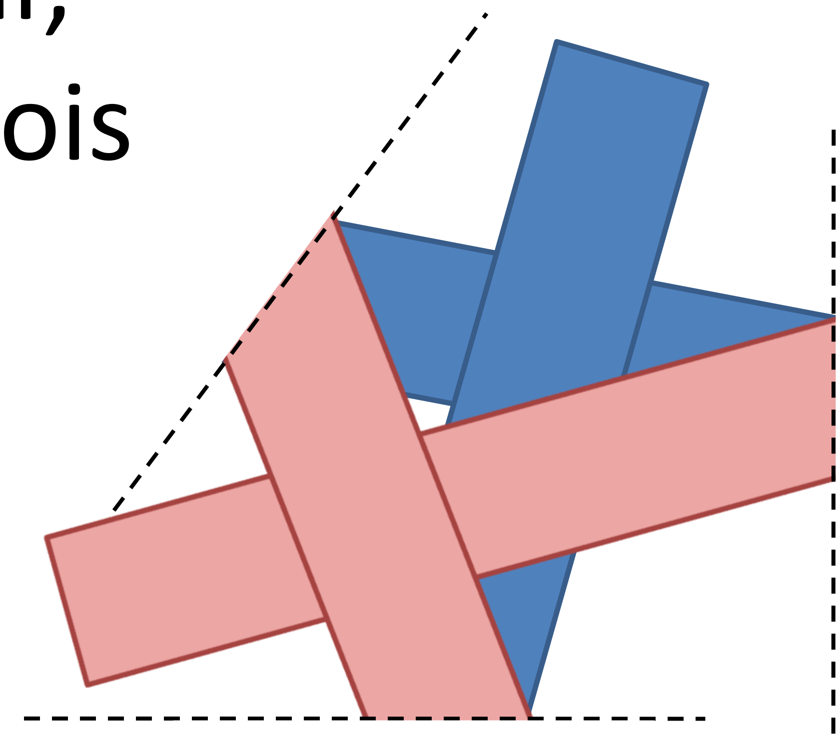
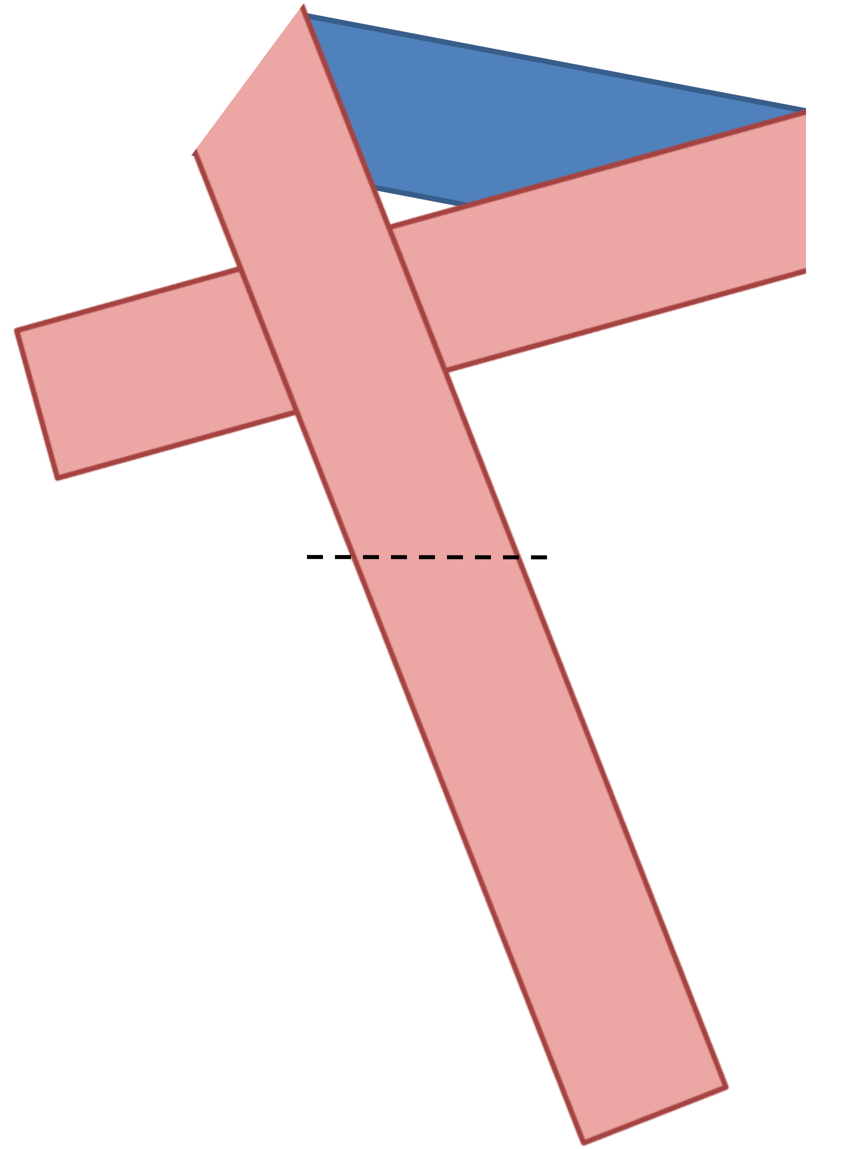
Un simple nœud

Prenez une bande de papier et faites un nœud simple, serrez doucement, jusqu'à ce que le nœud soit serré.
Aplatissez le nœud, que voyez-vous ?
Essayer de démontrer que ce que vous croyez voir est vrai.

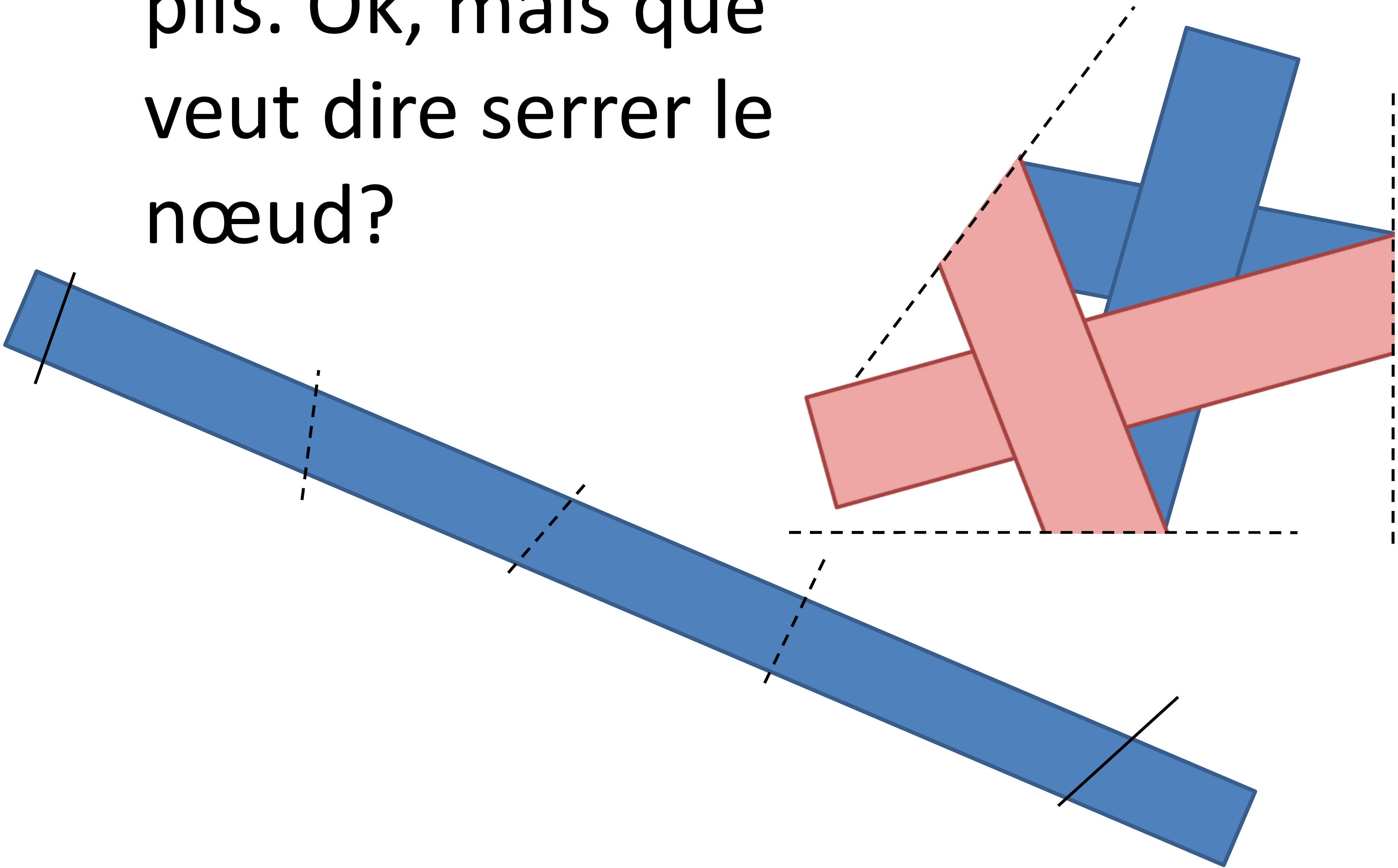
Faire un nœud simple et l’aplatir, revient à faire trois plis.



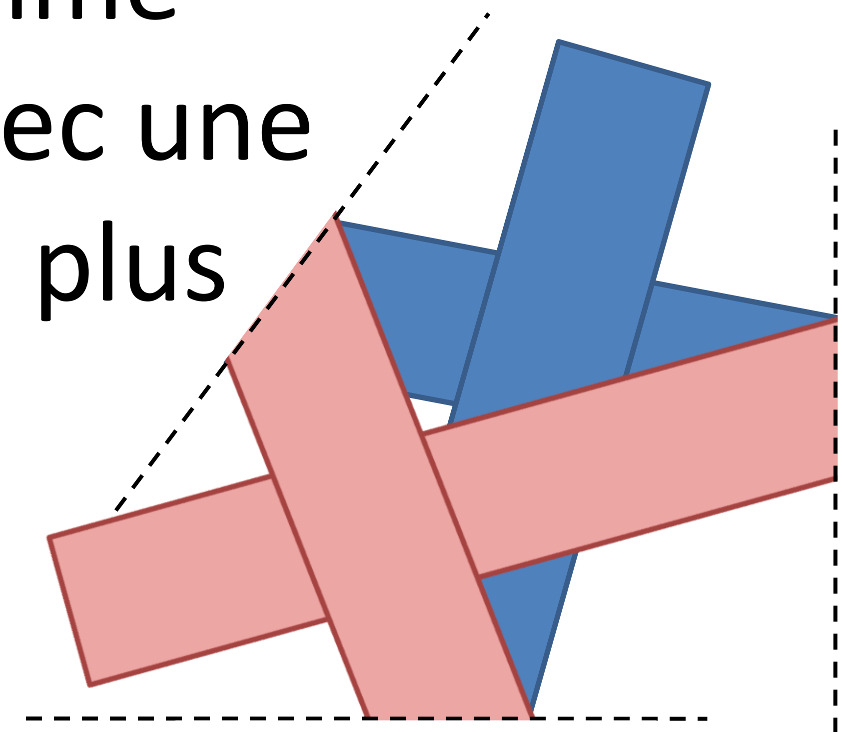
Il suffit de défaire le nœud

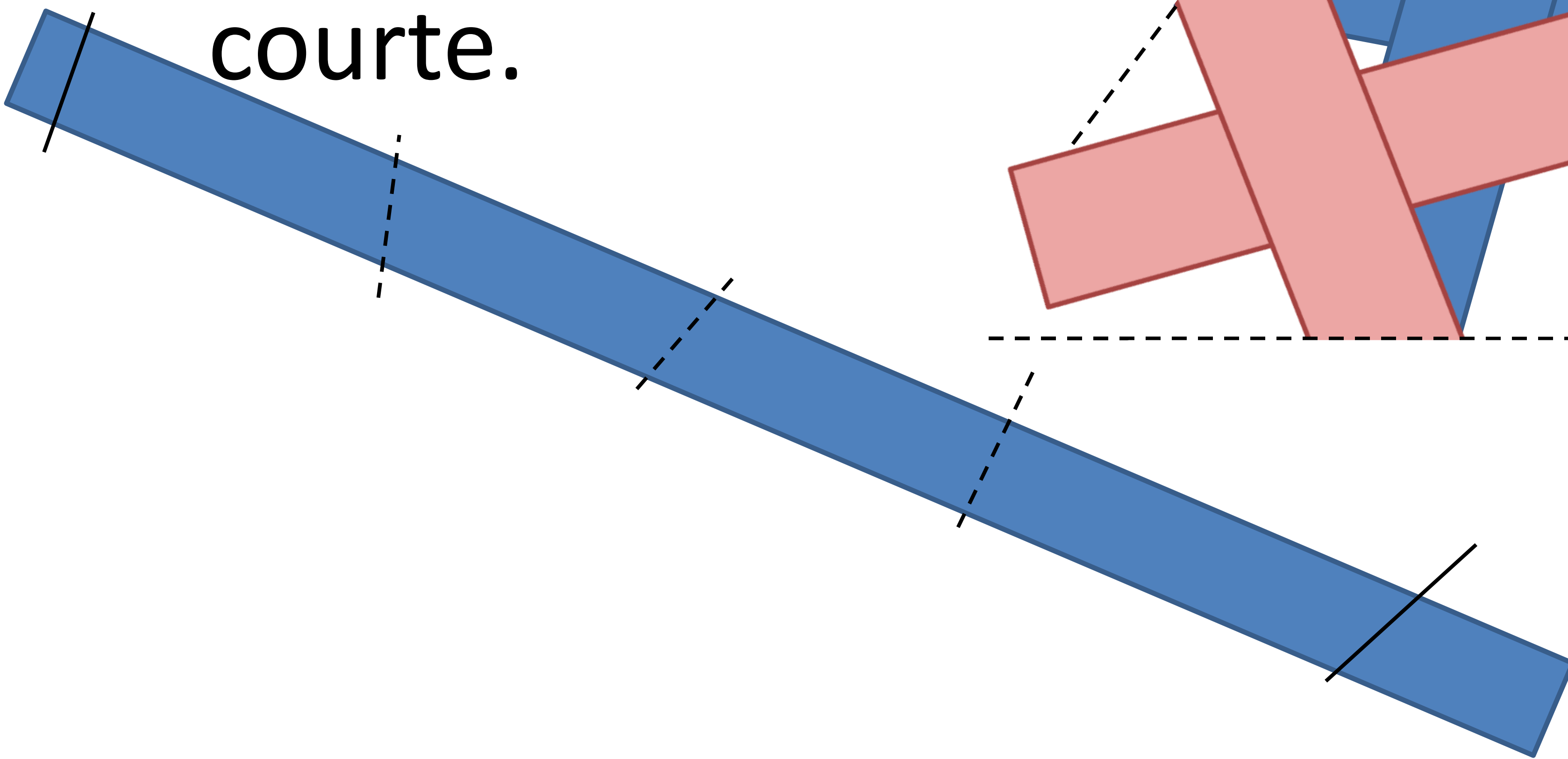


Une bande avec trois plis. Ok, mais que veut dire serrer le nœud?

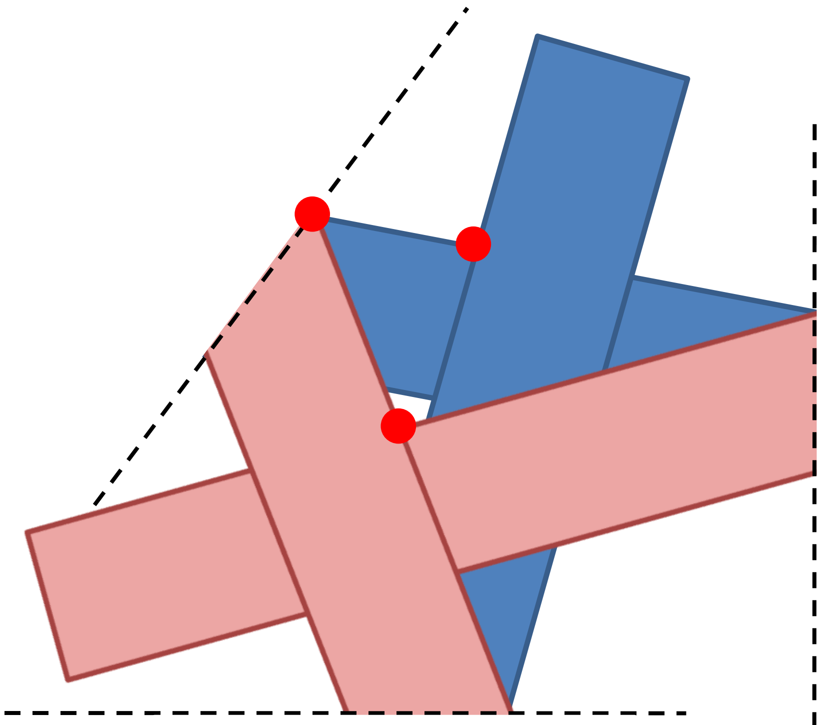


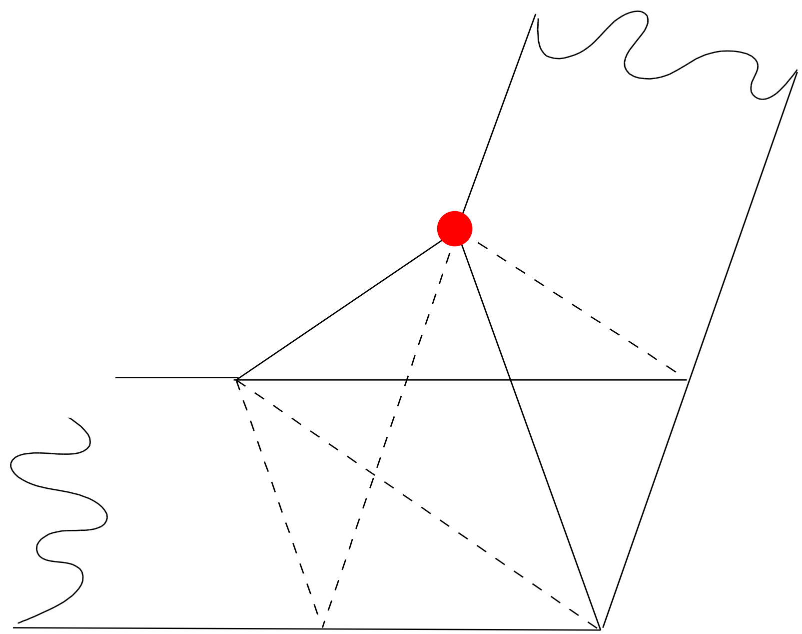
Serrer le nœud, ce pourrait être comme faire un nœud avec une bande de plus en plus courte.



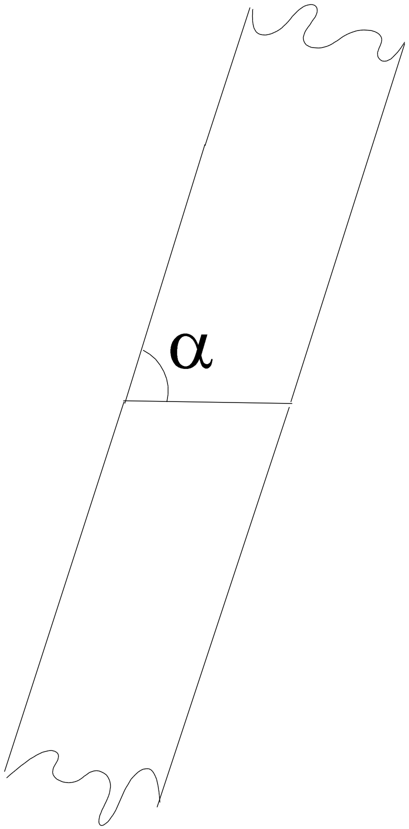


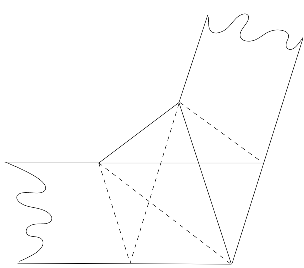
Cela revient à choisir des plis de telle sorte que certains points distincts en général coïncident.





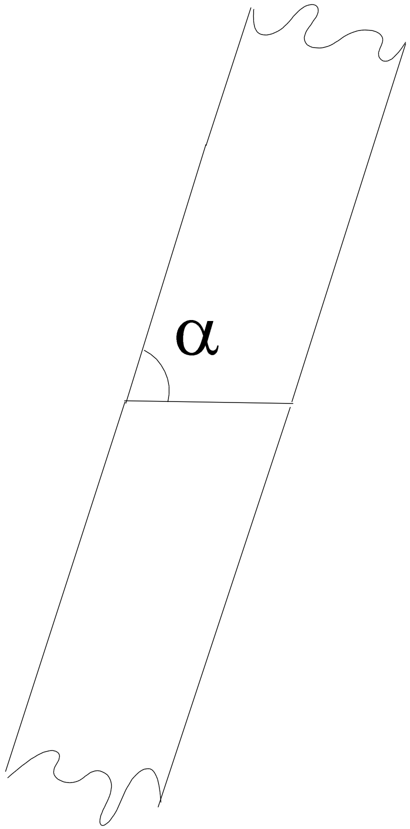
Modélisons mathématiquement les plis. Choisissons le premier pli formant un angle α entre le bord de la bande et le pli.

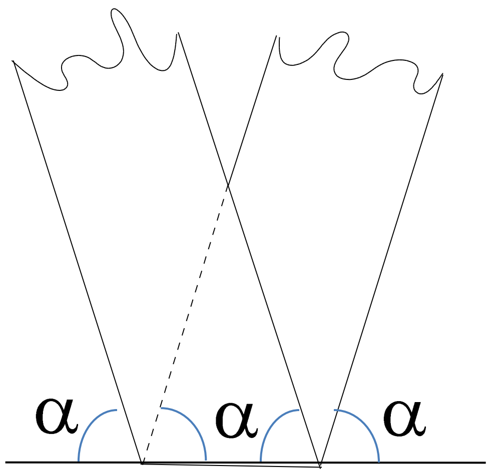


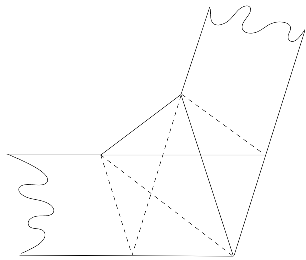


L’angle α se retrouve à plusieurs endroits. Ceci se justifie par :

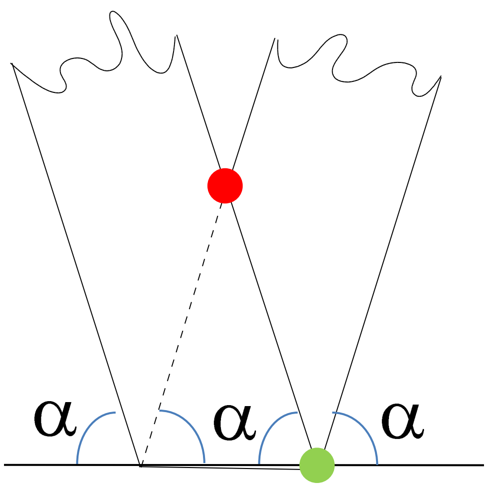
- Le théorème des angles alternes internes,
- l’égalité de deux angles opposés par un sommet
- et la préservation de l’angle par symétrie.

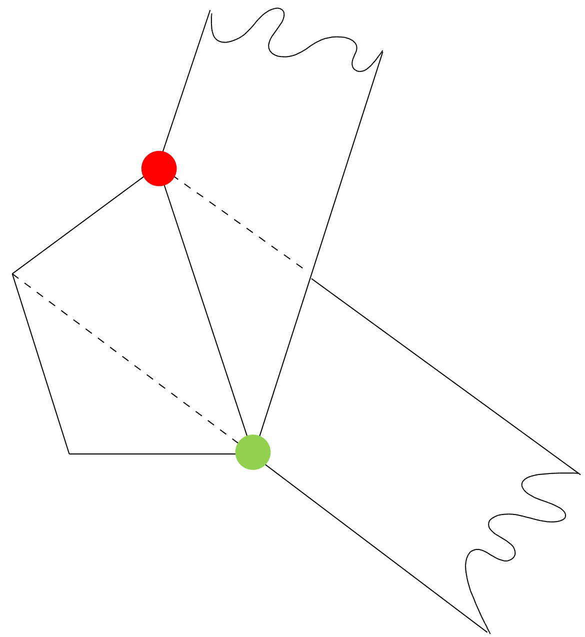


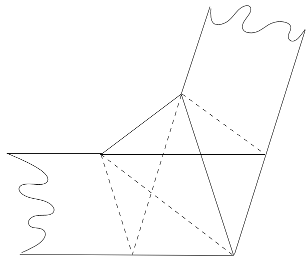




Si le premier pli est quelconque, le deuxième est par contre complètement déterminé. En effet; ce pli passe par le point rouge. L'angle est déterminé par le fait que le bord de la bande pliée passe par le point vert.





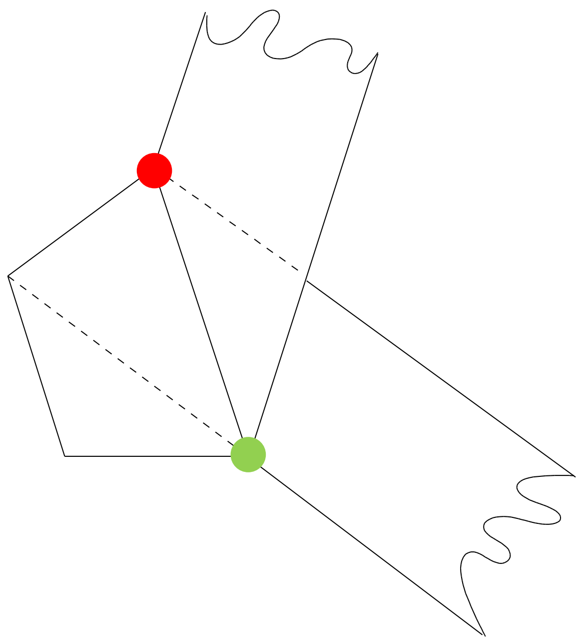


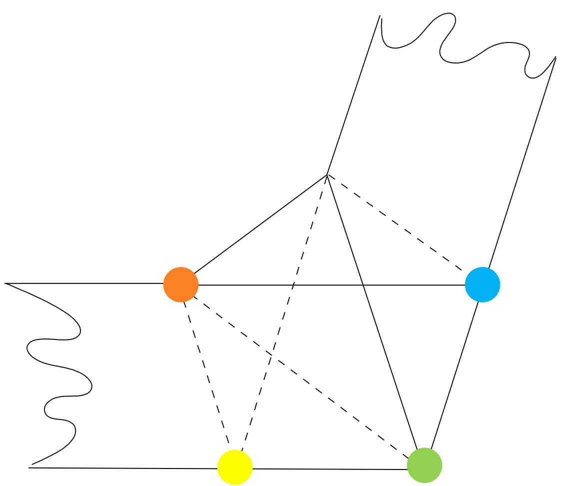
Le troisième pli, lui est non seulement déterminé, mais doit satisfaire trois conditions distinctes et qu’il n’est peut-être pas possible de réaliser simultanément :

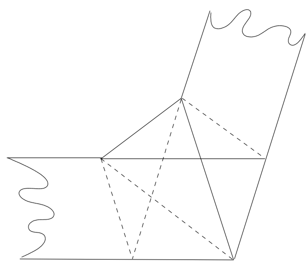
1) Ce pli passe par les points vert et bleu (ceci le définit déjà complètement).
2) Le bord inférieur de la bande pliée coïncide avec le bord défini par les points vert et jaune.
3) Et en dernier lieu, le bord supérieur de la bande pliée passe aussi par le point orange.

Ceci oblige certainement à choisir un premier angle α particulier.

☹ Mais rien ne dit qu’on puisse satisfaire toutes ces conditions simultanément. ☹

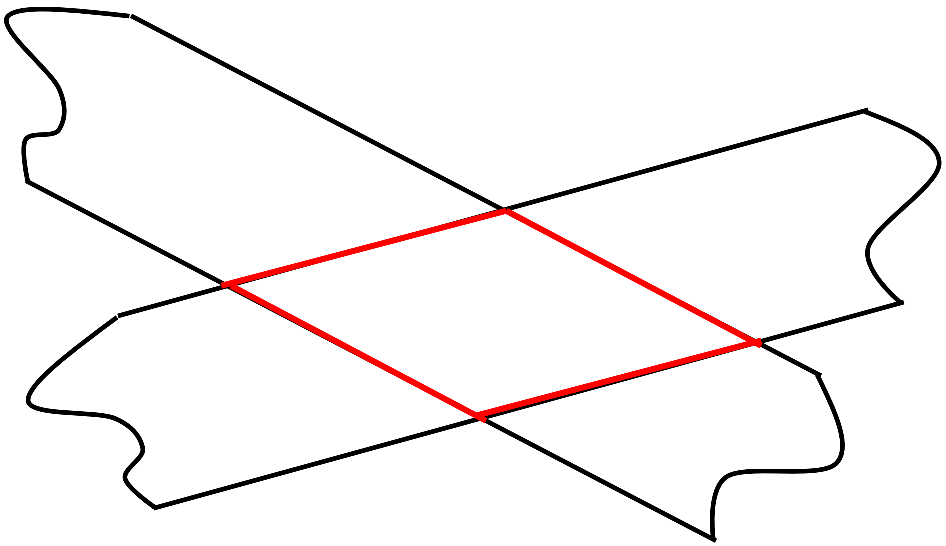






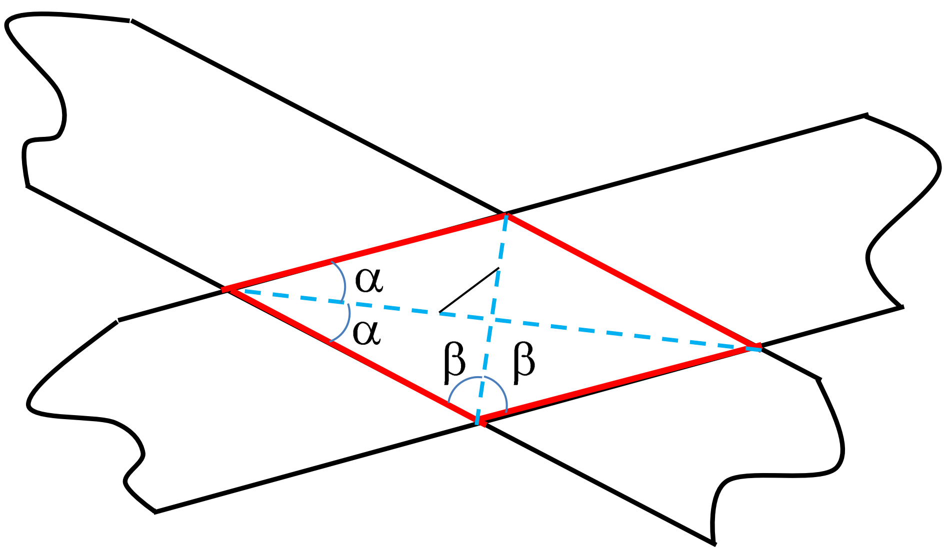
Peut-on trouver des conditions nécessaires pour que les conditions 1), 2) et 3) soient réalisées?

Quelques remarques concernant l'intersection de deux bandes de même largeur.



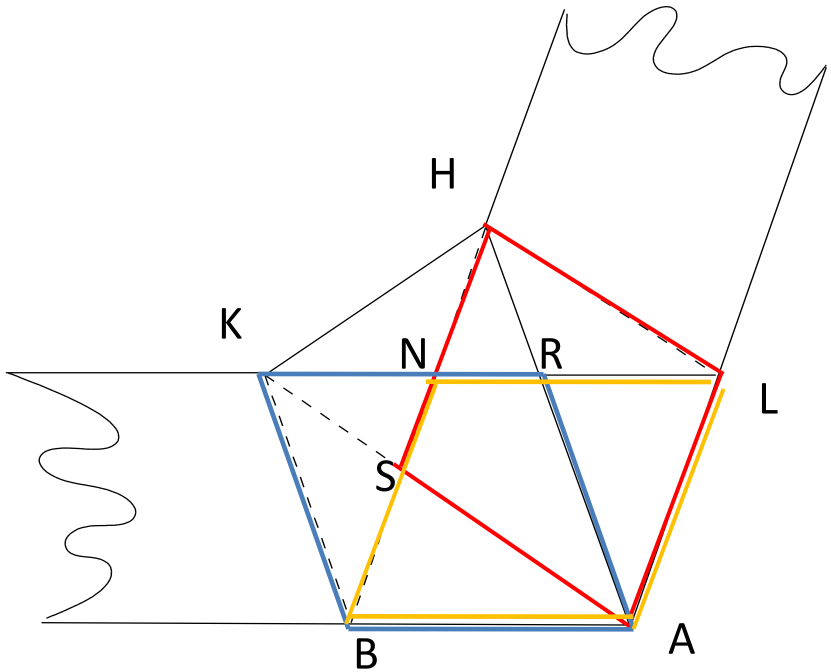
L'intersection de deux bandes de même largeur forme un losange.

Quelques remarques concernant l'intersection de deux bandes de même largeur.



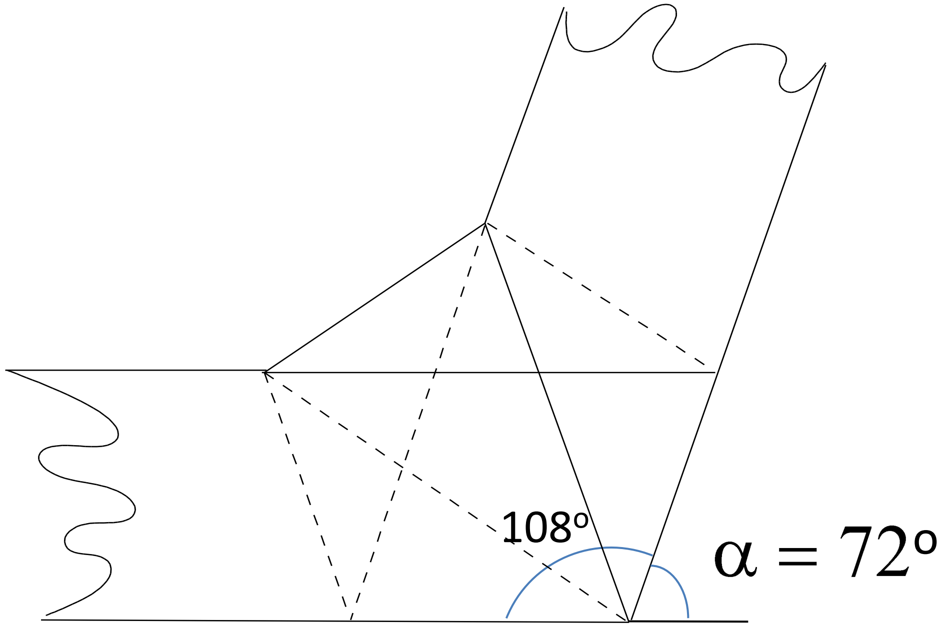
Dans un losange, les diagonales se croisent à angle droit et sont aussi les bissectrices des angles aux sommets.

Pour que toutes ces conditions soient réalisées, il suffit que les trois quadrilatères ABNL, ABKR et ALHS soient des losanges isométriques

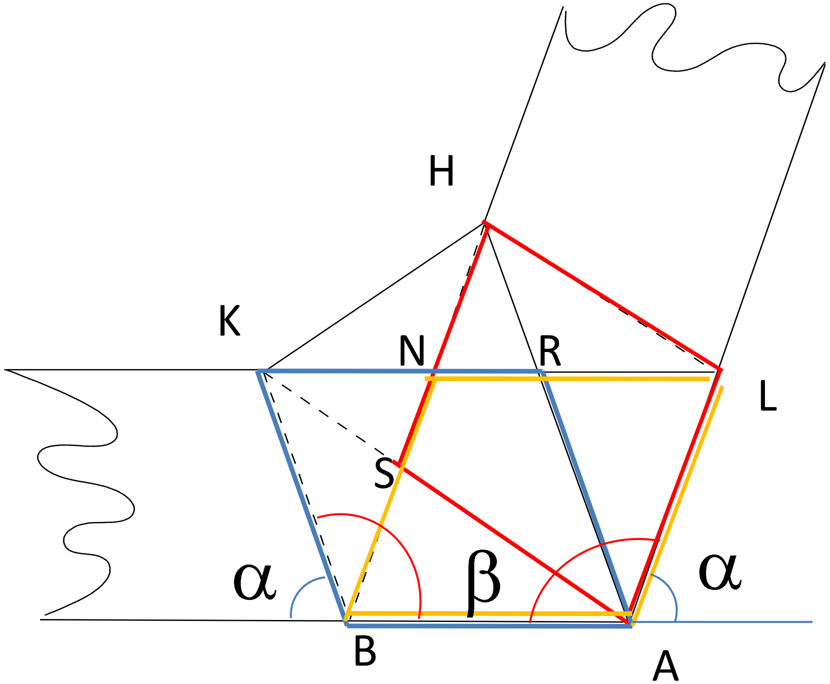


Par symétrie, le pentagone régulier satisfait les conditions du problème. Il correspond à l'angle α égal à 72^o.

Mais est-ce le seul angle α possible?



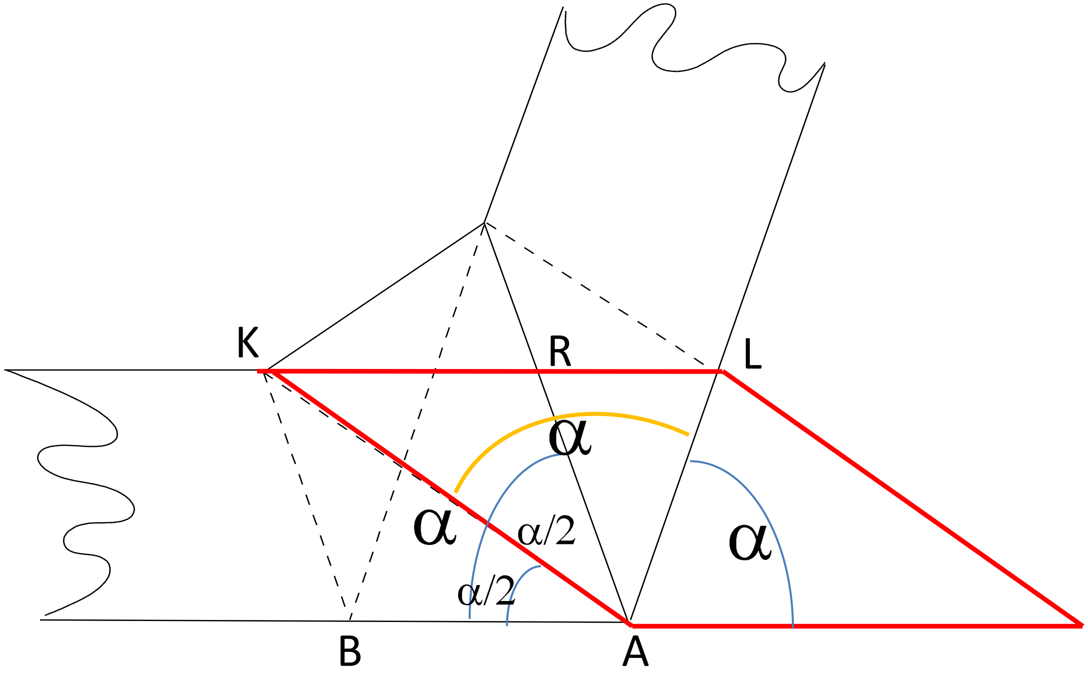
Comme les trois quadrilatères ABNL, ABKR et ALHS sont obtenus comme intersections de bandes de même largeur ce sont des losanges, mais sont-ils isométriques?
Comme l'angle β au sommet A du losange BALN et l'angle en B du losange KBAR sont isométriques et égal au complémentaire de α, ces deux losanges sont isométriques.



Remarquons un autre losange, le losange rouge ci-dessous. Son côté [A,K] correspond à la diagonale du losange ABKR. Ceci permet de déduire que les angles BAK, KAR et RAL sont tous égaux à $\alpha/2$.

On obtient donc la relation $5\alpha/2 = 180$,

d'où $\alpha = 72$.



On a bien démontré que le pentagone régulier est le seul pentagone possible satisfaisant les conditions.