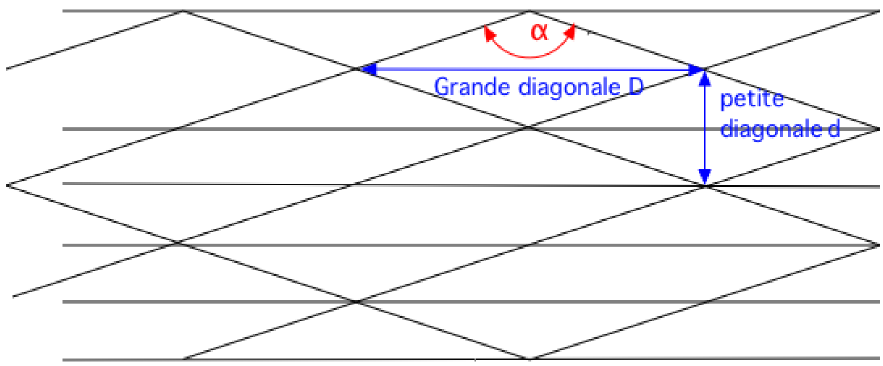
STRUCTURES PLISSEES – ELEMENTS DE SYNTHESE

Construction d'un n-gone régulier:

Au préalable il faut avoir compris le pliage décrit sous Question 1- Relance , en particulier celui permettant d'obtenir la trame en cerfs-volants.

Comme dans un polygone régulier, les angles au sommet et les côtés sont isométriques, nous devons construire une trame en losanges, cerfs-volants ayant les 4 côtés isométriques. En effet les côtés des losanges correspondent aux côtés du polygone.

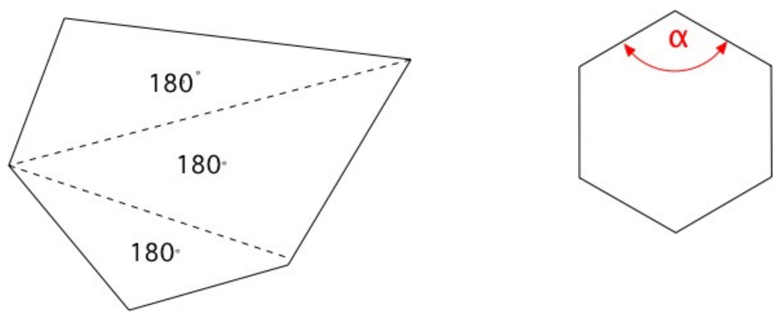
Dans la « maille » en losange, on appelle D la grande diagonale et d la petite diagonale.



Les parallèles du plissage initial donnent les plis « vallées » et les obliques (côtés des losanges) les plis « montagnes ».

Calcul de l'angle au sommet α d'un polygone régulier

Pour déterminer cet angle il faut calculer la somme des angles de ce polygone.
Comme tout polygone convexe avec n côtés est décomposable en (n-2) triangles, on peut calculer la somme des angles d'un n-gone.



Somme des angles d'un n-gone = $(n - 2)\,\pi$ ou $(n-2)\ 180°$

Ainsi dans un n-gone régulier l'angle au sommet vaut:

$$\alpha = (n-2)\frac{180^\circ}{n}$$

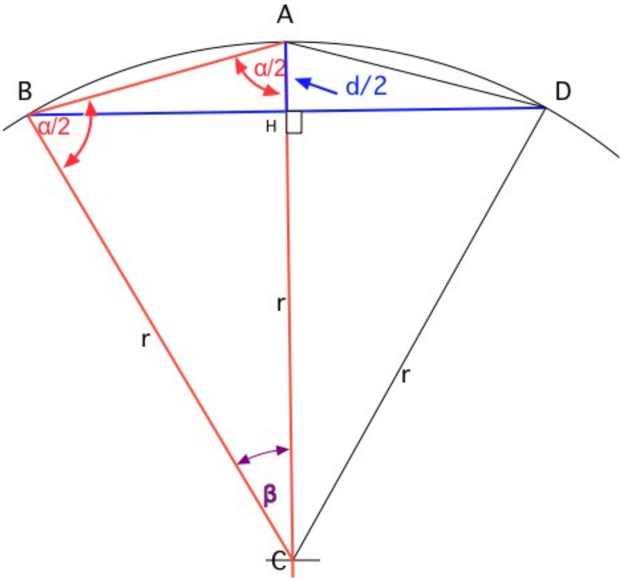
Exemple : n = 6 et $\alpha = (6-2)\frac{180^\circ}{6} = 120^\circ$

Calcul de la petite diagonale d du losange permettant de construire un n-gone de rayon r donné

Considérons dans la figure ci-dessous le triangle isocèle ABC et

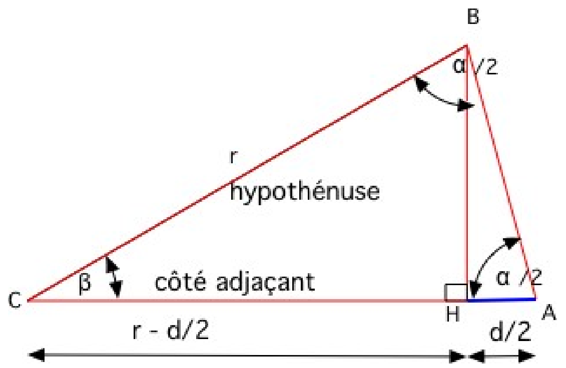
Appelons β l'angle au centre $\widehat{ACB}$

n étant connu il est possible de calculer β



$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

Considérons le triangle BCH , rectangle en $\widehat{H}$



Pour une valeur de r donnée CH = r- d/2

Rappel

Dans un triangle rectangle le cosinus d'un angle aigu est égal au quotient

$$\cos\beta = \frac{(longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ cet\ angle)}{(longueur\ de\ l'\ hypoténuse)}$$

Dans le triangle CHB on peut donc poser l'égalité suivante

$$\frac{(r-\frac{d}{2})}{r} = \cos\beta$$

Le rayon r et l'angle β étant connus on peut calculer d la petite diagonale du losange

$$r-\frac{d}{2} = r\cos\beta$$

$$\frac{d}{2} = r(1-\cos\beta)$$

$$d = 2r(1-\cos\beta)$$

Cas limite:

Pour que le pliage soit possible n ≥ 4

En effet : $\frac{d}{2} \leq r$

Donc $r(1-cos\beta) \leq r$

$1-\cos\beta \leq 1$

$\cos\beta \geq 0$

d'où $\beta = \frac{360^\circ}{n} \leq 90^\circ$ et n ≥ 4

Calcul de la grande diagonale D

Considérons le triangle ABH rectangle en H .

Rappel:

Dans un triangle rectangle la tangente d'un angle aigu est égale au quotient

$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{(longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ cet\ angle)}{(longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ cet\ angle)}$$

Dans le triangle ABH on peut poser l'égalité suivante

$$tg\,\frac{\alpha}{2}=\frac{BH}{AH}=\left(\frac{D}{2}\right)\left(\frac{2}{d}\right)=\frac{D}{d}$$

$$D=d\,tg\,\frac{\alpha}{2}$$

Quelques mesures des diagonales d et D du losange pour différentes valeurs de n :

n	α = $(n-2)\frac{180^\circ}{n}$	β = $\frac{360^\circ}{n}$	α/2	cos β	tg α/2	$d=2r(1-\cos\beta)$	D = d tg α/2
4	90°	90°	45°	0	1	2 r	2 r
6	120°	60°	60°	0,5	~1,732	r	r $\sqrt{3}$ ou ~1,732r
8	135°	45°	67,5°	~0,707	~2,355	~0,586 r	~1,38 r
10	144°	36°	72°	~0,809	~3,077	~0,382 r	~1,175 4 r
12	150°	30°	15°	~0,806	~3,732	~0,268 r	~1,0001 r

CONCLUSION:

Si notre but est de construire par ce moyen un n-gone régulier de rayon r donné, il est nécessaire de dessiner au préalable la trame .

Pour cela il faut connaître d et D ; en effet l'écartement des droites parallèles est donné par d/2 et la distance entre deux noeuds est D