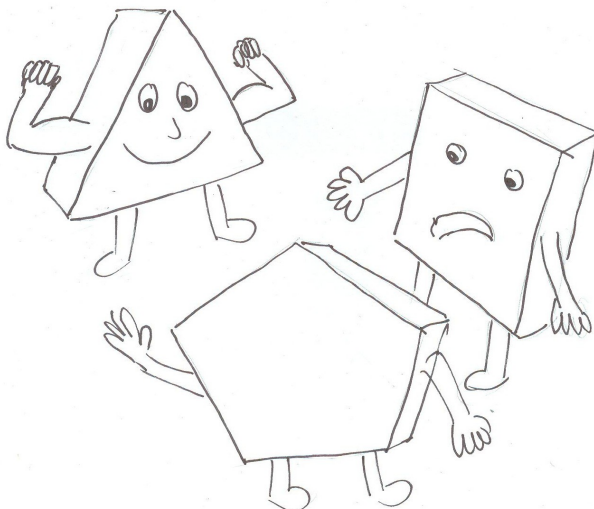


Titre : Comparer des aires à la grecque  
Je suis plus grand ! Non, c'est moi...



Degré : 1P-8P

Durée : 90 minutes

**Résumé :**

Comparer des aires sans les calculer.

Le but est de permettre aux élèves de tous niveaux de se convaincre que chaque surface (qu'ils connaissent) peut se décomposer en pièces permettant de construire un carré.

Ceci doit leur permettre de comparer des surfaces en comparant les carrés associés.

Cette démarche est exactement celle des géomètres grecs qui comparaient des grandeurs sans y associer de mesure.

Pour ce faire, plusieurs puzzles polygonaux amenant à un carré sont proposés.

Objectifs et composantes selon le PER :

MSN 14 – Comparer des grandeurs ...

... en mettant en relation des grandeurs perçues et des grandeurs mesurées

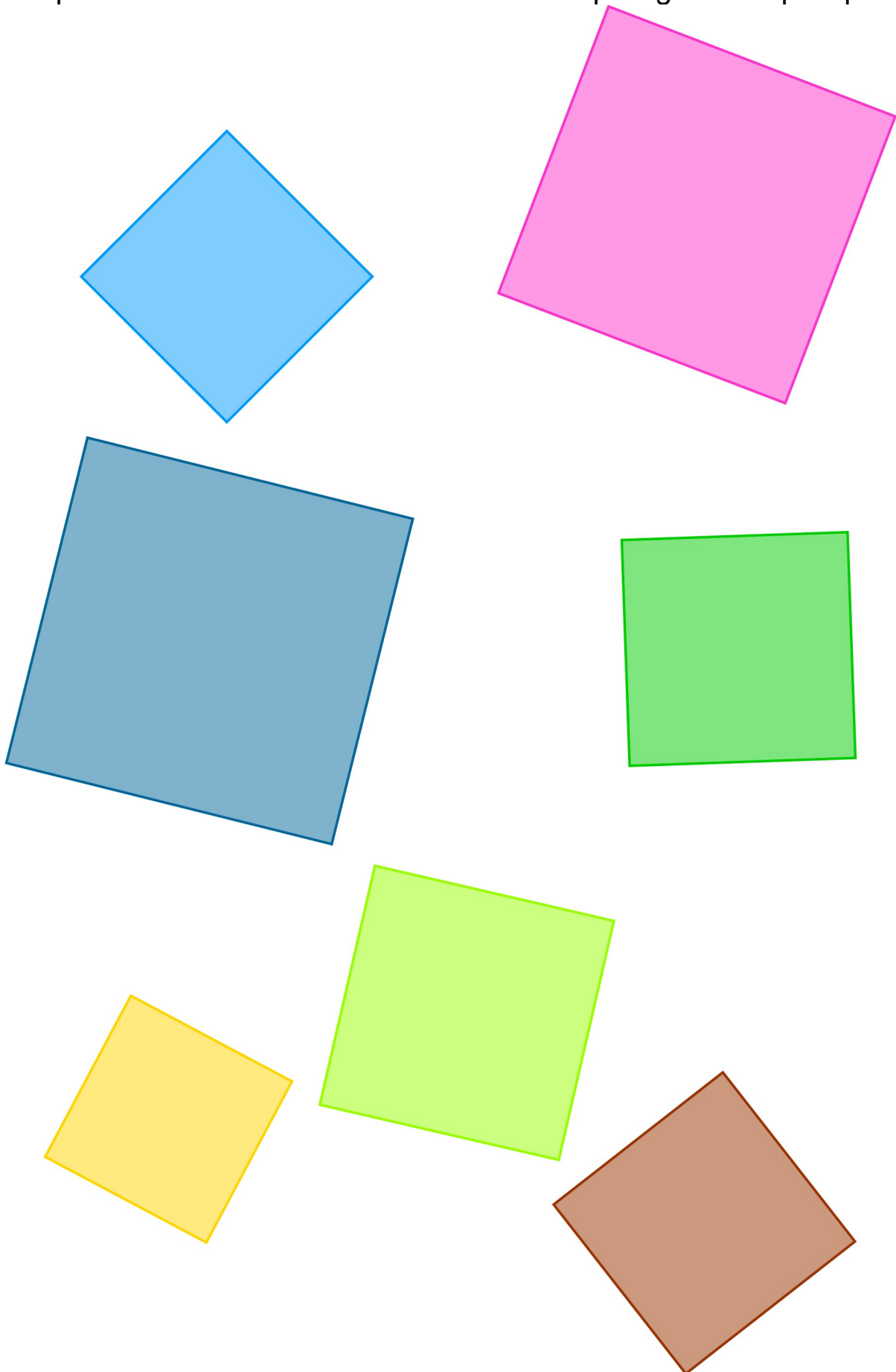
... en effectuant des comparaisons directes et indirectes

MSN 24 – Comparer des grandeurs ...

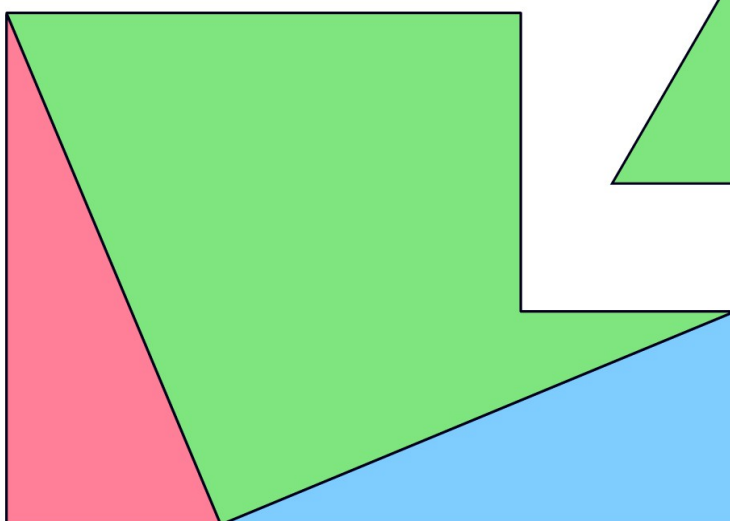
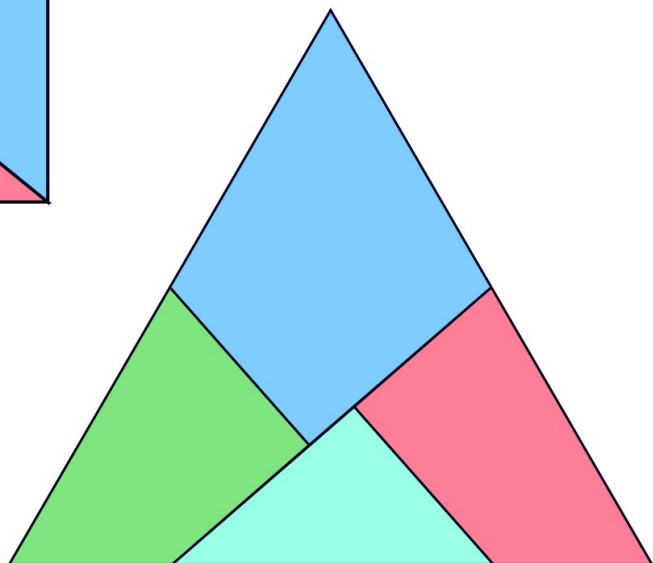
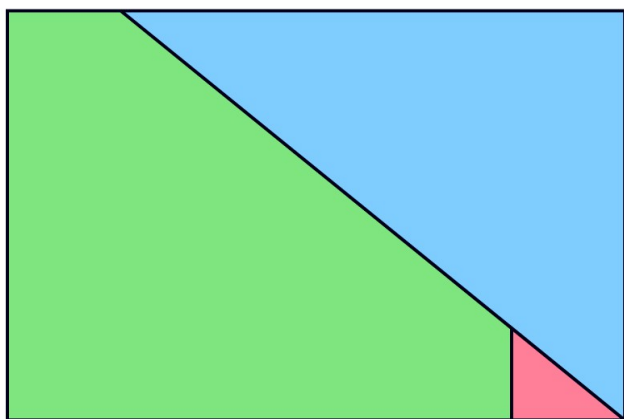
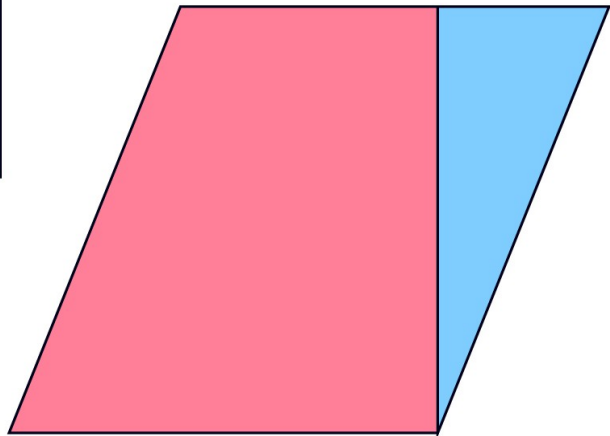
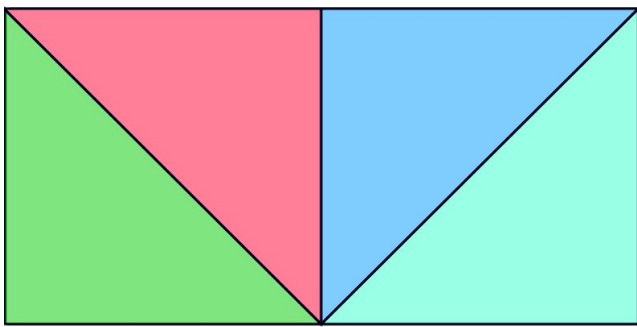
... en estimant la mesure des grandeurs

... en décomposant des surfaces et des solides en aires et en surfaces et solides élémentaires

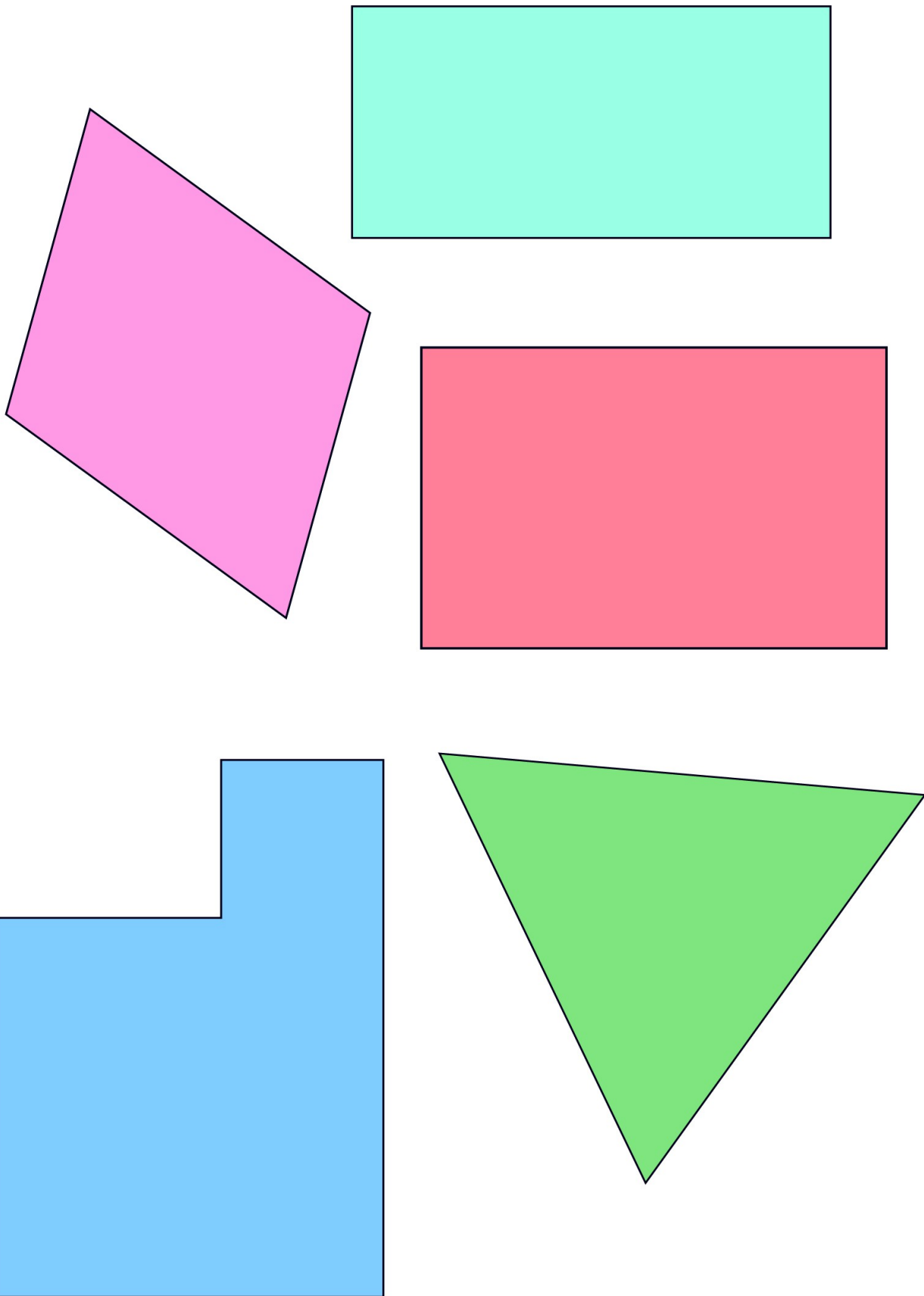
Compare les carrés suivants et classe-les du plus grand au plus petit.



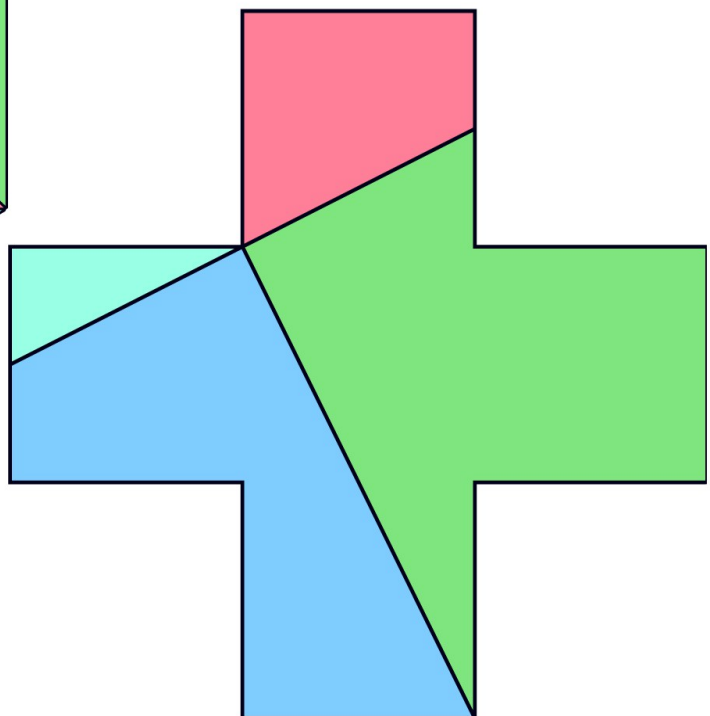
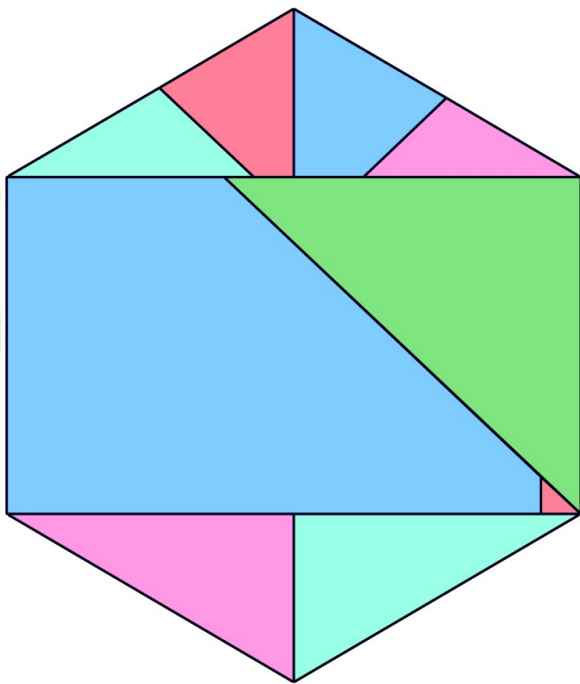
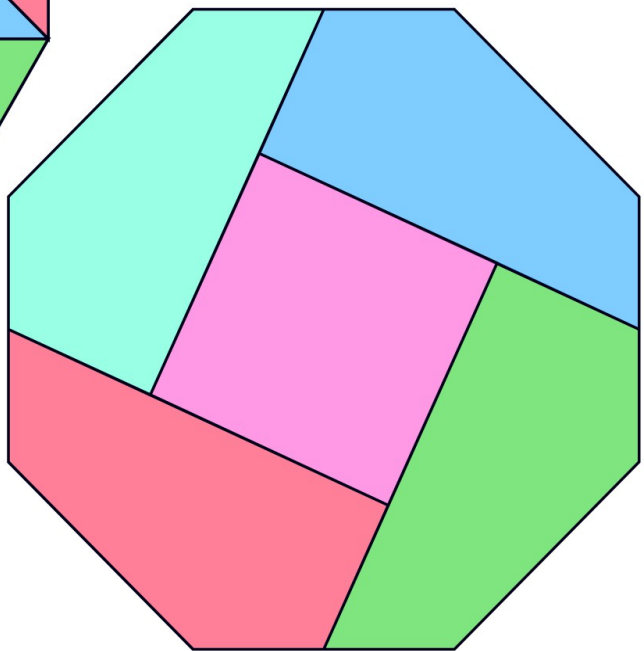
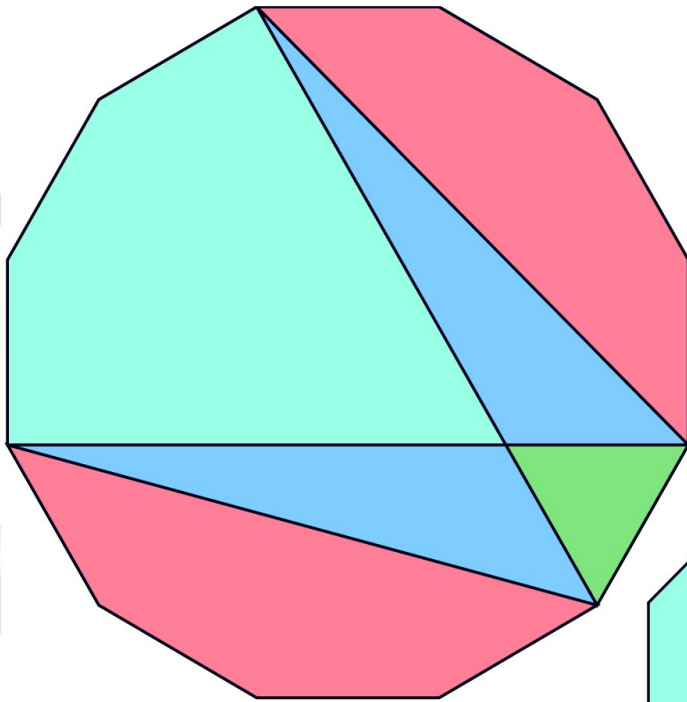
Découpe chacune des figures suivantes le long des traits proposés et avec les pièces de chacune des figures, construis un carré.



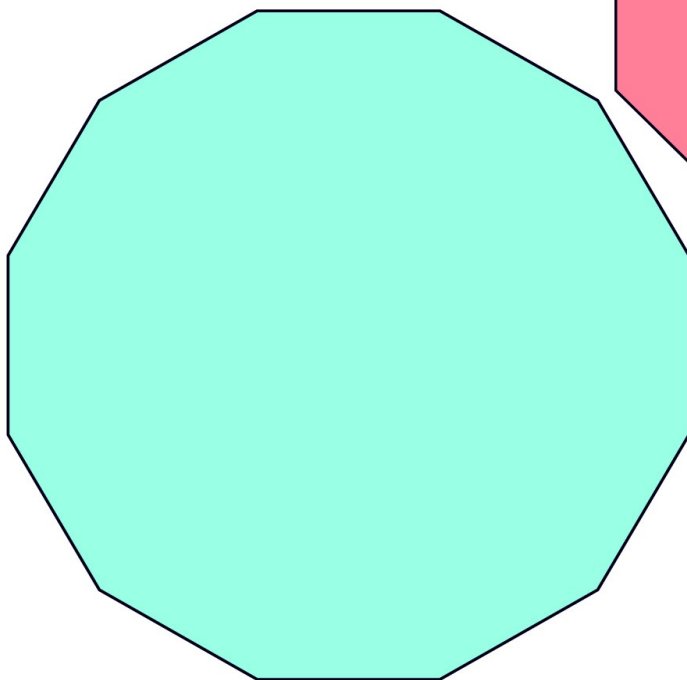
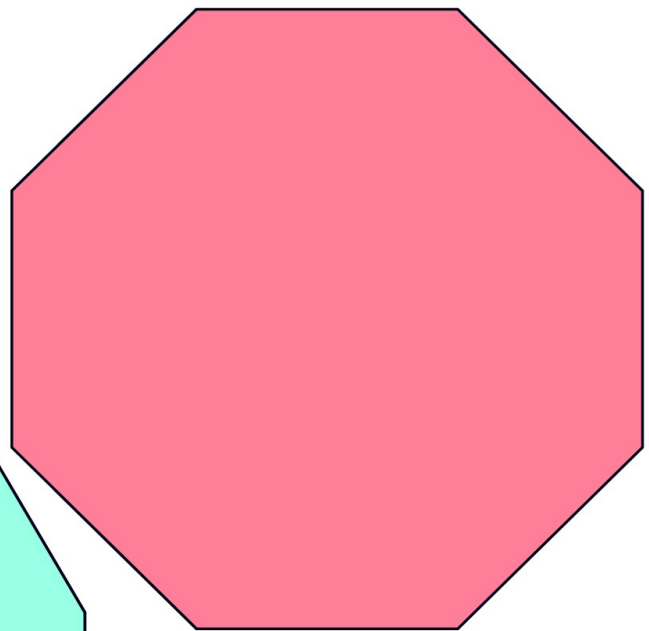
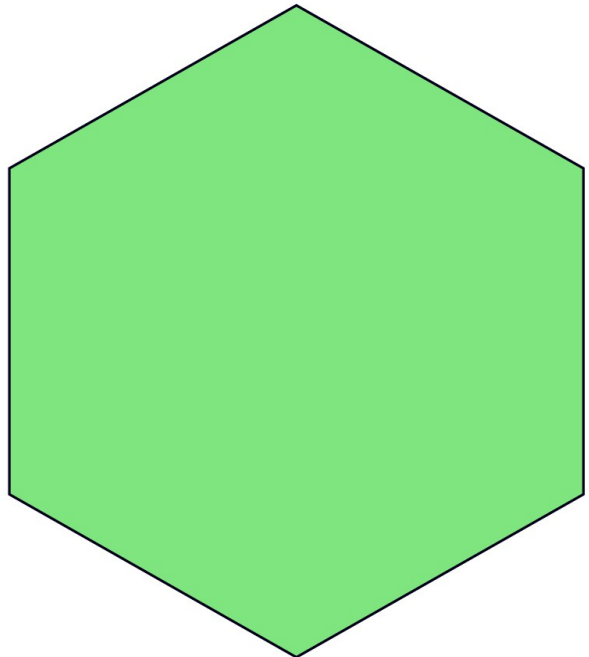
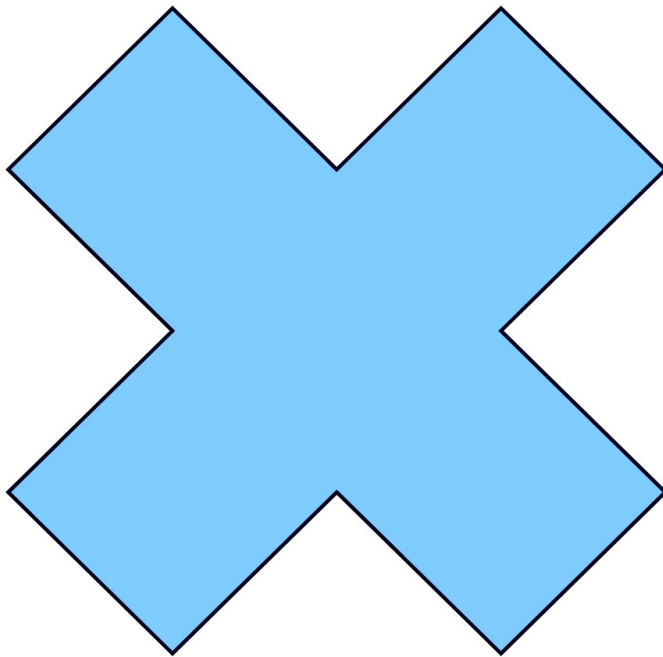
Compare les formes suivantes en les classant de la plus grande à la plus petite.



### Des puzzles un peu plus complexes



Compare les formes suivantes en les classant de la plus grande à la plus petite.



Titre : Comparer des aires à la grecque  
Je suis plus grand ! Non, c'est moi...

Degrés : 1P - 8P

Prérequis : aucun

Objectifs :

- Permettre aux élèves de se convaincre que l'aire ne change pas par découpe et déplacement.
- Réussir à construire une équidécomposition de certains polygones en carré et l'utiliser pour comparer les surfaces sans en calculer la mesure, puisque comparer l'aire de deux carrés revient à comparer leur côté (ou à la superposer pour voir lequel est le plus grand).

Compétences travaillées

MSN-15 : Modélisation

Résoudre des problèmes de mesurage, notamment :

- trier et organiser des informations
- mettre en œuvre d'une démarche de résolution
- ajuster par essais successifs
- déduire une information nouvelle à partir de celles qui sont connues
- vérifier, puis communiquer une démarche (oralement) et un résultat en utilisant un vocabulaire ainsi que des symboles adéquats

MSN-25 : Modélisation

Résoudre des problèmes de mesurage en lien avec les grandeurs étudiées, notamment :

- trier et organiser des informations
- mettre en œuvre une démarche de résolution
- ajuster par essais successifs
- poser une conjecture, puis valider ou réfuter
- déduire une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- vérifier, puis communiquer une démarche et un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats

MSN-14 : Comparer et sérier des grandeurs

- approcher de façon perceptive quelques grandeurs par manipulation : aires
- comparer directement deux ou plusieurs objets selon une grandeur : aire
- Estimer des aires, soit en reportant une unité de mesure donnée, soit en recouvrant l'objet à mesurer avec plusieurs exemplaires de l'unité de mesure donnée
- mettre en relation des grandeurs perçues et des grandeurs mesurées
- comparer directement ou indirectement et classer plusieurs objets selon une grandeur : aire,

MSN-24 : Comparer et sérier des grandeurs

- comparer, classer et mesurer des grandeurs (aires) par manipulation de surfaces, en utilisant des unités non conventionnelles
- fractionner une grandeur : aire

Matériel : ciseaux, feuilles de papier sur lesquelles sont imprimés les diverse formes

Durée estimée : 90 minutes

Proposition de déroulement

- Distribuer la feuille avec les carrés (page 1 ) et les faire découper (Si cela prend trop de temps, il est aussi possible de distribuer des carrés déjà prédécoupés. Il est important d'avoir quelques carrés très proches ne permettant pas visuellement de distinguer leur taille. Pour cela, on peut aussi en mettre deux identiques. Cette partie devrait être assez rapide. Le but de cet exercice est de montrer aux enfants que pour des carrés la comparaison est aisée (par superposition des formes, par exemple).
- Distribuer des formes à découper (pages 2 et 3) et pour chacune de ces formes faire former aux élèves un carré avec les pièces obtenues.
- Distribuer les pages 4 et 5 et demander aux élèves de classer les pièces par ordre de grandeur.
- Faire remarquer aux élèves que si toute forme (polygonale) peut se découper en pièces formant un carré (on dit que la surface est carrable), alors on peut facilement comparer deux surfaces entre elles.

Analyse a priori de l'activité

Les élèves arrivent certainement à classer les carrés, en les superposant au besoin. Par contre, comparer d'autres surfaces est plus difficile.

Il n'est pas facile de trouver les puzzles des pièces données (il est, à plus forte raison, certainement plus complexe de trouver ces découpes). Mais une fois ceci fait, on peut espérer que les élèves utilisent les deux activités précédentes pour répondre à la troisième à savoir les comparaisons de surfaces. Si cette étape n'apparaît pas, il faut l'induire en les faisant par exemple comparer les puzzles de la deuxième activités aux formes à comparer de la troisième. Elles sont identiques. Cela devrait permettre aux élèves de conclure.

Faire comprendre aux élèves que cette façon de faire fut la première façon de comparer des aires de manière exacte (dans la Grèce antique) permet peut-être pour les élèves d'intégrer pour la première fois les mathématiques dans l'histoire humaine.

La même activité peut se décliner jusqu'au post-obligatoire, mais en changeant la deuxième tâche. On peut essayer de laisser les élèves trouver les découpes, et, pour les plus grands, trouver une approche systématique pour carrer toute surface polygonale, pour ce faire les élèves devront se souvenir des théorèmes de la hauteur et de Pythagore.

Le fait qu'autant le théorème de la hauteur que celui de Pythagore représentent chacun des relations d'aires et non de longueurs est une difficulté importante qui doit être anticipée.

Dans les premières découpes, il y aura certainement des erreurs et les élèves voudront recommencer, prévoir plus de feuilles de découpes que d'élèves.

Remarquez que si on considère des polygones réguliers avec un grand nombre de côtés à ramener sur un carré, ceci amène naturellement à la question de la quadrature du cercle (possibilité d'anecdotes historiques).



## Éléments théoriques et/ou historiques

Les grecs ayant un système de numération insuffisant pour décrire exactement toutes les longueurs et les aires qu'ils étudiaient en géométrie, ils contournèrent la difficulté en utilisant non pas la longueur ou l'aire pour comparer des segments ou des surfaces, mais la superposition.

Si la superposition de segments ne pose pas de problème, celle des surfaces est plus délicate. Cela amène à l'idée d'équidécomposition.

Deux surfaces sont équidécomposables s'il existe une découpe finie de l'une permettant de recouvrir l'autre avec tous les morceaux, sans chevauchement ni trous.

Même s'il est peu probable de pouvoir réussir à obtenir même de la part des élèves des grands degrés, une preuve du théorème général suivant. Il est tout de même intéressant de garder ce but à l'esprit.

**Théorème 1 :** Toute surface polygonale simple est équidécomposable à un carré.

L'idée de la preuve est assez simple.

La surface peut être triangulée en un certain nombre de triangles, disons  $n$ . Chacun de ces  $n$  triangles peut être ensuite découpé pour obtenir un carré.

Comme le théorème de Pythagore permet d'équidécomposer deux carrés en un troisième (voir la dernière figure de l'annexe).

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème de Pythagore  $(n-1)$  fois pour reconstruire un carré à partir des  $n$  carrés.

Il est intéressant de remarquer que c'est la première étape de triangulation, qui n'est jamais remise en cause, qui est de loin la plus difficile à justifier dans le cas général.

Si cette démarche est conceptuellement efficace, les découpes qu'elle engendre sont mauvaises, car elles contiennent un nombre très important de pièces. Il s'agit donc d'une preuve de pensée, mais qui n'est pas suffisante pour obtenir des algorithmes efficaces de découpes.

Ce théorème explique aussi la naturalité de la question de la quadrature du cercle.

En fait on devrait dire du disque, mais l'expression est venue des grecs et est restée.

En effet, carrer une surface est l'équidécomposer avec un carré. Comme toute surface polygonale est carrable, et que les polygones réguliers ressemblent très fortement à des cercles, il est naturel de se poser la question de la quadrature du cercle, c'est-à-dire de l'équidécomposition du disque sur un carré. Il faudra attendre la fin du 19<sup>ème</sup> siècle pour que Lindemann démontre l'impossibilité d'une telle construction en démontrant la transcendance du nombre  $\pi$ .

On déduit du théorème 1, un second résultat

**Théorème 2 :** Deux surfaces polygonales simples de même aire sont équidécomposables.

Il suffit d'appliquer le théorème 1 aux deux surfaces pour obtenir pour chacune d'elles une équidécomposition avec un carré. Les surfaces ayant la même aire, les deux carrés sont isométriques. On peut donc les superposer. Ce faisant on superpose les découpes passant d'une surface au carré, puis du carré à l'autre. Ce qui donne une preuve d'existence d'une telle découpe.

Comme pour le théorème 1, le théorème 2 est inefficace pour donner des découpes explicites.