Présentation

Titre : Les passes

Année(s) de scolarité concernée(s) : 5P – 11CO

Durée estimée : 90 minutes

Résumé : cette activité propose de mettre en place un système efficace pour noter les passes d'un ballon effectuées par un groupe d'élèves disposés en cercle. L'idée est d'obtenir un graphe à partir duquel les élèves peuvent répondre à des questions du type: peut-on réaliser des passes de telle sorte que tout élève ait échangé la balle avec chacun de ses camarades une et une seule fois. Ceci permettra d'aborder la notion de graphe eulérien.

Énoncé élève

Formez des groupes de 5 ou 6 élèves. Dans chaque groupe, choisissez un élève qui notera les passes tandis que les élèves restants se disposent en cercle.

Faites quelques passes et notez-les de la manière qui vous paraît la plus efficace.

Répondez à la question suivante :

- Peut-on réaliser des passes de telle sorte que tout élève ait échangé la balle avec chacun de ses camarades une et une seule fois ?

Commentaires pour l'enseignant-e

Titre : Les passes

Année(s) de scolarité concernée(s) : 5P – 11CO

Objectif(s) / apprentissage(s) visé(s) (+ références au plan d'études)

Modélisation d'un situation, répondre à des questions en se basant sur cette modélisation

Matériel (+ image)

Balles, papier et crayons

Lieu de l'activité

En classe ou en extérieur. Eventuellement en Salle de gym

Durée estimée : 90 minutes

Proposition de déroulement

La classe est divisée en groupes de 5 ou 6 élèves (il faut au moins un groupe de 5 et au moins un groupe de 6 élèves)
L'enseignant remet d'abord l'énoncé aux élèves, puis, lorsque chaque groupe à choisi qui prendrait note des passes, il remet une balle par groupe,
Les élèves réalisent quelques passes et commencent à discuter par groupe de la notation à adopter. L'enseignant passe dans les groupes pour répondre à d'éventuelles questions et pour avoir un aperçu des différentes notations.
Lorsque chaque groupe a adopté une notation, l'enseignant propose une première mise en commun pour discuter des différentes notations. Il s'agira essentiellement de dégager les renseignements utiles du superflu (voir analyse de l'activité).
Après cette première mise en commun, les élèves se remettent à travailler en groupe pour tenter de répondre aux questions.
Une mise en commun finale pour discuter des résultats de chaque groupe sera faite 20 à 15 minutes avant la fin de la deuxième période.

Analyse a priori de l'activité

Le but de l'activité est de modéliser les passes effectuées à l'aide d'un graphe, puis de se rendre compte que seuls des graphes particuliers, les graphes eulériens, peuvent être réalisés en effectuant des passes.
Pour réaliser ceci, les élèves doivent passer par plusieurs étapes de compréhension et d'abstraction:

1. modéliser les passes par un graphe (simple ou multiple, orienté ou non orienté, suivant le besoins du problème)

2. se rendre compte que tous les graphes ne sont pas réalisables avec des passes
3. trouver un critère qui permette d'affirmer de manière certaine qu'un graphe est réalisable à l'aide des passes

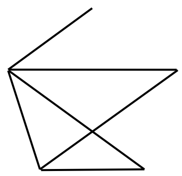
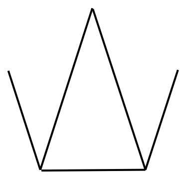
Variable didactique: le nombre d'élèves par groupes
Procédures:
Étape 1 modélisation:

les élèves parviendront sûrement rapidement à modéliser la situation avec un diagramme fléché où la flèche indique “a lancé la balle à”. Si ce n'est pas le cas, l'enseignant peut suggérer cette manière de faire.

Étape 2: Répondre aux questions

Répondre à la première question revient à faire une étape de plus dans la compréhension du problème et surtout dans l'abstraction. Il s'agit de comprendre que tout graphe ne peut pas être réalisé avec des passes. Seuls les graphes eulériens, ceux que l'on peut dessiner “sans lever le crayon” sont réalisables.
Pour guider les élèves en difficulté, on peut suggérer plusieurs pistes:

- demander si le graphe des passes est dessiné d'une manière particulière
- proposer deux graphes, l'un réalisable et l'autre pas (exemple ci-dessous) et demander comment les réaliser

	
Réalisable avec des passes	Non réalisable avec des passes, car non eulérien

- proposer de réaliser la “petite maison”, le graphe que de nombreuses personnes savent dessiner sans lever le crayon et faire constater l'analogie avec les passes

Une fois cette étape passée, il faut encore trouver un critère qui permette d'affirmer si un graphe peut être réalisé avec des passes. Là aussi on peut orienter la réflexion avec des questions:

- sur un graphe orienté, combien d'arêtes peuvent arriver sur un sommet et en repartir? (sur un point de départ, il y a un nombre n d'arêtes entrantes et un nombre n+1 d'arêtes sortantes. Inversement, au point d'arrivée, il y a un nombre n d'arêtes sortantes et un nombre n+1 d'arêtes entrantes. Finalement, sur les autres sommets, le nombre d'arêtes sortantes et entrantes sont les mêmes)

- est-ce que c'est possible de réaliser toutes les passes entre deux joueurs, entre trois joueurs, entre quatre, … N'hésitez pas à les faire essayer.

Variantes et/ou développements possibles

Pour compléter l'activité, on peut parler du problème des sept ponts de Königsberg (voir Compléments historiques)

Éléments pour la synthèse / Institutionnalisation et Corrigé /exemple de résolution

Tout d'abord, un peu de vocabulaire:
valence d'un sommet: la valence d'un sommet est le nombre d'arêtes partant de ce sommet
graphe eulérien : un graphe est eulérien s'il existe est un chemin dans le graphe qui passe par toutes les arêtes juste une seule fois. Si ce chemin est fermé, on parlera de cycle eulérien.
graphe complet: un graphe simple est complet si chaque sommet est relié à tous les autres sommets par une arête.

Peut-on réaliser des passes de telle sorte que tout élève ait échangé la balle avec chacun de ses camarades une et une seule fois?

Cette question revient à se demander si un graphe complet est eulérien. Il s'agira pour les élèves de découvrir le théorème suivant:
Théorème: *Un graphe connexe est eulérien si et seulement si il existe au plus deux sommets à valence impaire.*
Corollaire: *Un graphe connexe dont tous les sommets sont à valence paire est eulérien*.

Ainsi, dans le cas de nos graphes de passes, si le nombre de sommets est impair, la valence de chaque sommet est paire et il sera donc eulérien.
Si le nombre de sommets est pair, la valence de chaque sommet est impaire donc le graphe n'est pas eulérien.
Ainsi, les groupes de 4 élèves ne pourront pas réaliser ces passes, tandis que les groupes de 5 élèves le pourront.

Pour démontrer "eulérien implique au plus deux sommets de valence impaire", il faut induire chez les élèves le raisonnement suivant:
Si la balle passe par un joueur, ça veut dire qu'il la reçoit puis la renvoie. Autrement dit, il fait un nombre pair de passes. Si un joueur fait un nombre impair de passes, ça veut dire qu'à un moment il a reçu la balle sans la renvoyer ou inversement qu'il a envoyé la balle sans l'avoir reçue juste avant. Ces deux cas ne peuvent se présenter que dans le cas où il s'agit du dernier au du premier joueur, donc au plus deux fois.

Compléments mathématiques, théoriques, historiques...

Ce problème est fortement lié au problème des Sept ponts de Königsberg, résolu par Euler en 1736. Voir par exemple :
https://fr.m.wikipedia.org/wiki/Problème_des_sept_ponts_de_Königsberg