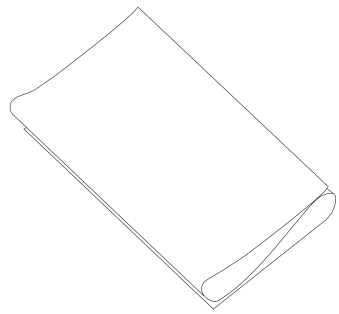
Plier une feuille en trois

Résumé	Plusieurs méthodes permettent de plier une feuille exactement en trois parties égales. Peut-on expliquer pourquoi ça marche ?
Degrés concernés	10 – 12 PO
Énoncé destiné aux élèves	Voir la fiche ci-dessous
Matériel	L'énoncé et les descriptions des différentes méthodes. Éventuellement, des feuilles de papier pour essayer les méthodes.
Durée	1 à 2 périodes
Propositions de déroulement	Travail en petits groupes. L'enseignant donne à chaque groupe l'énoncé et tout ou partie des 5 méthodes. Relances : • proposer d'essayer avec des feuilles de différentes dimensions
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Voir les éléments de synthèse
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Théorème de Thalès (méthodes 1 à 4) Trigonométrie (méthode 5)

Plier une feuille en trois – Énoncé de l'élève

Lorsqu'on doit plier une feuille A4 pour l'introduire dans une enveloppe allongée, on utilise généralement une méthode empirique et approximative.

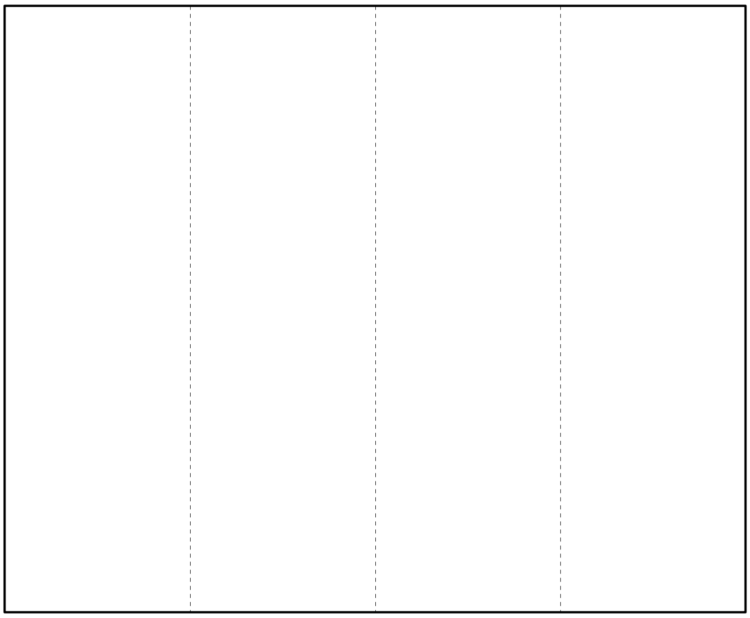


Voici différentes méthodes qui permettent de plier une feuille exactement en trois parties égales.

Pour chacune de ces méthodes, expliquez pourquoi ça marche.

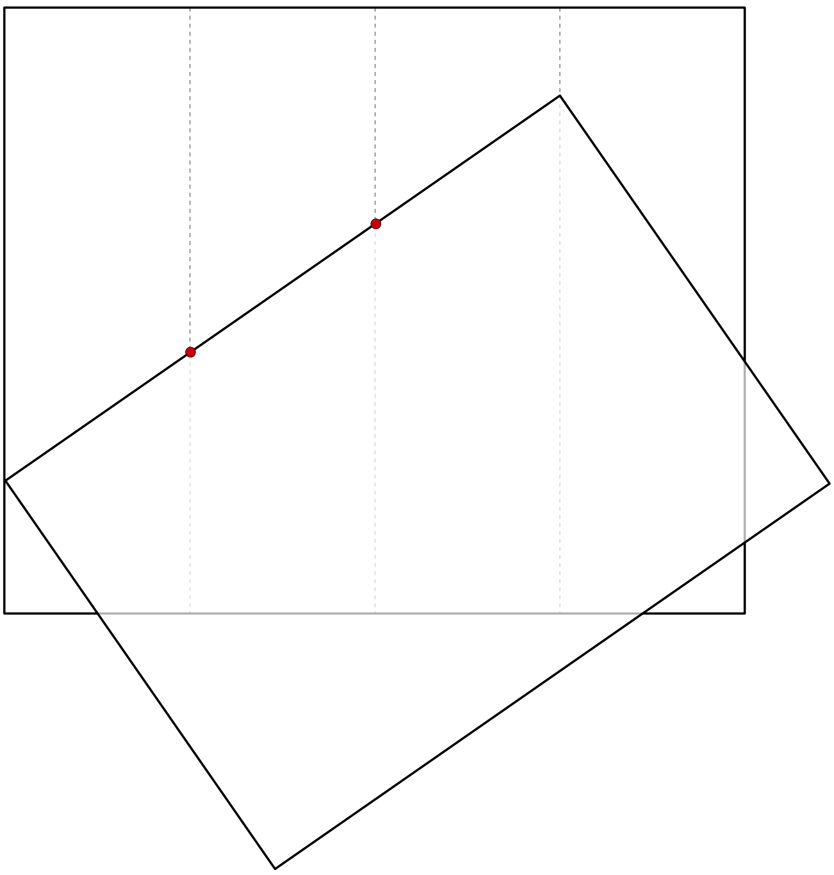
<u>1ère méthode</u> :

Prendre une autre feuille, la plier deux fois bord à bord puis la rouvrir. On obtient 4 parties égales et 5 parallèles.



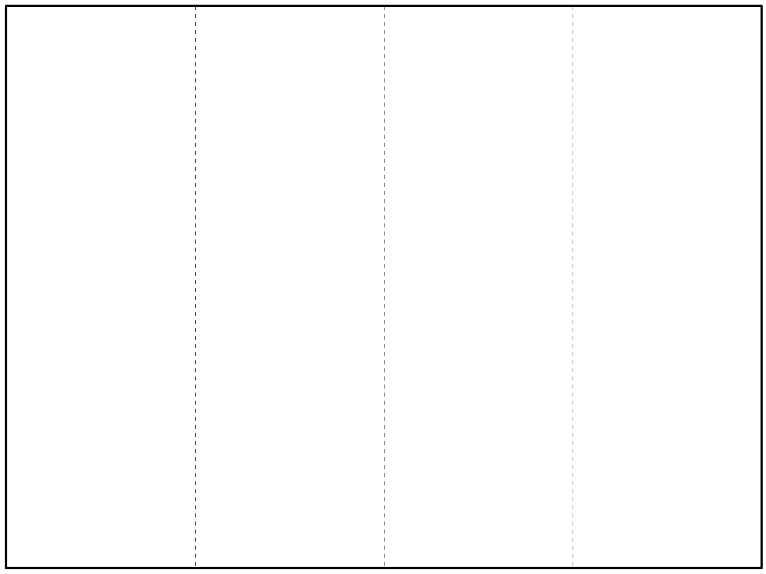
Placer la feuille dessus, en faisant en sorte que son côté croise 4 parallèles exactement.

Les 2 parallèles intérieures permettent de repérer sur le bord de la feuille les points ● qui le partagent en 3 parties égales.



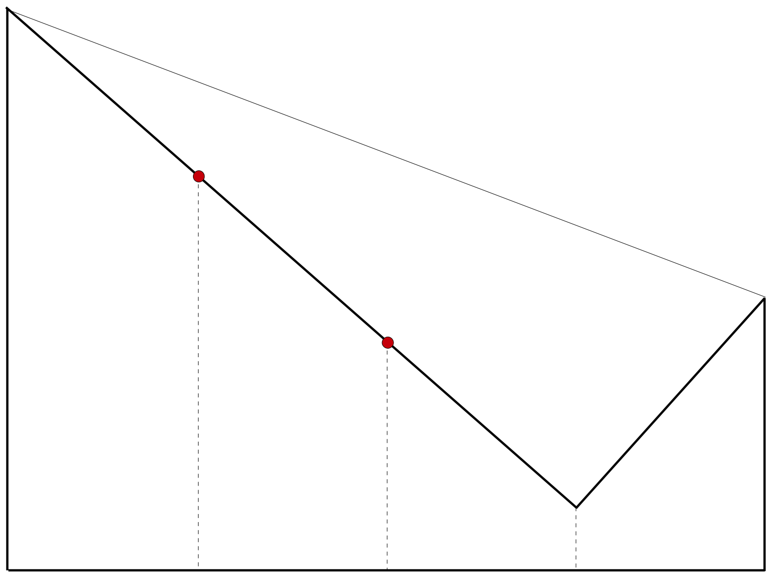
2ème méthode :

Plier la feuille deux fois bord à bord et la rouvrir.



Plier de façon à amener un sommet sur le pli le plus proche, sans que les autres sommets soient déplacés.

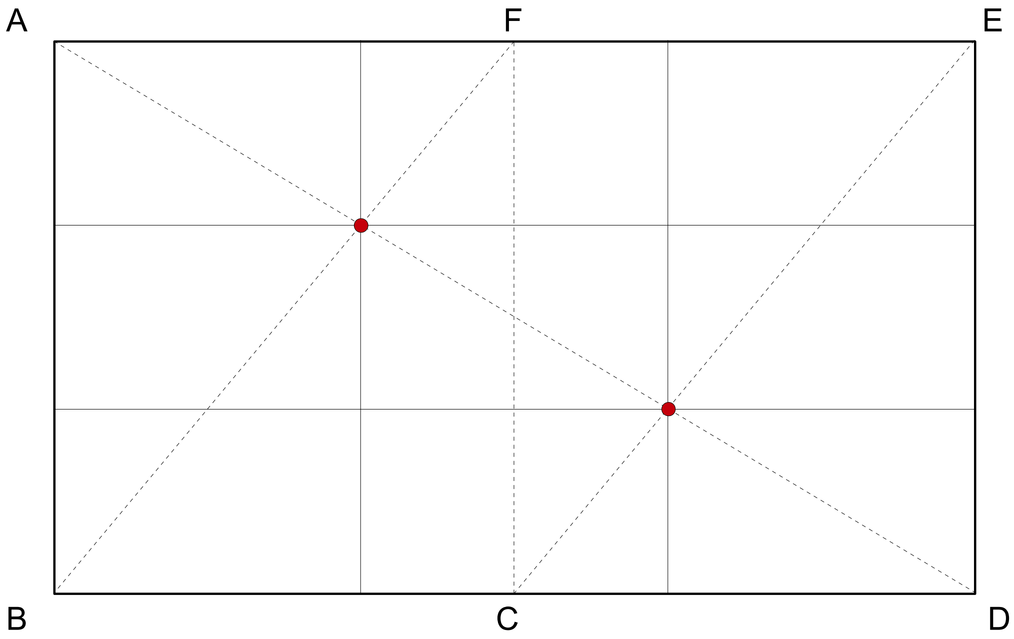
Les deux autres plis permettent de repérer sur le bord de la feuille les points ● qui le partagent en 3 parties égales.



<u>3ème méthode</u> :

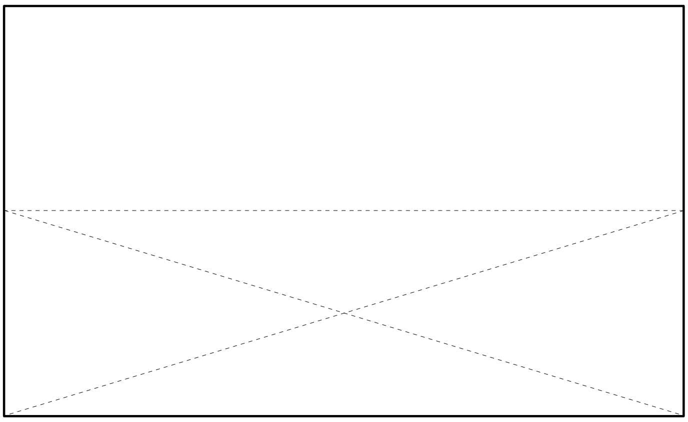
Marquer une diagonale (AD).
Marquer les milieux de deux côtés opposés (C et F), puis les diagonales des 2 rectangles nouvellement créés (BF et CE).

Les plis parallèles aux bords de la feuille et passant par les points ● où se croisent les diagonales partagent la feuille en 3 parties, dans un sens ou dans l'autre.

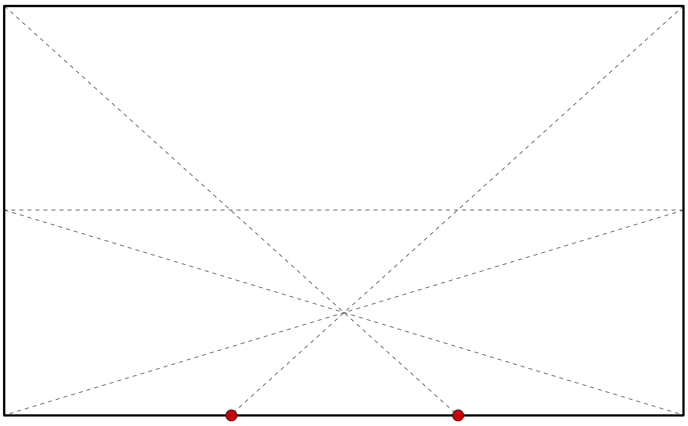


4ème méthode

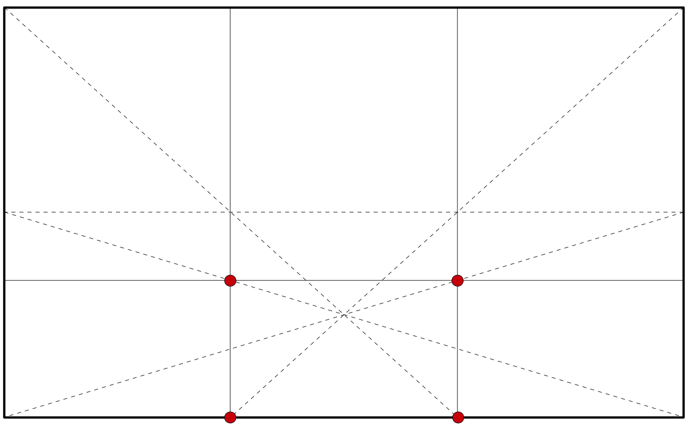
Plier bord à bord pour marquer le milieu de la feuille, ouvrir puis marquer les diagonales d'un des deux rectangles obtenus.



Par pliage, marquer les droites reliant le point d'intersection de ces diagonales aux deux autres sommets.
Ces deux droites déterminent sur l'autre bord de la feuille deux points ●, qui partagent ce bord en trois parties égales.

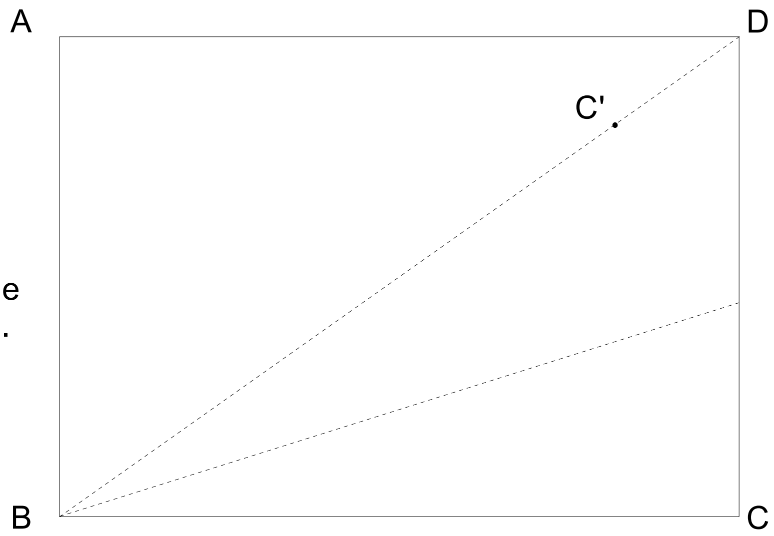


Les plis passant par ces points déterminent deux nouveaux points ● se situant au tiers de la hauteur, permettant ainsi de plier la feuille en trois dans l'autre sens.

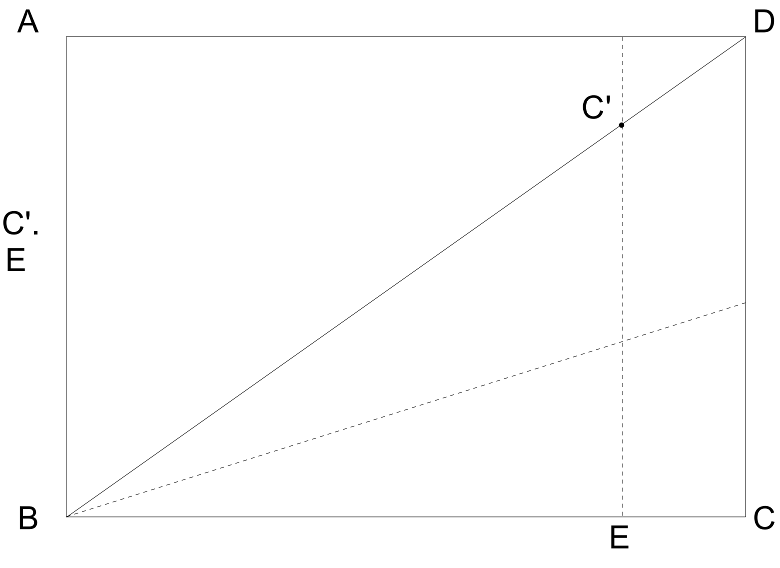


5ème méthode :

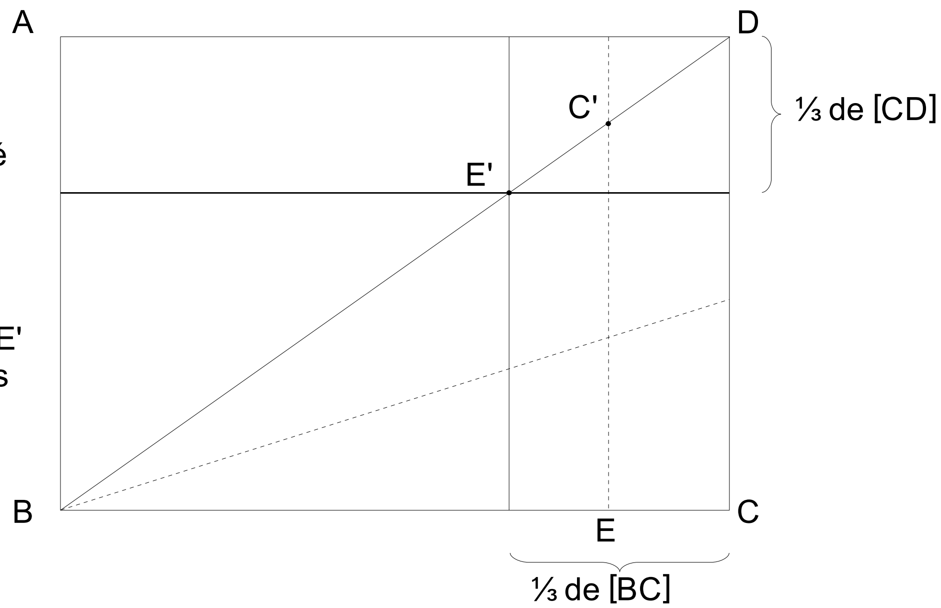
Marquer une diagonale (BD).
Amener un côté (BC) sur cette diagonale, marquer le point C' et rouvrir la feuille.



Faire un pli parallèle au bord (CD) et passant par C'.
Ce pli détermine un point E sur le côté BC.



Amener à nouveau le côté BC sur la diagonale, marquer le point E' et rouvrir la feuille.
Les plis perpendiculaires aux bords et passant par E' coupent ces bords au tiers de leur longueur.



Éléments pour la synthèse

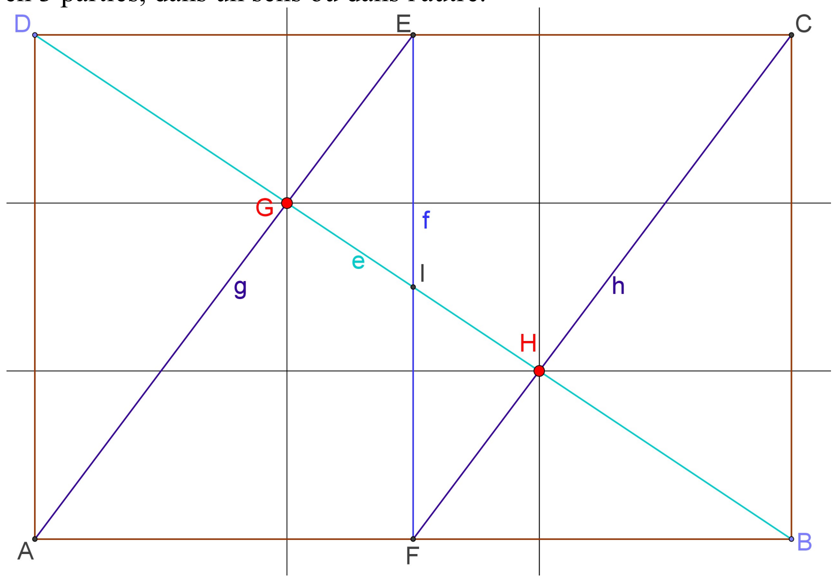
Pour démontrer que les méthodes 1 à 4 partagent la feuille en trois, on utilise le théorème de Thalès. Pour la méthode 5, on utilise la trigonométrie.

Méthodes 1 et 2

Les méthodes 1 et 2 sont une application directe du théorème de Thalès.

Méthode 3

On plie la feuille ABCD selon une diagonale (e).
On plie ensuite la feuille en 2 (f), puis selon les diagonales des 2 rectangles nouvellement créés (g et h).
Les plis parallèles aux bords de la feuille et passant par les points G et H (●) où se croisent les diagonales partagent la feuille en 3 parties, dans un sens ou dans l'autre.



Notons les points E, F et I comme sur le dessin.
Si nous montrons que $\overline{BH} = \overline{HG} = \overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{BD}$, Thalès nous permettra de conclure.
Par les propriétés du rectangle, le point I est le milieu du segment BD. Ainsi, si nous montrons que $\overline{IH} = \frac{1}{2}\overline{HB}$, nous aurons que $\overline{IB} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{HB} + \frac{1}{2}\overline{HB}$ et donc que $\overline{HB} = \frac{1}{3}\overline{BD}$, ce qui permet de conclure. Montrons donc que $\overline{IH} = \frac{1}{2}\overline{HB}$.
Considérons pour cela les triangles ΔIHF et ΔCHB.

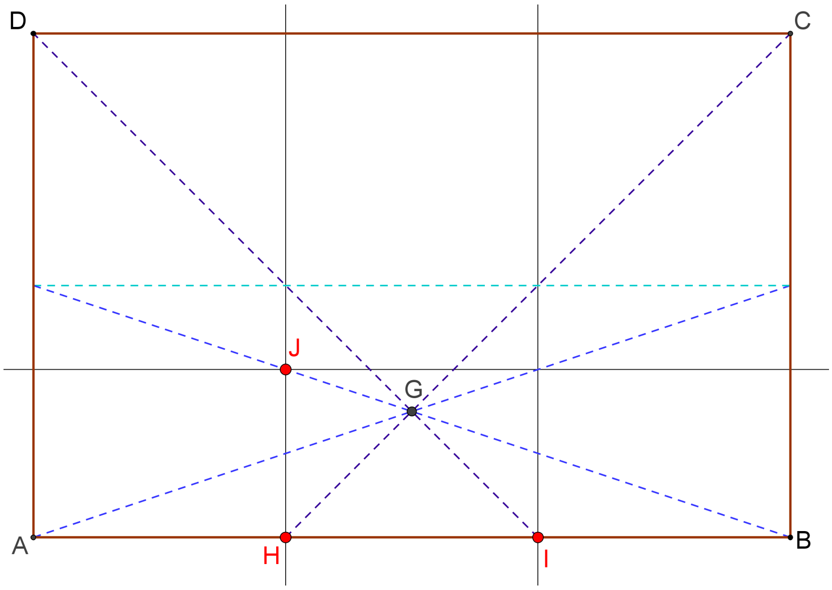
- Par les angles opposés, on a $\widehat{IHF} = \widehat{BHC}$
- Comme EF est parallèle à BC, par les angles alternes-internes, on a $\widehat{HIF} = \widehat{HBC}$ et aussi $\widehat{HFI} = \widehat{HCB}$

Donc les triangles ΔIHF et ΔCHB sont semblables. De plus, on a $\overline{IF} = \frac{1}{2}\overline{CB}$. Ainsi, par Thalès:

$$\frac{\overline{IH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{IF}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{IH}}{\overline{HB}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{CB}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{1}{2}\overline{HB}$$

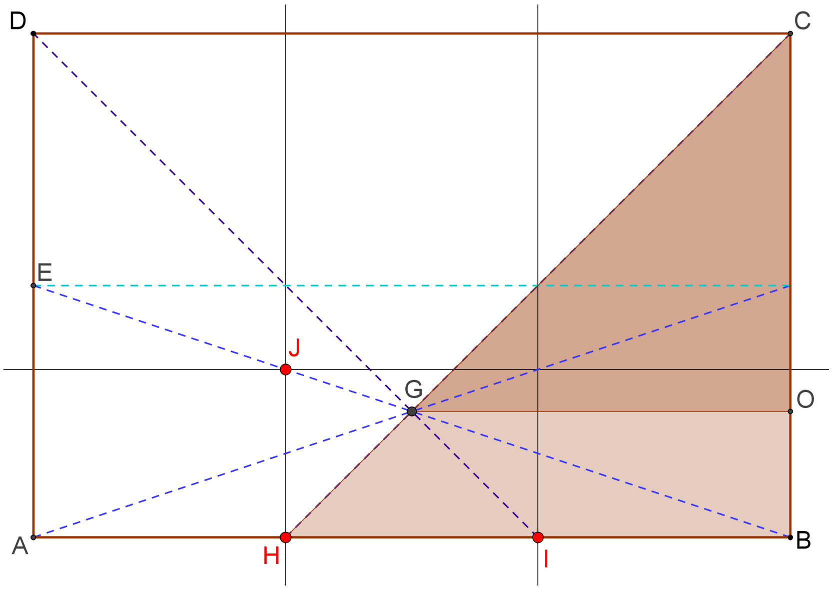
Méthode 4

Notons H et I les points qui permettent de partager la longueur de la feuille en trois parties. Notons de plus G le point d'intersection entre DI et CH.



Commençons par montrer que les points H et I permettent de couper la longueur de la feuille en trois parties égales. Pour cela, prenons une perpendiculaire au bord vertical de la feuille et passant par le point G. L'intersection de cette perpendiculaire avec le bord de la feuille est noté O. Notons de plus P le point d'intersection entre le premier pli et la perpendiculaire à BC passant par I, et F le point milieu de BC. La démonstration se base sur l'utilisation du Théorème de Thalès. Il existe plusieurs choix possibles de triangles permettant de démontrer que H et I partagent la longueur en trois parties égales; en voici deux :

Choix 1:



Considérons les triangles ΔCHB et ΔCGO.

- Ces triangles sont semblables puisque GO est parallèle à AB.

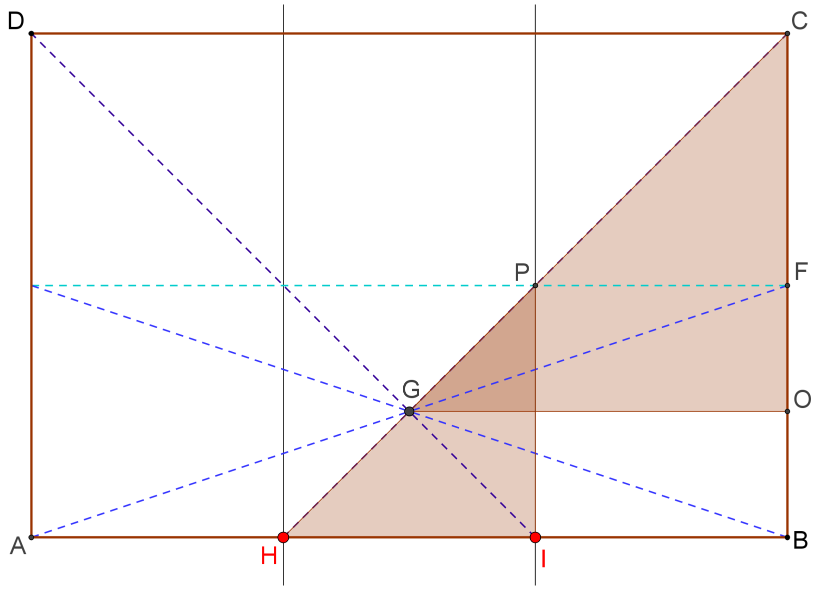
- G est l'intersection des diagonales du rectangle ABFE, donc O est le milieu de FB (propriété des diagonales d'un rectangle). Puisque F est le milieu de CB (par construction du premier pli), on a $\overline{CO} = \frac{3}{4}\overline{CB}$
- De même, $\overline{GO} = \frac{1}{2}\overline{AB}$

Ainsi, par Thalès, nous avons:

$$\frac{\overline{BH}}{\overline{OG}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{CO}} \Leftrightarrow \frac{\overline{BH}}{\frac{1}{2}\overline{AB}}=\frac{\overline{CB}}{\frac{3}{4}\overline{CB}} \Leftrightarrow \overline{BH}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\frac{3}{4}\overline{BC}}=\frac{2}{3}\overline{AB}$$

- On a alors aussi que $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AB}$. Par symétrie, on a aussi que $\overline{BH} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ et donc les points H et I permettent bien de partager la longueur de la feuille en trois.

Choix 2:



Considérons les triangles ΔCGO et ΔPIH.

- Ces triangles sont semblables puisque GO est parallèle à AB et PI est parallèle à BC.
- G est l'intersection des diagonales du rectangle ABFE, donc O est le milieu de FB (propriété des diagonales d'un rectangle). Puisque F est le milieu de CB (par construction du premier pli), on a $\overline{CO} = \frac{3}{4}\overline{CB}$
- De même, $\overline{GO} = \frac{1}{2}\overline{AB}$
- Puisque P est sur le pli qui partage la feuille en deux, on a $\overline{PI} = \frac{1}{2}\overline{CB}$

Ainsi, par Thalès, nous avons:

$$\frac{\overline{PI}}{\overline{CO}}=\frac{\overline{HI}}{\overline{GO}} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\overline{CB}}{\frac{3}{4}\overline{CB}}=\frac{\overline{HI}}{\frac{1}{2}\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{HI}=\frac{1}{3}\overline{AB}$$

Bien que la longueur $\overline{HI}$ soit égale au tiers de la longueur de la feuille, ceci n'assure pas que H et I partagent la feuille en trois parties égales. On a seulement montré que, pour un x compris entre 1 et $\frac{1}{3}$, on a $\overline{AH} = x$ et $\overline{IB} = \frac{2}{3} - x$. Reste donc à montrer que $x = \frac{1}{3}$. Pour cela, nous avons plusieurs possibilités.

Possibilité 1:

Considérons les triangles ΔCBH et ΔPIH.

- Ces triangles sont semblables puisque PI est parallèle à CB.
- Comme avant, $\overline{PI} = \frac{1}{2}\overline{CB}$
- Par ce qui précède $\overline{HI} = \frac{1}{3}\overline{AB}$

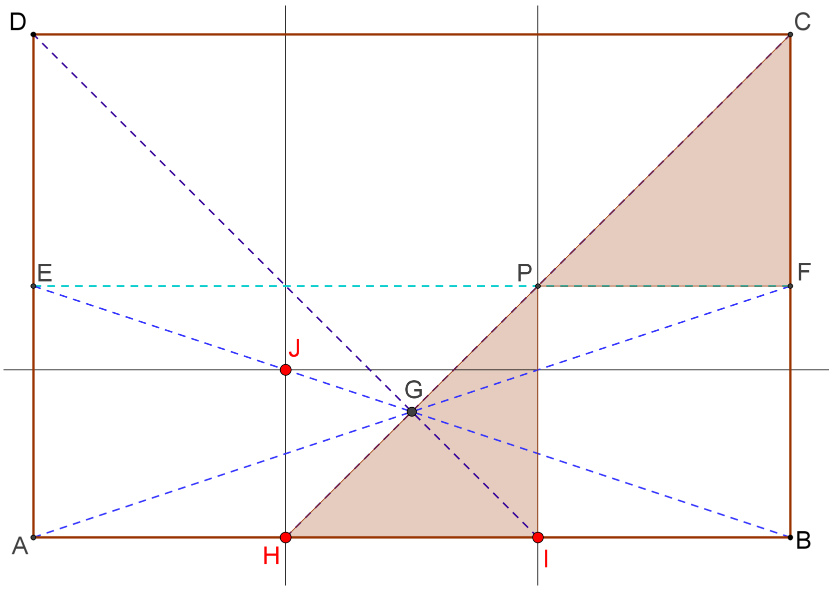
Ainsi, par Thalès, nous avons:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{PI}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{HI}} \Leftrightarrow \frac{\overline{CB}}{\frac{1}{2}\overline{CB}} = \frac{\overline{HB}}{\frac{1}{3}\overline{AB}}$$

et donc $\overline{HB} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

Donc les points H et I permettent partager la longueur de la feuille en trois parties égales.

Possibilité 2:

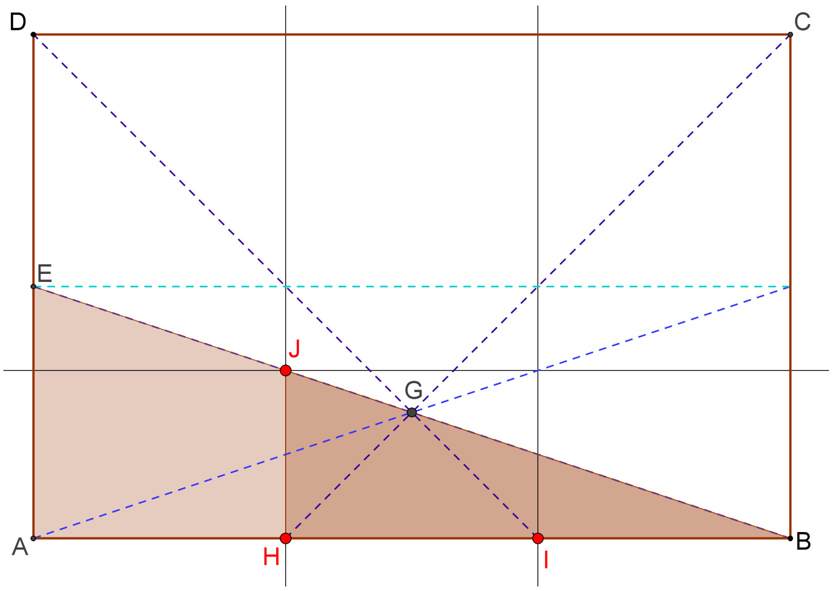


Nommons F le point milieu du segment BC et considérons les triangles ΔPIH et ΔCFP.

Comme $\overline{PI} = \overline{CF}$, on a par Thalès:

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{PI}} \Leftrightarrow \overline{FP} = \frac{\overline{HI} \cdot \overline{CF}}{\overline{PI}} = \overline{HI} = \frac{1}{3}\overline{AB}$$

Montrons maintenant que le point J permet de partager la hauteur de la feuille en trois parties égales.



Montrons pour cela que $\overline{JH} = \frac{1}{3}\overline{AD}$. Considérons les triangles ΔEAB et ΔJHB.

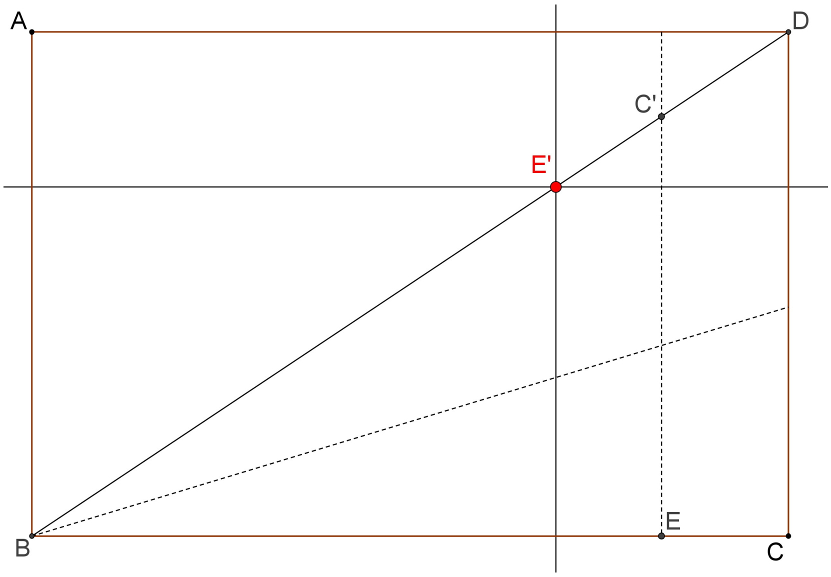
- Ces triangles sont semblables, car JH est parallèle à EA
- Puisque E est sur pli_1, on a $\overline{EA} = \frac{1}{2}\overline{DA}$
- Par ce qui précède, on a $\overline{HB} = \frac{2}{3}\overline{AB}$

Ainsi, par Thalès, nous avons

$$\frac{\overline{JH}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{HB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{JH}}{\frac{1}{2}\overline{DA}} = \frac{\frac{2}{3}\overline{AB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{JH} = \frac{1}{3}\overline{DA}$$

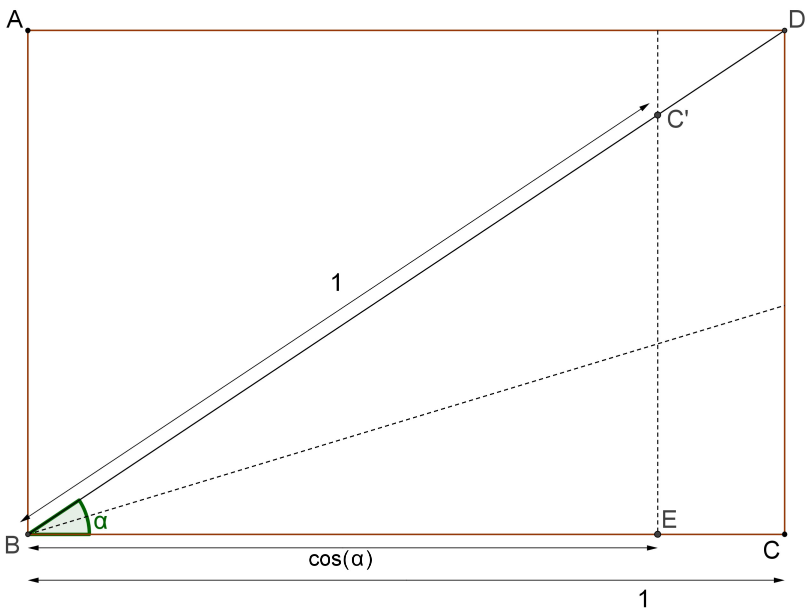
Ainsi, le point J permet de partager la hauteur de la feuille en trois parties égales.

Méthode 5



Supposons que $\overline{BC} = 1$ et montrons dans quels cas le point E' permet de partager la feuille ABCD en trois dans la longueur et dans la largeur.
Notons α l'angle $\widehat{CBD}$. Lorsqu'on marque le point C', on reporte la longueur $\overline{BC} = 1$ sur la diagonale BD. Le pli parallèle à CD passant par C' permet alors de prendre la projection orthogonale de C' sur BC; autrement dit:

$$\overline{BE} = 1 \cdot \cos(\alpha).$$

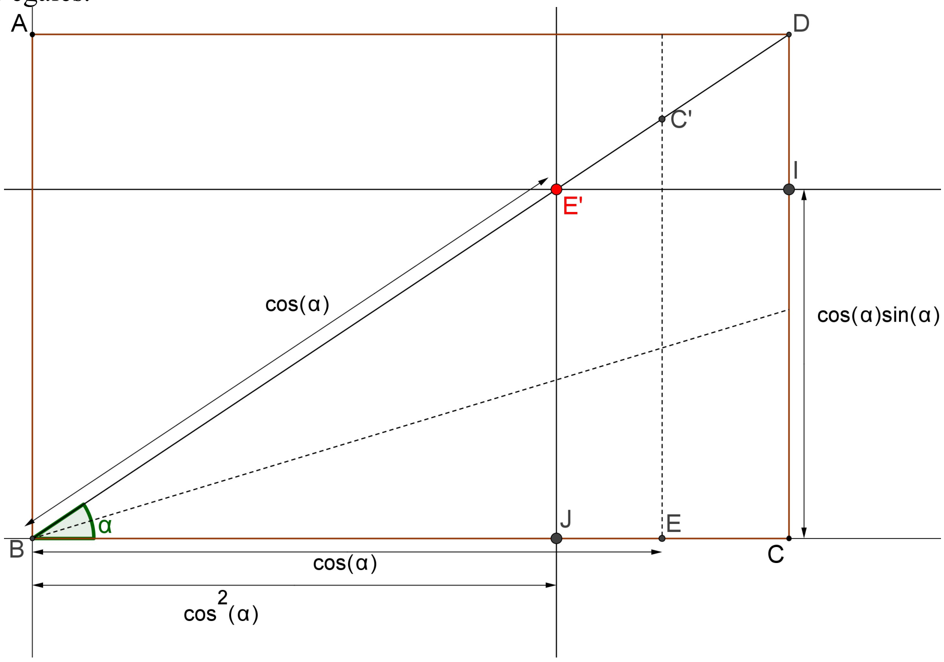


Par le pli suivant, on ramène E sur CD; autrement dit, on reporte la longueur $\overline{\text{BE}}$ sur la diagonale BD. Ainsi $\overline{BE'} = \cos(\alpha)$. Notons respectivement I et J les projections orthogonales de E' sur BC et CD. On a alors

$$\overline{BJ} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \cos^2(\alpha) \quad \text{et} \quad \overline{CI} = \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

puisque la feuille est rectangulaire.

Remarquons que pour un choix quelconque de α, on n'a pas nécessairement $\cos^2(\alpha) = \frac{2}{3}$. Il faut alors déterminer quelles sont les conditions sur la feuille pour que ce pliage permette effectivement de la partager en trois parties égales.



Pour que E' permette effectivement de couper la feuille en trois, il faut

$$\begin{cases} \cos^2(\alpha) & = & \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2}{3} \\ \cos(\alpha)\sin(\alpha) & = & \frac{2}{3}\overline{CD} \end{cases}$$

Puisque $\cos^2(\alpha) = \frac{2}{3}$ et que $\cos(\alpha)$ doit être positif (c'est une longueur), on a

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

D'autre part, par l'égalité $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, on a aussi

$$\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{1}{3} \quad \text{et donc} \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Finalement:

$$\frac{2}{3}\overline{CD} = \cos(\alpha)\sin(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

et donc $\overline{CD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Plus généralement, $\overline{BC} = \sqrt{2}\,\overline{CD}$, et donc la feuille ABCD doit être du format An (A4, A0 ...) pour que cette méthode permette de partager la feuille en trois parties.