Numéro de la dernière page : 11

Titre : Tangram en carré

Degrés : 5P-8P
9CO - 11CO

Durée : 90 minutes

Résumé : Le jeu de Tangram (appelé en chinois les sept planches de la ruse ou jeu des sept pièces) est un des plus anciens jeux géométriques connus. Avec ces sept pièces, on peut construire bien des formes différentes.
Mais combien de carrés différents peut-on construire en utilisant seulement certaines pièces du Tangram ?
Cette question peut être déclinée de plusieurs manières en fonction du degré concerné et de vos envies.

Dans cette activité, on peut, par exemple :
1) considérer des décompositions différentes de carrés éventuellement de même aire ;
2) considérer des carrés d'aires distinctes.

Plusieurs autres questionnements similaires peuvent être trouvé dans pages qui suivent.

Objectifs et composantes selon le PER :

MSN 24 — Utiliser la mesure pour comparer des grandeurs…

… en décomposant des surfaces en aires et en surfaces élémentaires

MSN 34 — Mobiliser la mesure pour comparer des grandeurs…

… en mobilisant l'instrument et l'unité de mesure adaptés
… en estimant la mesure des grandeurs
… en calculant des grandeurs (aires)

Tangram en carré

1) Découpe les pièces du Tangram.

2) Quel est le nombre maximal de carrés que l'on peut construire à l'aide des pièces du Tangram ? Tu n'as pas besoin d'utiliser toutes les pièces à chaque fois.
Deux carrés sont différents si les décompositions sont différentes.
Dessine toutes les possibilités.

Numéro de la dernière page : 11

Titre : Tangram en carré

Degrés concernés : 5P-8P
9CO - 11CO
PR, 1^e – 3^e de l'ECG

Prérequis : aucun

Objectifs :

- parvenir à identifier des configurations qui ne diffèrent que par un mouvement (isométrie) du carré obtenu.
- trouver une stratégie de comptage pour dénombrer tous les carrés possibles faits avec des pièces de Tangram

Compétences travaillées :

MSN 25 – Modélisation

Résoudre des problèmes de mesurage en lien avec les grandeurs étudiées, notamment :

- trier et organiser des informations
- mettre en œuvre une démarche de résolution
- ajuster par essais successifs
- poser une conjecture, puis valider ou réfuter
- déduire une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- vérifier, puis communiquer une démarche et un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats

MSN – 35 Modélisation

Résoudre des problèmes de mesurage en lien avec les grandeurs et les théorèmes étudiés, notamment :

- trier et organiser des informations
- mettre en œuvre une démarche de résolution
- ajuster par essais successifs
- poser des conjectures, puis valider ou réfuter
- déduire une ou plusieurs informations nouvelles à partir de celles qui sont connues
- utiliser des propriétés des figures et des grandeurs pour établir des preuves
- vérifier, puis communiquer une démarche et un résultat en utilisant un vocabulaire, une syntaxe ainsi que des symboles adéquats

MSN 24 – Comparer des grandeurs (aires) :

- Fractionner des aires
- Comparer et classer des aires par manipulation de surfaces, en utilisant des unités non conventionnelles

MSN 34 – Comparer des grandeurs (aires) :

- Comparer et classer des grandeurs (aires) par manipulation de surfaces , en utilisant des unités non conventionnelles

Matériel : pour chaque groupe

- un jeu de Tangram (pièces à découper fournies en Annexe p. 5)
- la grille donnée en page 6 (à donner lors de la recherche systématique et selon la méthode choisie)

Truc pratique : prévoir une enveloppe par élève lui permettant de ranger ses pièces de Tangram.

Attention : les plastifieuses classiques ne conviennent pas pour plastifier les pièces de Tangram, en effet elles ne soudent que le bord du la fourre en plastique dans laquelle la feuille est mise, mais elle ne colle pas la fourre à la feuille de papier.
Quand l'enfant découpe les pièces dans la feuille plastifiée, le plastique et le papier se séparent. Il faut prendre du plastique transparent adhésif et plastifier des feuilles sur lesquelles sont imprimées au préalable les Tangrams.

Durée estimée : 90 minutes

Proposition de déroulement : L'activité se déroule en 3 parties :

Distribuer des feuilles cartonnées avec la forme du Tangram et les faire découper aux élèves.

1ère partie – Travail en groupe

Les élèves travaillent en groupes d'au plus 4 élèves.

Après que l'enseignant ait donné la consigne aux élèves sous forme orale ou écrite au tableau, les élèves travaillent par petits groupes sur la question. L'enseignant passe dans les rangs pour répondre à d'éventuelles questions.

Les élèves dessinent leurs solutions.

Lorsqu'une grande partie des groupes pense avoir trouvé toutes les solutions, passer à la mise en commun.

2e partie – Mise en commun

L'enseignant prend la feuille d'un premier groupe et dessine au tableau leurs carrés (prendre la feuille d'un groupe qui ne les a pas tous trouvés). Puis elle questionne les autres groupes pour compléter la liste des carrés possibles.

Les organiser selon le nombre de pièces ou selon l'aire des carrés. Ce classement dépend de la méthode de résolution choisie par l'enseignant.

Il devrait y avoir entre 7 et 9 carrés.

Il est possible que les élèves proposent comme solutions différentes, des solutions qui diffèrent des solutions déjà présentées seulement par un mouvement du carré obtenu (isométries). En profiter pour lancer la discussion sur l'équivalence des solutions.

Lorsque toutes les solutions proposées par les élèves sont dessinées au tableau, l'enseignant peut demander si toutes les solutions sont là.

Si les élèves n'ont plus de propositions, l'enseignant propose à sont tour des solutions de deux types :

- les solutions manquantes
- des solutions qui diffèrent des solutions déjà présentées seulement par un mouvement du carré obtenu, si les élèves ne les ont pas déjà proposées.

Le deuxième type de solutions permet de lancer la discussion sur l'équivalence des solutions.

L'enseignant pose ensuite la question : Comment être sûr d'avoir tous les carrés possibles ?

Avec l'aide des élèves, l'enseignant met en place une stratégie de comptage (voir résolution). L'enseignant peut proposer aux élèves d'utiliser la grille présentée dans la résolution et donnée en Annexe p.6.

3e partie – Travail en groupe

Les élèves travaillent à nouveau en groupe pour effectuer leur recherche systématique et rédiger.

Analyse a priori de l'activité :
Démarches prévisibles des élèves

- tâtonnements

Difficultés potentielles

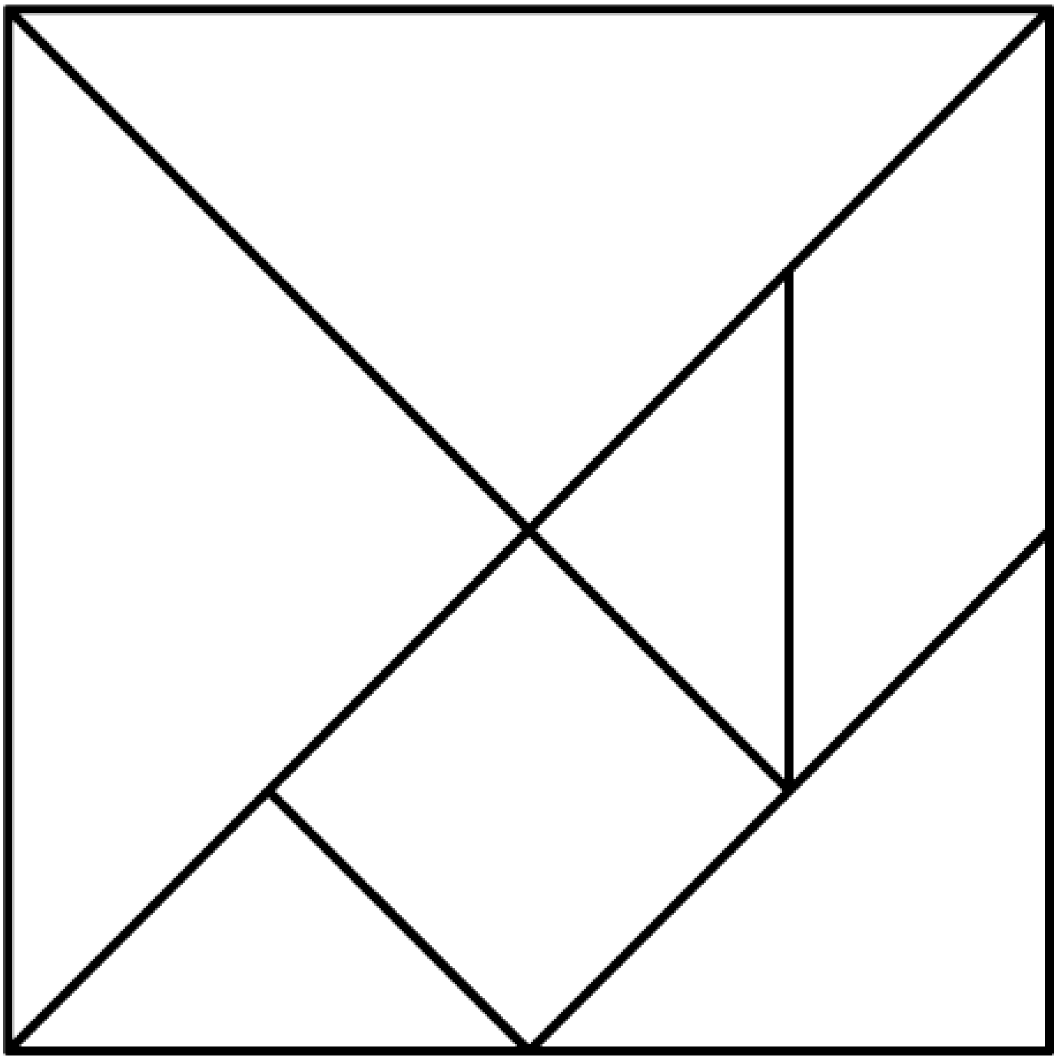
- mauvaise compréhension de la consigne
- difficultés à reproduire les solutions
- difficultés à se représenter les isométries

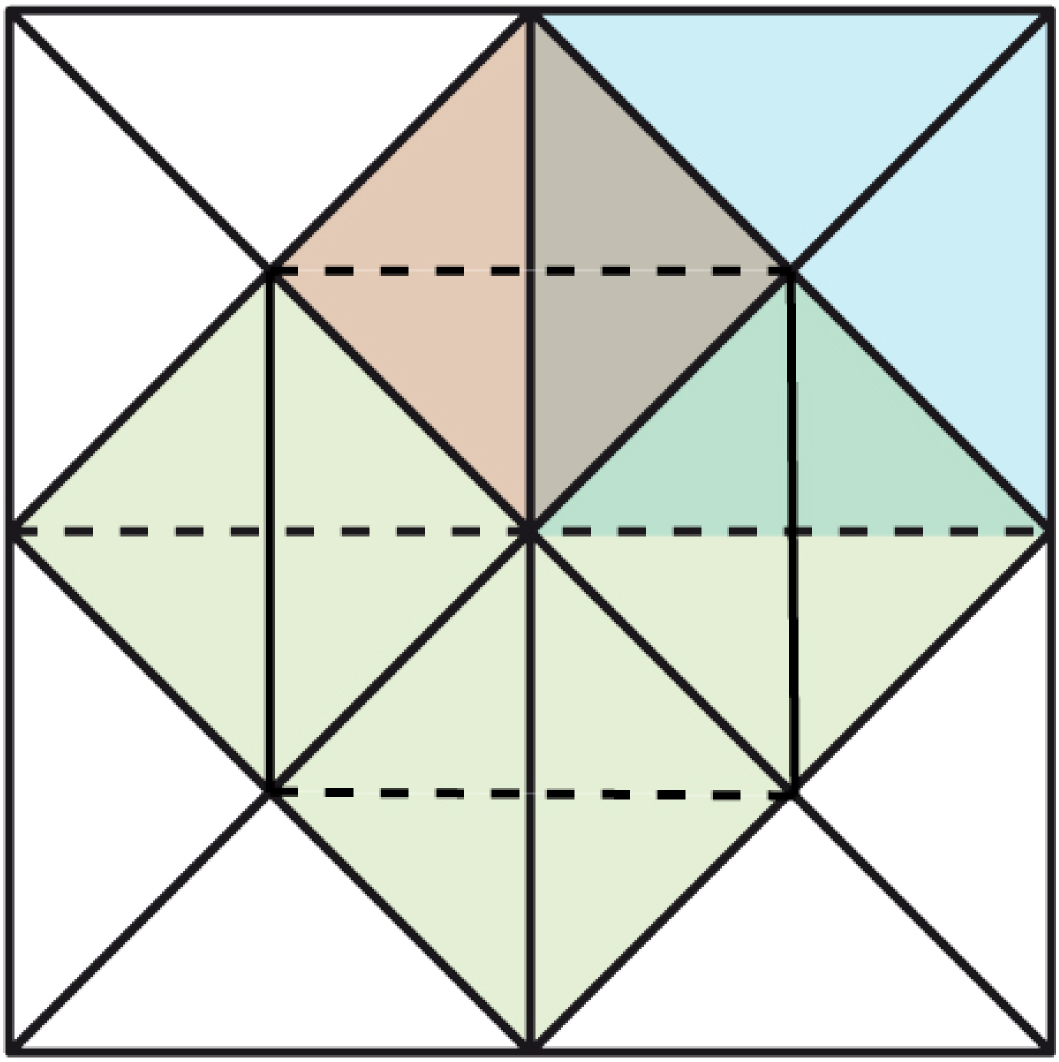
Interventions de l'enseignant
voir le Déroulement

Variantes et/ou développements possibles :

Variables didactiques :

<u>Annexes</u> :

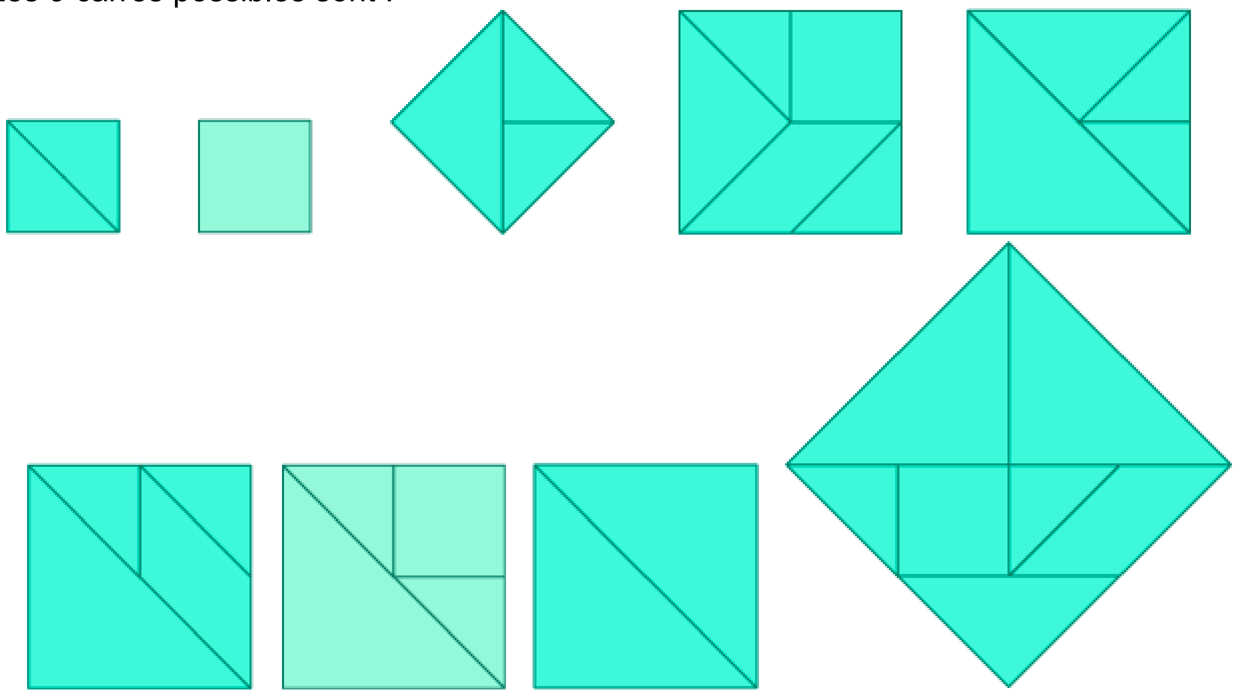




Sur cette grille, les triangles unités peuvent être disposés de deux manières : soit l'hypoténuse est placée selon un trait noir, soit elle est placée selon un traitillé.

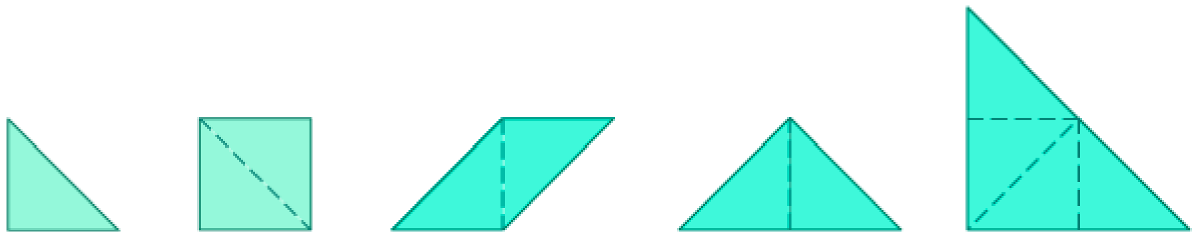
Résolution

Les 9 carrés possibles sont :



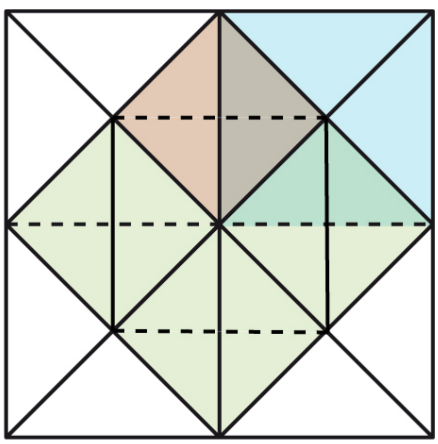
Une preuve combinatoire

On considère que le petit triangle est l'unité de base. Dans ce cas, les pièces ont pour aire :



1 2 2 2 4

Assertion de travail que l'on ne va pas démontrer :
Les seuls carrés constructibles avec les pièces du Tangram sont d'aire 2, 4, 8 ou 16.
De plus, pour former ces quatre carrés, les pièces du Tangram se disposent exactement sur la grille ci-dessous.



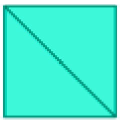
Cette grille est le pavage à l'aide du triangle unité du carré que l'on obtient avec toutes les pièces du Tangram ; les seuls carrés que l'on peut y trouver comportent 2 (carré rouge), 4 (carré bleu), 8 (carré vert) ou 16 pièces (carré entier).

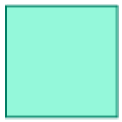
Cette observation n'est en aucun cas une preuve ; elle nécessiterait une démonstration complète que nous n'allons pas faire ici. Vous la trouverez dans la fiche destinée au PO

A l'aide de cette assertion, on montre ci-dessous que les seuls carrés que l'on peut construire sont bien ceux décrits plus haut

La question qu'il faut se poser est la suivante :
Comment peut-on écrire les nombres 2, 4, 8, et 16 (les aires des carrés possibles) à l'aide de l'addition et des nombres 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4 (les aires des pièces du Tangram) ?

<u>Carré d'aire 2 :</u>
2 peut s'écrire comme 1 + 1 ou 2

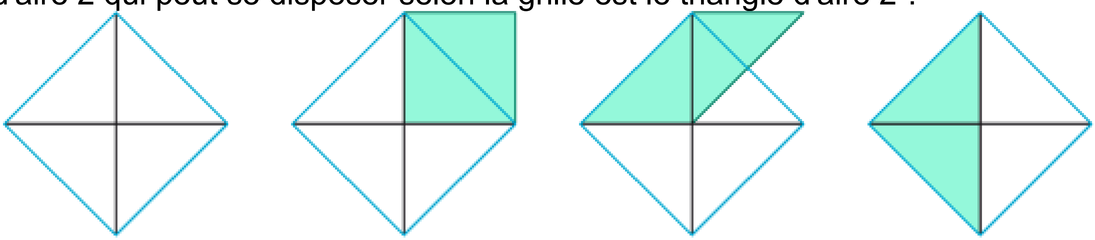
Pour 1+1, on obtient : .

Pour 2, la seule pièce d'aire 2 qui est aussi un carré est 

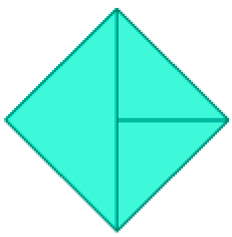
<u>Carré d'aire 4 :</u>
4 peut s'écrire : 1 + 1 + 2, 2 + 2 ou 4

Pour 4, la seule pièce d'aire 4, n'est pas un carré.
Pour 2 + 2, il n'est pas possible de combiner 2 pièces d'aire 2 pour construire un carré.

Pour 1 + 1 + 2, si on observe le carré d'aire 4 triangles unités, on constate que la seule pièce d'aire 2 qui peut se disposer selon la grille est le triangle d'aire 2 :



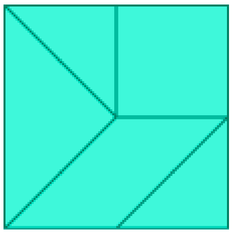
La seule possibilité est donc :



<u>Carré d'aire 8</u>

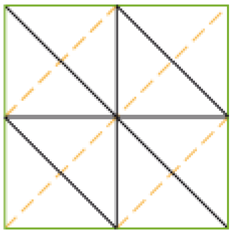
8 peut s'écrire comme : 1 + 1 + 2 + 2 + 2, 1 + 1 + 2 + 4, 4 + 4

Pour 1 + 1 + 2 + 2 + 2, il s'agit d'utiliser toutes les pièces sauf les deux grands triangles. On a un exemple :

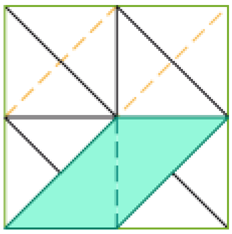


Mais est-ce le seul ?

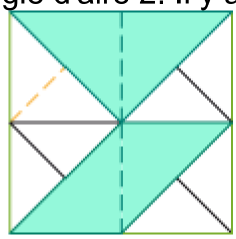
Reprenons la grille pour un carré d'aire 8. Les triangles unités peuvent être disposés de deux manières : soit l'hypoténuse est placée selon une diagonale noire, soit elle est placée selon une diagonale orange.



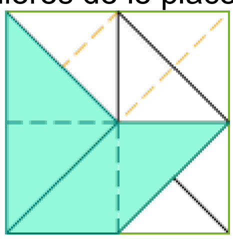
Commençons par placer le parallélogramme. A symétrie centrale près, le seul moyen de le placer sur la grille est :



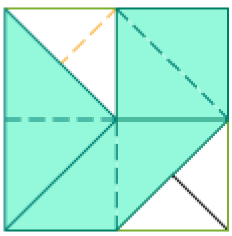
Plaçons ensuite le triangle d'aire 2. Il y a deux manières de le placer :



et

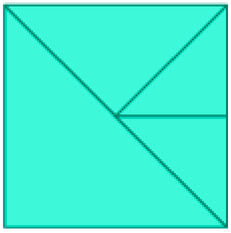


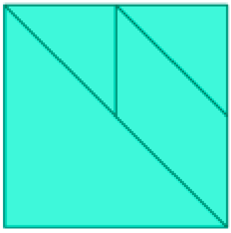
Cependant, dans la première configuration, il est impossible de disposer ensuite le carré. On choisit donc la deuxième configuration et le carré n'a ensuite qu'une unique possibilité de placement :

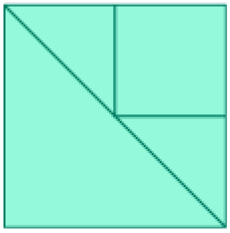


Les triangles d'aire 1 se placent enfin de manière unique pour former la configuration proposée.

Pour 1 + 1 + 2 + 4, les trois combinaisons avec chacune des pièces d'aire 2 sont possibles :

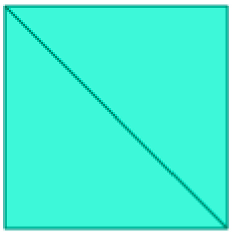






Elles sont uniques par le même type d'arguments que ci-dessus.

Pour 4 + 4, la seules possibilité est :



<u>Carré d'aire 16 :</u>

La seule possibilité d'obtenir 16 est de prendre toutes les pièces et donc de faire le carré maximal. De plus, par le même type d'arguments que ci-dessus, cette configuration des pièces constitue l'unique solution.