Bande pliée

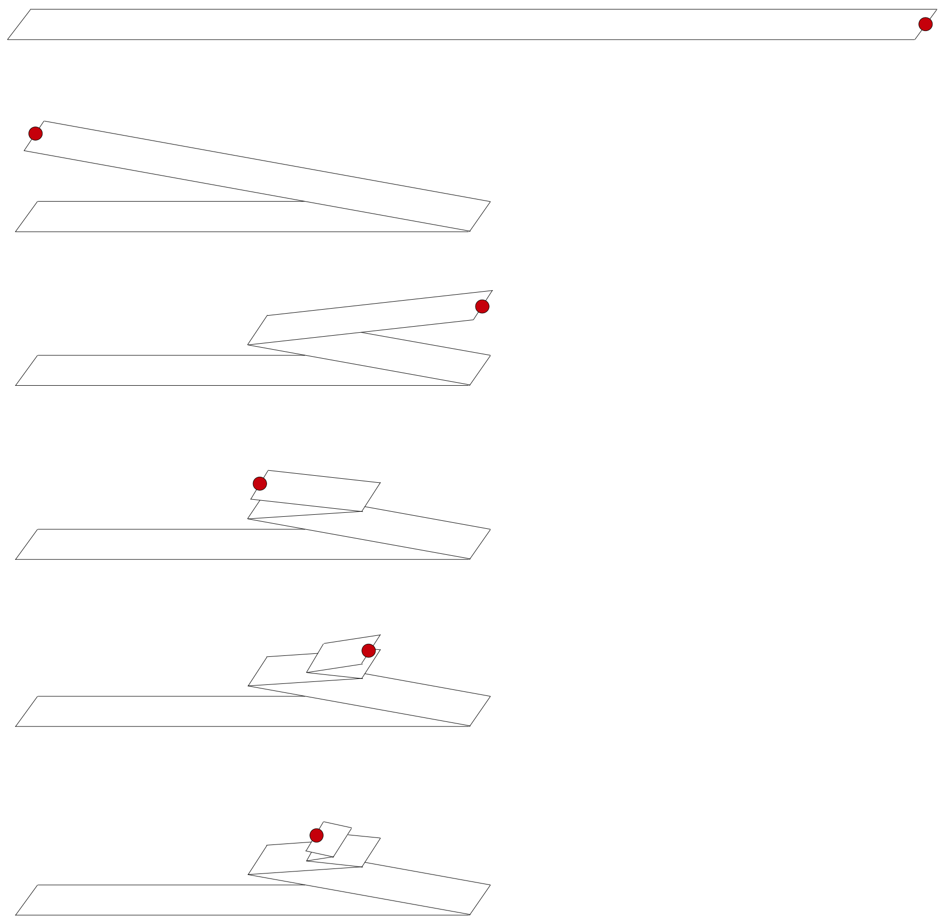
Résumé	On marque l'extrémité d'une bande de papier avec un •. Si on replie successivement la bande suivant un certain schéma, où le • finira-t-il par se trouver ?
Degrés concernés	12 – 13PO
Matériel	Une bande de papier, éventuellement millimétré
Durée	
Propositions de déroulement	Les élèves commencent par travailler soit seuls soit en petits groupes de deux ou trois. La mise en commun se fera à la fin de l'activité.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	<u>Intentions</u> Introduire une suite géométrique et calculer sa limite. <u>Démarches possibles</u> Les élèves commencent par plier leur bande selon l'illustration. Puis calculent à chaque pas la position du point. Comme la bande est pliée toujours en deux alternativement vers la gauche ou vers la droite, on remarque qu'on a une somme alternée de puissances de 1/2 . Voir les éléments pour la synthèse pour les démarches possible et les relances. <u>Mise en commun</u> A la fin de l'activité, faire une mise en commun pour que les élèves puissent comparer et expliquer leurs démarches et leurs solutions. <u>Variables didactiques</u>
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Notion de limite

Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Série géométrique, notion de limite
Développements possibles	Définir la notion de série géométrique

Bande pliée

Soit une bande de papier, et l'une de ses extrémités marquée d'un ● .

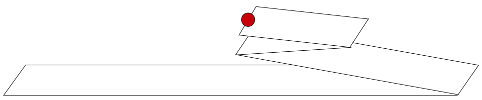
Si on la replie successivement comme illustré ci-dessous, où le ● finira-t-il par se trouver ?



etc …

Eléments pour la synthèse

Supposons que la bande soit de longueur 1.
Une méthode pour trouver cette somme alternée est d'exprimer la somme des différentes parties de la bande, par exemple :



$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

On parvient ainsi à écrire que la position du point après n itérations (avec n>1 et n=0 est la bande sans plis) est donnée par

$$S_n=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\;+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}$$

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de la somme S_n. Pour cela, il existe plusieurs approches qui aboutissent au même calcul.

1. En additionnant S_n et $\frac{1}{2}S_n$, on obtient :

$$\begin{array}{lrcl}
 & S_n & = & \frac{1}{2} -\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\dots \qquad +(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}} \\
+ & \frac{1}{2}S_n & = & \qquad \frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\dots \; +(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} \quad +(-1)^n\frac{1}{2^n} \\
\hline
= & S_n+\frac{1}{2}S_n & = & \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(-1)^n\frac{1}{2^n}
\end{array}$$

D'où

$$\frac{3}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Et finalement

$$S_n=\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

On peut aussi additionner S_n et $2S_n$, on obtient alors

$$\begin{array}{lrcl}
 & S_n & = & \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\dots \; +(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-2}} \quad +(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}} \\
+ & 2S_n & = & 1 \; -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots \quad +(-1)^n\frac{1}{2^{n-2}} \\
\hline
= & 3S_n & = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}
\end{array}$$

et une simple manipulation algébrique permet d'aboutir au même résultat pour S_n.

2. En mettant en évidence $\frac{1}{2}$, on fait apparaître une suite géométrique de raison $r = -\frac{1}{2}$:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-2} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$$

Maintenant, on a une somme de la forme

$$2S_n = \sum_{i=0}^{n-2} r^i \qquad \text{avec } r = -\frac{1}{2}$$

On peut alors soit utiliser la même méthode que plus haut pour calculer $\sum_{i=0}^{n-2} r^i$, soit suggérer de multiplier directement $\sum_{i=0}^{n-2} r^i$ par $1 - r$. Dans ce dernier cas, on obtient:

$$(1 - r) \sum_{i=0}^{n-2} r^i = 1 - r^{n-1}$$

Et donc

$$\sum_{i=0}^{n-2} r^i = \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$$

Remarquons que cette approche permet de généraliser directement le problème étudié aux suites géométriques de raison r.
Finalement

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-2} r^i = \frac{1}{2} \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{3}$$

Dans les deux cas, un simple calcul de limite montre alors que, lorsque n tend vers l'infini, S_n tend vers $\frac{1}{3}$.