nœud aplati et d'observer. Pour essayer de faire apparaître les losanges, il peut être intéressant de faire un nœud dans une bande translucide et de la projeter pour voir apparaître les superpositions de la bande.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Modélisation mathématique d'une situation pratique. Utilisation du pli comme axe de symétrie. Lien avec la géométrie déductive, par exemple le théorème des angles alterne-internes, la somme des angles d'un triangle, la notion de polygone régulier.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence.	La notion de polygone régulier.
Pré requis	La définition de losange : Un quadrilatère avec quatre côtés isométriques. Les propriétés des losanges, en particulier le fait ques les losange ont deux axes de symétries et déduire de cela, le fait que les diagonales d'un losange se coupent à angle droit et par le milieu et qu'elles sont de plus confondues avec les bissectrices des angles dont elles sont issues. Activité préalable sur les losanges : Démontrer que si on superpose deux bandes de papiers de même largeur, la forme obtenue est un losange.
Développements possibles	Voir ce qui peut être obtenu par d'autres nœuds.



Un simple nœud

Prenez une bande de papier et faites un nœud simple, serrez doucement, jusqu’à ce que le nœud soit serré.

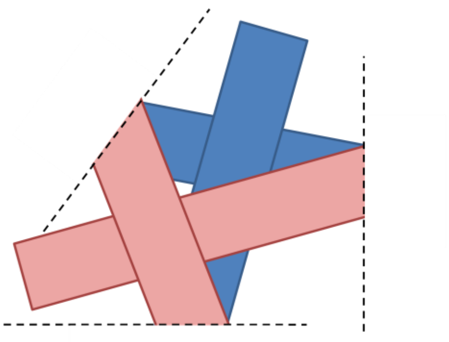
Attention il ne faut pas trop tirer pour éviter que le papier se déchire ou qu’il se froisse.

Aplatissez le nœud, que voyez-vous ?

Éléments pour la synthèse

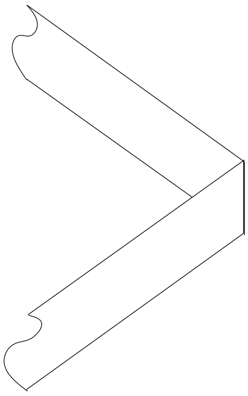
En effectuant un tel nœud dans une bande de tissus, on semble voir apparaître un pentagone régulier. Mais est-ce bien le cas ?

Essayons de prouver cela, pour ce faire, il nous faut aborder deux aspects difficiles des mathématiques que sont la modélisation et la preuve. En effet, pour pouvoir prouver que l'objet que l'on voit est bien un pentagone régulier, il nous faut tout d'abord être capable non plus de réfléchir physiquement sur une bande de papier, mais sur une idéalisation mathématique de cet objet, soit une bande dans le plan, c'est-à-dire deux droites parallèles. Il s'agit ensuite de réussir à comprendre mathématiquement ce que l'on fait quand on noue, qu'on serre et qu'on aplatit.

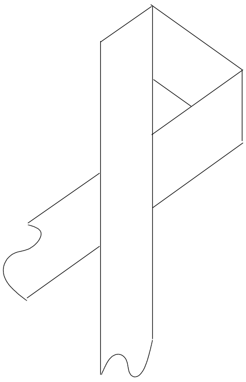


En faisant un nœud simple avec la bande de papier sans le serrer, mais en l'aplatissant, on obtient quelque chose comme ceci.

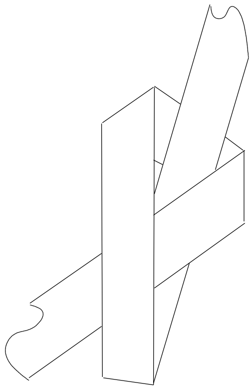
On peut décomposer ce geste en une succession de gestes plus simples permettant d'arriver au même résultat. Il suffit, comme le montrent les dessins suivants, de plier la bande trois fois en respectant quelques conditions.



Après le premier pli



Après le deuxième pli



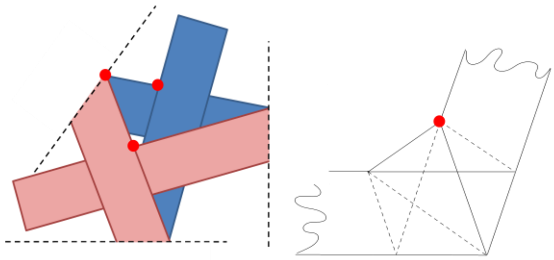
Après le troisième pli.

Il faut qu'après le deuxième pli les deux extrémités de la bande se croisent et forme une boucle. Il ne reste plus qu'à faire le troisième pli de telle sorte que l'extrémité de la bande que l'on vient de plier passe au travers de la boucle précédemment construite.

Si on noue une bande de papier sans la serrer et qu'on l'aplatit, on obtient la troisième image. La seule chose dont on peut être sûr, c'est que la largeur de la bande reste la même, mais on ne peut rien dire des intersections entre les bandes.

Cependant si on serre délicatement la bande de papier (ou de tissu), on voit que les plis semblent prendre non plus une position quelconque, mais que les angles obtenus, une fois le nœud serré, sont tous les mêmes et que certains points d'intersections (en rouge dans les dessins ci-dessous) semblent se confondre.

La modélisation mathématique du problème consiste donc à considérer le nœud comme trois plis successifs. En supposant ,de plus, que la bande ne se plie pas, c'est-à-dire que les segments de droites issus d'un pli reste parallèles, et que les points qui semblent se confondre physiquement le font effectivement.



Dans ce modèle mathématique, on peut démontrer géométriquement que le seul pentagone satisfaisant ces conditions est le pentagone régulier.

Nous renvoyons le lecteur vers la version commentée de la présentation du nœud pour cette preuve.